UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

ADMITERE 2021
Proba scrisă la MATEMATICĂ
Varianta 1.

1. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1), B(1,3), C(3,2)$. Ecuaţia dreptei OG, unde G este centrul de greutate al triunghiului ABC, este:

A $y = -2x$; B $y = -\frac{x}{2}$; C $y = 2x$; D $y = \frac{x}{2}$.

2. Relativ la un reper cartezian considerăm vectorul $\vec{v}(t, t^2)$ cu $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Pentru $t = 2$ vectorul $\vec{v}$ este perpendicular pe vectorul $\vec{a}(-1, \frac{1}{2})$.
B Există t astfel încât $\vec{v}$ să fie coliniar cu vectorul $\vec{b}(17, 19)$.
C Există t astfel încât $\vec{v}$ să fie coliniar cu vectorul $\vec{c}(-1, -1)$.
D Există t astfel încât $\vec{v}$ să fie coliniar cu vectorul $\vec{d}(0, 1)$.

3. Dacă $(-4, 0)$ şi $(1, -1)$ sunt două vârfuri ale unui triunghi de arie 4, atunci cel de-al treilea vârf se poate afla pe dreapta:

A $x + 5y = 0$; B $x + 5y + 8 = 0$; C $x + 5y - 4 = 0$; D $x + 5y + 12 = 0$.

4. Dacă dreapta de ecuaţie $ax + cy - 2b = 0$, cu $a, b, c > 0$, formează un triunghi de arie 2 cu axele de coordonate, atunci:

A a, b, c sunt în progresie geometrică; B $a, -b, c$ sunt în progresie geometrică;
C $a, 2b, c$ sunt în progresie geometrică; D $a, -2b, c$ sunt în progresie geometrică.

5. Considerăm funcţia

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \left|\frac{1}{2}x - 3\right|, & \text{dacă } x \in (-\infty, -2] \\ x + 3, & \text{dacă } x \in (-2, 1) \\ 3 - 2x, & \text{dacă } x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Folosind eventual graficul funcţiei, stabiliţi care din următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A f este surjectivă, dar nu este injectivă.
B f este bijectivă.
C f este injectivă, dar nu este surjectivă.
D f nu este nici surjectivă, nici injectivă.

6. Fie familia de funcţii de gradul al doilea $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 - (2m+1)x + m + 1, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Valoarea lui $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pentru care vârful parabolei asociate funcţiei f_m se găseşte pe dreapta de ecuaţie $2x + 3y + 6 = 0$ este:

A $\frac{1}{16}$; B $-\frac{1}{32}$; C $-\frac{1}{24}$; D $-\frac{5}{32}$.

7. Considerăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} ax+y+z &= 1 \\ x+ay+z &= 2 \\ x+y+z &= 4, \end{cases}$$

unde a este parametru real. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Determinantul sistemului nu depinde de parametrul a.
B Pentru $a<0$ sistemul este compatibil determinat.
C Pentru $a=1$ sistemul este compatibil nedeterminat.
D Pentru $a=1$ sistemul este incompatibil.

8. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, unde $a\in\mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=O_2$.
B Există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=I_2$.
C Există $a\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=A$.
D Există $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât $A^2=\begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}$.

9. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şirul de termen general $x_n=\dfrac{3^n}{(n+1)!}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este descrescător.
B $0<x_n<1$ pentru orice $n\geq 1$.
C $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=0$.
D $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$.

10. Fiind dat $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$ este

A e^{-2a};
B 1;
C e^{2a};
D ∞.

11. Fie $L=\lim\limits_{a\to\infty}\displaystyle\int_0^a x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $L=\infty$.
B $L=1$.
C $L<\mathrm{e}$.
D L nu există.

12. Fie funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, definită prin

$$f(x)=\begin{cases} x^4+ax+1, & \text{dacă } x<1 \\ b+\ln x, & \text{dacă } x\geq 1. \end{cases}$$

Valorile parametrilor reali a şi b pentru care f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ sunt:

A $a=3,\ b=1$;
B $a=-3,\ b=1$;
C $a=-3,\ b=-1$;
D $a=1,\ b=3$.

13. Dacă r și R sunt razele cercului înscris, respectiv cercului circumscris, unui triunghi care are lungimile laturilor 3, 4 și 5, atunci raportul $\dfrac{r}{R}$ este:

A $\dfrac{2}{5}$;
B $\dfrac{5}{2}$;
C $\dfrac{4}{5}$;
D $\dfrac{1}{5}$.

14. Se consideră triunghiul ABC şi punctele M,N,P astfel încât M este mijlocul laturii AB, $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{BN}=k\overrightarrow{BC}$. Valoarea parametrului real k, pentru care $\overrightarrow{MP}=3\overrightarrow{MN}$ este

A $\dfrac{3}{2}$;
B $\dfrac{1}{3}$;
C $\dfrac{1}{2}$;
D $\dfrac{2}{3}$.

15. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia
$$\log_3 \sqrt{3+x} + \log_9(3-x) = \frac{1}{2}.$$
Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

$\boxed{A}$ $S = \{0\}$; $\boxed{B}$ $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$; $\boxed{C}$ $S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$; $\boxed{D}$ $S = \{-\sqrt{12}, \sqrt{12}\}$.

16. Produsul soluţiilor reale ale ecuaţiei $x^2 + x + 4 = 2\sqrt{x^2+x+7}$ este:

$\boxed{A}$ 12; $\boxed{B}$ -12; $\boxed{C}$ 2; $\boxed{D}$ -2.

17. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = x + |x^3 - x^2| + \max\{x^3, x^4\}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{A}$ $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x$ oricare ar fi $x \in (-\infty, 0)$.
$\boxed{B}$ $f(x) = x^2 - x$ oricare ar fi $x \in [0, 1]$.
$\boxed{C}$ Funcţia f nu este derivabilă în 0.
$\boxed{D}$ Tangenta la graficul lui f în punctul $O(0, 0)$ este prima bisectoare.

18. Se consideră mulţimea
$$A := \{a \in \mathbb{R} \ \mid \ \text{funcţia } f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 10x^2 + 2021 \text{ este strict crescătoare}\}.$$
Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{A}$ $A = \emptyset$. $\boxed{B}$ $[3,\infty) \subseteq A$. $\boxed{C}$ Mulţimea A are un cel mai mic element. $\boxed{D}$ $2 \notin A$.

19. Mulţimea valorilor parametrului real a pentru care ecuaţia $x^2(1 - \ln x) = a$ are două soluţii reale distincte este:

$\boxed{A}$ $(\sqrt{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$; $\boxed{B}$ $\left(-\infty, \frac{\mathrm{e}}{2}\right)$; $\boxed{C}$ $\left(0, \frac{\mathrm{e}}{2}\right)$; $\boxed{D}$ $\left[0, \frac{\mathrm{e}}{2}\right]$.

20. Dacă $\cos x = -\frac{7}{25}$ şi $x \in \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$, atunci:

$\boxed{A}$ $\cos\frac{x}{2} = \frac{3}{5}$; $\boxed{B}$ $\cos\frac{x}{2} = \frac{4}{5}$; $\boxed{C}$ $\cos\frac{x}{2} = -\frac{3}{5}$; $\boxed{D}$ $\cos\frac{x}{2} = -\frac{4}{5}$.

21. Folosind notaţiile obişnuite în triunghiul ABC avem $a = 13$, $b = 1$ şi $\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{2}{3}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{A}$ $c = 4\sqrt{10}$. $\boxed{B}$ $c = 6\sqrt{5}$. $\boxed{C}$ $\sin C = \frac{12}{13}$. $\boxed{D}$ $\mathcal{A}ria\,(ABC) = 6$.

22. Dacă a este un parametru şi ecuaţia $\cos 2x + a\sin x - 2a + 7 = 0$ are soluţii, atunci:
$\boxed{A}$ $0 < a \le 5$;
$\boxed{B}$ $2 \le a \le 6$;
$\boxed{C}$ pentru $a = 5$ mulţimea soluţiilor este $S = \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$;
$\boxed{D}$ pentru $a = 5$ mulţimea soluţiilor este $S = \left\{(-1)^k\frac{\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

23. Fie $\alpha \ne 1$ o rădăcină a ecuaţiei $z^3 = 1$. Stabiliţi care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{A}$ $|\alpha| = 1$. $\boxed{B}$ $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \notin \mathbb{R}$.
$\boxed{C}$ $\alpha^{2021} = -\alpha - 1$. $\boxed{D}$ Numărul $-\alpha$ este rădăcină a ecuaţiei $z^2 - z + 1 = 0$.

24. În inelul $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ ecuaţia $x^2 + \widehat{4}x + \widehat{3} = \widehat{0}$

A nu are soluţii;

B nu are soluţie unică;

C are exact două soluţii distincte;

D are exact patru soluţii distincte.

25. Considerăm expresia

$$x * y = \frac{xy - 2}{x + y - 4}.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $*$ este lege de compoziţie pe $\mathbb{R}$.

B $*$ este lege de compoziţie pe $(2, +\infty)$.

C $3 * (3 * 3) = \frac{18}{5}$.

D $x * 4 = x$, pentru orice $x > 3$.

26. Valoarea integralei $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{(1 - \cos x)(1 - \cos 2x)}\,\mathrm{d}x$ este:

A 0; B $\dfrac{4}{3}$; C $\dfrac{2}{3}$; D $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

27. Fie funcţia $f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - \ln(1 + x)$ şi fie $a, b \in (-1, \infty)$ cu $a < b$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Funcţia f are un singur punct de minim global.

B Funcţia f este injectivă.

C $\displaystyle\int_a^b (1 + \ln(1 + x))\mathrm{d}x < \int_a^b \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.

D Funcţia f are cel puţin un punct de maxim global.

28. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-6, 2)$, $B(4, -3)$, $M\,(\alpha, 0)$ şi $N\,(0, \beta)$. Dacă suma $AM + MB + BN + NA$ este minimă, atunci:

A $MN = 0$; B $MN = 1$; C $MN = \sqrt{2}$; D $MN = \sqrt{5}$.

29. Fie $A = \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$. Câte sume egale cu 5044 se pot forma cu elementele mulţimii A (sumele neconţinând repetiţii de elemente)?

A 3; B 4; C 5; D 6.

30. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n + 1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. B $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$. C $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{2}$. D $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nI_n = \frac{1}{4}$.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Răspunsuri corecte

ADMITERE 2021
Proba scrisă la MATEMATICĂ
Varianta 1

1. $\boxed{\textbf{C}}$
2. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
3. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
4. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$
5. $\boxed{\textbf{B}}$
6. $\boxed{\textbf{B}}$
7. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
8. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
9. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
10. $\boxed{\textbf{C}}$
11. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
12. $\boxed{\textbf{C}}$
13. $\boxed{\textbf{A}}$
14. $\boxed{\textbf{D}}$
15. $\boxed{\textbf{C}}$
16. $\boxed{\textbf{D}}$
17. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
18. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
19. $\boxed{\textbf{C}}$
20. $\boxed{\textbf{C}}$
21. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
22. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
23. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
24. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
25. $\boxed{\textbf{B}}$
26. $\boxed{\textbf{C}}$
27. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
28. $\boxed{\textbf{D}}$
29. $\boxed{\textbf{B}}$
30. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$