

FELVÉTELI 2022
MATEMATIKA írásbeli próba
1. változat

FONTOS MEGJEGYZÉS: A feladatoknak egy vagy több helyes válasza is lehet, amelyeket a versenyző az erre a célra kapott lapon kell bejelölnön. A feleletválasztós feladatsor értékelése a versenyszabályzat részleges pontozási rendszere alapján történik.

1. A $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2 + n - 2}{2n^2 + 3n + 1} \right)^{n+2}$ határérték

A e;

B e - 1;

C $\frac{1}{e}$;

D e^{-2} .

2. A $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2}$ határérték

A 0;

B $\frac{1}{2}$;

C 1;

D $\frac{3}{2}$.

3. Adott az $f(x) = (x+1)e^x$ képlettel értelmezett $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény és a $P(0, f(0))$ pont. A P pontban az f függvény grafikonjához húzott érintőt d -vel jelöljük. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A A d egyenes egyenlete $y = 2x + 1$.

B A $Q(3, 7)$ pont rajta van a d egyenesen.

C A d egyenes egyenlete $y = 2x - 1$.

D Az $S(-3, -4)$ pont rajta van a d egyenesen.

4. Az $ABCD$ trapézban $m(\hat{A}) = m(\hat{D}) = 90^\circ$, $AB \parallel CD$ és AC merőleges BD -re. Az alábbi összefüggések közül melyek igazak?

A $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$;

B $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$;

C $\vec{AD} \cdot \vec{DC} = 0$;

D $\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$.

5. Az xOy Descartes-féle koordináta-rendszerben adott az $M(1, 1)$ pont. Az M ponton átmenő és 2 irányítványozójú egyenes egyenlete

A $2x - y - 1 = 0$;

B $2x + y - 1 = 0$;

C $2x + y + 1 = 0$;

D $-2x + y - 1 = 0$.

6. Az A szög mértéke 450° és 540° között van, és $\cos A = -\frac{7}{25}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $\sin \frac{A}{2} = -\frac{4}{5}$;

B $\cos \frac{A}{2} = -\frac{3}{5}$;

C $\sin \frac{A}{2} = -\frac{3}{5}$;

D $\cos \frac{A}{2} = -\frac{4}{5}$.

7. Az $(1 + i)^{2022}$ szám imaginárius része

A 0;

B 2^{1011} ;

C -2^{1011} ;

D 2^{2022} .

8. A

$$\log_9(5x + 3) > \frac{1}{2} \log_3(x - 1)$$

egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza

A $(-1, +\infty)$;

B $\left(-\frac{3}{5}, +\infty\right)$;

C $(1, +\infty)$;

D $(2, +\infty)$.

9. Egy számtani haladvány első 8 tagjának összege 64, míg az első 19 tagjának összege 361. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A A haladvány állandó különbsége 2. B A haladvány első tagja 1.
 C A haladvány állandó különbsége 4. D A haladvány első tagja -8 .

10. Az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1 + \cos^2 x} dx$ integrál értéke

- A $\frac{\pi}{4}$; B $\frac{\pi}{2}$; C $\ln 2$; D $\ln(1 + \sqrt{2})$.

11. Az $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 2x}$ képlettel értelmezzük. Az f függvény grafikonjához a $+\infty$ felé húzott aszimptota egyenlete

- A $y = -2$; B $y = 2x - 1$; C $y = -1$; D $y = 2x + 1$.

12. A $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} (e^{\frac{1}{n}} + 2^2 e^{\frac{2}{n}} + \dots + n^2 e^{\frac{n}{n}})$ határérték

- A 1; B $e - 2$; C e^2 ; D $e - 1$.

13. Adottak az $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ és $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ vektorok, ahol \vec{i} , illetve \vec{j} az xOy Descartes-féle koordináta-rendszer Ox és Oy tengelyének egységvektorai. Ha az \vec{u} és \vec{v} vektorok kollineárisak, akkor az $a \in \mathbb{R}$ paraméter egy lehetséges értéke

- A $a = -2$; B $a = 1$; C $a = -1$; D $a = 2$.

14. Az alábbi összefüggések közül melyek igazak?

- A $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = 8\sqrt{3}$; B $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} - \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = 8\sqrt{3}$;
 C $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} + \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = 16$; D $\frac{1}{\sin^2 15^\circ} - \frac{1}{\cos^2 15^\circ} = 16$.

15. Ha az ABC hegyesszögű háromszögben fennáll a $BC = 2AC \sin \frac{A}{2}$ összefüggés, akkor

- A $AB = \frac{AC}{2}$; B $AB = AC$; C $AB = \sqrt{2}AC$; D $AB = 2AC$.

16. A $\sqrt{x^2 + x + 3} + \sqrt{x^2 + x - 1} = 2$ egyenlet valós megoldásainak összege

- A 0; B 1; C 2; D -1 .

17. Adott a következő egyenletrendszer, ahol $a \in \mathbb{R}$ egy paraméter:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ x - z = 5 \\ -3x - y + az = -9 \end{cases}.$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az egyenletrendszer kompatibilis és határozott, minden $a < 0$ esetén.
 B Amikor az egyenletrendszer kompatibilis és határozott, akkor a megoldás függ az a paramétertől.
 C Az a paraméternek létezik olyan értéke, amelyre az egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan.
 D Az a paraméternek létezik olyan értéke, amelyre az egyenletrendszer inkompatibilis.

18. Hányféleképpen foglalhat helyet 5 személy egy 7 üléses autóban, ha közülük csak 3 személynek van jogosítványa és a kormányánál egy jogosítvánnyal rendelkező személy ül?

- A 120; B 1080; C 2520; D 5040.

19. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = |x|(e^x - 1)$ képlettel értelmezzük. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az f függvény nem deriválható a 0-ban.
 B Az f függvény folytonos a 0-ban.
 C Az f függvény injektív.
 D Az f függvény szürjektív.

20. Az $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ képlettel értelmezzük, ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$. Az f függvény változási táblázata alább látható.

x	$-\infty$		0		1		2		∞
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	-5	\searrow	$-\infty$	∞	7	\nearrow	∞

Ekkor az $|a| + |b| + |c|$ összeg értéke

- A 7; B 5; C 10; D 8.

21. A $\lim_{x \searrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3}$ határérték

- A 0; B $\frac{1}{3}$; C $\frac{2}{3}$; D ∞ .

22. Egy Descartes-féle koordináta-rendszerben adottak az $A(4, 4)$, $B(7, 0)$ és $C(-1, -8)$ pontok. Az ABC háromszög A szögéhez tartozó belső szögfelező talppontja D . A D pont abszcisszájának és ordinátájának összege

- A $\frac{36}{17}$; B 2; C $\frac{23}{9}$; D $\frac{32}{19}$.

23. Az $ABCD$ paralelogramma esetén bevezetjük az $AB = a$, $AD = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$ és $m(\widehat{DAB}) = \alpha$ jelöléseket. Ha $\alpha \neq 90^\circ$, akkor az alábbi összefüggések közül melyek igazak?

- A $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$;
 B $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$;
 C $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2$;
 D $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

24. Legyen $x_n = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \cdot \dots \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$, minden $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ esetén. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $x_{n+1} < x_n$, minden $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ esetén.
 B $\frac{\sqrt{2}}{2} < x_n < 1$, minden $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ esetén.
 C $x_2 = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$.
 D $2^n x_n \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 1$, minden $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ esetén.

25. Adott a következő függvény: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ -2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tudva, hogy $x = -2$ az $f(x) = 0$ egyenlet egy megoldása, az alábbi számok közül még melyek megoldásai ennek az egyenletnek?

- A $1 - \sqrt{5}$; B $1 + \sqrt{5}$; C $1 - \sqrt{7}$; D $1 + \sqrt{7}$.

26. Adott a valós számok halmazán az

$$\left[\frac{x+1}{2} \right] = \frac{x+1}{3}$$

egyenlet, ahol $[a]$ az a valós szám egész részét jelöli. Ha ezen egyenlet megoldásainak halmaza S , akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $S = \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$; B $S = \{-1, 2\}$;
 C $S = \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right]$; D $S = \{-4, -1, 2\}$.

27. A valós számok \mathbb{R} halmazán értelmezzük az $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ műveletet. Ha ismert, hogy ez a művelet asszociatív, akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $1 * (2 * 3) = 2$.
 B A $[0, +\infty)$ zárt részhalmaz a „ $*$ ” műveletre nézve.
 C Létezik olyan $a \in \mathbb{R}$, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $a * x = a$.
 D $(\mathbb{R}, *)$ egy csoport.

28. Adott az $(R, +, \cdot)$ gyűrű, ahol $R = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az $(R, +, \cdot)$ gyűrűnek van legalább 3 invertálható eleme.
 B Az $(R, +, \cdot)$ gyűrű invertálható elemeinek összege 0.
 C Az $(R, +, \cdot)$ gyűrűnek van legalább egy olyan invertálható eleme, amely nem valós szám.
 D $(R, +, \cdot)$ egy test.

29. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén legyen $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 1$; B $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$; C $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \infty$; D $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n > 2$.

30. Az ABC derékszögű háromszögben $m(\widehat{C}) = 90^\circ$, illetve a, b a befogók és c az átfogó hossza. Adottak továbbá az $E(-1, 0)$, $F(1, 0)$, $M\left(\frac{b-c}{a}, 0\right)$ pontok és a (d) $ax + by + c = 0$ egyenes. Egy tetszőleges X pont távolságát a d egyenestől $\text{dist}(X, d)$ -vel jelöljük. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az $E(-1, 0)$, $F(1, 0)$ pontok a d egyenesen vannak.
 B $\text{dist}(M, d) = \frac{b}{c}$.
 C Az $M\left(\frac{b-c}{a}, 0\right)$ pont a d egyenesen van.
 D $\text{dist}(E, d) \cdot \text{dist}(F, d) = \frac{b^2}{c^2}$.