BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

Zulassung 2022
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

WICHTIGER HINWEIS: Die gestellten Aufgaben können eine oder mehrere richtige Antworten haben, die der Kandidat auf dem dafür vorgesehenen Formular vom Prüfungsblatt angeben muss. Die Bewertung der gegebenen Antworten erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung festgesetzten Benotungssystem.

1. Der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+n-2}{2n^2+3n+1}\right)^{n+2}$ ist

A e;   B $\mathrm{e}-1$;   C $\frac{1}{\mathrm{e}}$;   D e^{-2}.

2. Der Grenzwert $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{x^2}-\cos x}{x^2}$ ist

A 0;   B $\frac{1}{2}$;   C 1;   D $\frac{3}{2}$.

3. Gegeben seien: die Funktion $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definiert durch $f(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$, sowie der Punkt $P(0,f(0))$. Mit d wird die Tangente im Punkt P an den Graphen von f bezeichnet. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $y=2x+1$ ist die Gleichung von d.   B d enthält den Punkt $Q(3,7)$.

C $y=2x-1$ ist die Gleichung von d.   D d enthält den Punkt $S(-3,-4)$.

4. Im Trapez $ABCD$ gelten: $m(\widehat{A})=m(\widehat{D})=90^\circ$, $AB\parallel CD$ und AC steht senkrecht auf BD. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=0$.   B $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.   C $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$.   D $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

5. Im kartesischen Koordinatensystem xOy ist der Punkt $M(1,1)$ gegeben. Die Gleichung der Geraden, die den Punkt M enthält und deren Steigung 2 beträgt, ist:

A $2x-y-1=0$;   B $2x+y-1=0$;   C $2x+y+1=0$;   D $-2x+y-1=0$.

6. Das Maß des Winkels A liegt zwischen 450° und 540°. Überdies gilt $\cos A=-\frac{7}{25}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $\sin\frac{A}{2}=-\frac{4}{5}$.   B $\cos\frac{A}{2}=-\frac{3}{5}$.   C $\sin\frac{A}{2}=-\frac{3}{5}$.   D $\cos\frac{A}{2}=-\frac{4}{5}$.

7. Der Imaginärteil der Zahl $(1+i)^{2022}$ ist:

A 0;   B 2^{1011};   C -2^{1011};   D 2^{2022}.

8. Die Menge der reellen Lösungen der Ungleichung

$$\log_9(5x+3)>\frac{1}{2}\log_3(x-1)$$

ist:

A $(-1,+\infty)$;   B $(-\frac{3}{5},+\infty)$;   C $(1,+\infty)$;   D $(2,+\infty)$.

9. Die Summe der ersten 8 Glieder einer arithmetischen Zahlenfolge beträgt 64, während die Summe der ersten 19 Glieder dieser Zahlenfolge 361 beträgt. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Die Differenz der arithmetischen Zahlenfolge ist 2. B Das erste Glied ist 1.
C Die Differenz der arithmetischen Zahlenfolge ist 4. D Das erste Glied ist -8.

10. Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$ ist

A $\dfrac{\pi}{4}$; B $\dfrac{\pi}{2}$; C $\ln 2$; D $\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

11. Die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = x - \sqrt{x^2+2x}$ definiert. Diese Funktion hat als Asymptote bei $+\infty$ die Gerade mit der Gleichung

A $y=-2$; B $y=2x-1$; C $y=-1$; D $y=2x+1$.

12. Der Grenzwert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} + 2^2\mathrm{e}^{\frac{2}{n}} + \ldots + n^2\mathrm{e}^{\frac{n}{n}}\right)$ beträgt

A 1; B $\mathrm{e}-2$; C e^2; D $\mathrm{e}-1$.

13. Gegeben seien die Vektoren $\vec{u} = a\vec{i} + \vec{j}$ und $\vec{v} = 2\vec{i} + (a+1)\vec{j}$, wobei $\vec{i}$ und $\vec{j}$ die Einheitsvektoren in Richtung der positiven Koordinatenachsen Ox, beziehungsweise Oy, im kartesischen Koordinatensystem xOy bezeichnen. Falls die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear sind, dann kann der Parameter $a \in \mathbb{R}$ den folgenden Wert haben:

A $a=-2$; B $a=1$; C $a=-1$; D $a=2$.

14. Welche der folgenden Gleichheiten sind wahr?

A $\dfrac{1}{\sin^2 15^\circ} + \dfrac{1}{\cos^2 15^\circ} = 8\sqrt{3}$. B $\dfrac{1}{\sin^2 15^\circ} - \dfrac{1}{\cos^2 15^\circ} = 8\sqrt{3}$.
C $\dfrac{1}{\sin^2 15^\circ} + \dfrac{1}{\cos^2 15^\circ} = 16$. D $\dfrac{1}{\sin^2 15^\circ} - \dfrac{1}{\cos^2 15^\circ} = 16$.

15. Falls in einem spitzwinkligen Dreieck ABC die Gleichheit $BC = 2AC\sin\dfrac{A}{2}$ gilt, dann ist:

A $AB = \dfrac{AC}{2}$; B $AB=AC$; C $AB=\sqrt{2}AC$; D $AB=2AC$.

16. Die Summe der reellen Lösungen der Gleichung $\sqrt{x^2+x+3}+\sqrt{x^2+x-1}=2$ beträgt

A 0; B 1; C 2; D -1.

17. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = 4 \\ x \qquad - \ z = 5 \\ -3x - y + az = -9 \end{cases}$$

mit $a \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Das System ist für alle $a<0$ eindeutig lösbar.

B Ist das System eindeutig lösbar, so hängt seine Lösung von a ab.

C Es gibt einen Wert a, für den das System unendlich viele Lösungen hat.

D Es gibt einen Wert a, für den das System keine Lösung hat.

18. Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 Personen in einem Wagen mit 7 Sitzplätzen zu verteilen, falls nur 3 von ihnen einen Führerschein besitzen und auf dem Fahrersitz eine Person mit Führerschein sitzen muss?

$\boxed{A}$ 120. $\boxed{B}$ 1080. $\boxed{C}$ 2520. $\boxed{D}$ 5040.

19. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = |x|(e^x - 1)$ definiert. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{A}$ Die Funktion f ist in 0 nicht differenzierbar.

$\boxed{B}$ Die Funktion f ist in 0 stetig.

$\boxed{C}$ Die Funktion f ist injektiv.

$\boxed{D}$ Die Funktion f ist surjektiv.

20. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ ist durch $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$ definiert, wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt. Es ist bekannt, dass:

x	$-\infty$			0			1			2			$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	-5	$\searrow$	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Dann ist die Summe $|a| + |b| + |c|$ gleich mit

$\boxed{A}$ 7; $\boxed{B}$ 5; $\boxed{C}$ 10; $\boxed{D}$ 8.

21. Der Grenzwert $\lim\limits_{x \searrow 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt}{x^3}$ ist

$\boxed{A}$ 0; $\boxed{B}$ $\dfrac{1}{3}$; $\boxed{C}$ $\dfrac{2}{3}$; $\boxed{D}$ $+\infty$.

22. Im kartesischen Koordinatensystem xOy sind die Punkte $A(4,4)$, $B(7,0)$ und $C(-1,-8)$ gegeben. Es sei D der Fuß der inneren Winkelhalbierenden des Winkels A im Dreieck ABC. Dann beträgt die Summe der Abszisse und der Ordinate des Punktes D:

$\boxed{A}$ $\dfrac{36}{17}$; $\boxed{B}$ 2; $\boxed{C}$ $\dfrac{23}{9}$; $\boxed{D}$ $\dfrac{32}{19}$.

23. Im Parallelogramm $ABCD$ seien $AB = a$, $AD = b$, $BD = d_1$, $AC = d_2$, $m\left(\widehat{DAB}\right) = \alpha$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr, falls $\alpha \neq 90^\circ$ ist?

$\boxed{A}$ $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$. $\boxed{B}$ $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$.

$\boxed{C}$ $d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2$. $\boxed{D}$ $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

24. Es sei $x_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) \cdot \ldots \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{A}$ $x_{n+1} < x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. $\boxed{B}$ $\frac{\sqrt{2}}{2} < x_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

$\boxed{C}$ $x_2 = \sqrt{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}$. $\boxed{D}$ $2^n x_n \sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

25. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 3 \\ -2 & x & 2 \\ 2 & 2 & x \end{vmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

definiert. Es wird als bekannt angesehen, dass $x = -2$ eine Lösung der Gleichung $f(x) = 0$ ist. Welche der folgenden Zahlen sind ebenfalls Lösungen dieser Gleichung?

A $1 - \sqrt{5}$. B $1 + \sqrt{5}$. C $1 - \sqrt{7}$. D $1 + \sqrt{7}$.

26. In $\mathbb{R}$ sei die Gleichung

$$\left[\frac{x+1}{2}\right] = \frac{x+1}{3}$$

gegeben, wobei $[a]$ den ganzen Teil der reellen Zahl a darstellt. Mit S wird die Lösungsmenge dieser Gleichung bezeichnet. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $S = \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$. B $S = \{-1, 2\}$.

C $S = \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 2\right]$. D $S = \{-4, -1, 2\}$.

27. Die Verknüpfung $x * y = xy - 2x - 2y + 6$ wird in der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definiert. Es wird als bekannt angesehen, dass diese Operation assoziativ ist. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $1 * (2 * 3) = 2$.

B Die Teilmenge $[0, +\infty)$ ist abgeschlossen bezüglich $*$.

C Es existiert ein $a \in \mathbb{R}$, so dass gilt $a * x = a$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

D $(\mathbb{R}, *)$ ist eine Gruppe.

28. Gegeben sei der Ring $(R, +, \cdot)$, wobei $R = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $(R, +, \cdot)$ hat wenigstens 3 invertierbare Elemente.

B Die Summe der invertierberen Elemente von $(R, +, \cdot)$ ist 0.

C $(R, +, \cdot)$ hat wenigstens ein invertierbares Element, das keine reelle Zahl ist.

D $(R, +, \cdot)$ ist ein Körper.

29. Es sei $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \mathrm{d}x$, für jedes $n \in \mathbb{N}^*$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 1$. B $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. C $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \infty$. D $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n > 2$.

30. Gegeben sei das rechtwinklige Dreieck ABC ($m(\widehat{C}) = 90°$). Mit a, b werden die Längen der Katheten und mit c die Länge der Hypothenuse dieses Dreiecks bezeichnet. Ferner betrachte man die Punkte $E(-1, 0)$, $F(1, 0)$, $M\left(\dfrac{b-c}{a}, 0\right)$ sowie die Gerade (d) $ax + by + c = 0$. Man bezeichne mit $\operatorname{dist}(X, d)$ den Abstand zwischen einem beliebigen Punkt X und der Geraden d. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Die Punkte $E(-1, 0)$ und $F(1, 0)$ liegen auf der Geraden d. B $\operatorname{dist}(M, d) = \dfrac{b}{c}$.

C Der Punkt $M\left(\dfrac{b-c}{a}, 0\right)$ liegt auf der Geraden d. D $\operatorname{dist}(E, d) \cdot \operatorname{dist}(F, d) = \dfrac{b^2}{c^2}$.