BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

FELVÉTELI 2021
MATEMATIKA írásbeli próba
1. változat

1. Egy Descartes-féle xOy koordináta-rendszerben tekintjük az $A(-1,1)$, $B(1,3)$, $C(3,2)$ pontokat. Ha G az ABC háromszög súlypontja, akkor az OG egyenes egyenlete:

A $y=-2x$; B $y=-\frac{x}{2}$; C $y=2x$; D $y=\frac{x}{2}$.

2. Egy Descartes-féle koordináta-rendszerhez viszonyítva tekintjük a $\vec{v}(t,t^2)$ vektort, ahol $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $t=2$ esetén a $\vec{v}$ vektor merőleges az $\vec{a}(-1,\frac{1}{2})$ vektorra.
B Létezik olyan t, amelyre a $\vec{v}$ vektor kollineáris a $\vec{b}(17,19)$ vektorral.
C Létezik olyan t, amelyre a $\vec{v}$ vektor kollineáris a $\vec{c}(-1,-1)$ vektorral.
D Létezik olyan t, amelyre a $\vec{v}$ vektor kollineáris a $\vec{d}(0,1)$ vektorral.

3. Ha $(-4,0)$ és $(1,-1)$ egy 4 területű háromszög két csúcsa, akkor a harmadik csúcs a következő egyenesen található:

A $x+5y=0$; B $x+5y+8=0$; C $x+5y-4=0$; D $x+5y+12=0$.

4. Ha $a,b,c>0$ esetén az $ax+cy-2b=0$ egyenletű egyenes a koordináta-tengelyekkel egy 2 területű háromszöget zár közre, akkor

A a,b,c egy mértani haladványt alkot; B $a,-b,c$ egy mértani haladványt alkot;
C $a,2b,c$ egy mértani haladványt alkot; D $a,-2b,c$ egy mértani haladványt alkot.

5. Tekintjük a következő függvényt:

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\left|\frac{1}{2}x-3\right|, & \text{ha } x\in(-\infty,-2]\\ x+3, & \text{ha } x\in(-2,1)\\ 3-2x, & \text{ha } x\in[1,\infty).\end{cases}$$

A függvény grafikonja alapján az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Az f szürjektív, de nem injektív.
B Az f bijektív.
C Az f injektív, de nem szürjektív.
D Az f nem szürjektív és nem injektív.

6. Adott az $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=mx^2-(2m+1)x+m+1, \forall x\in\mathbb{R}$ másodfokú függvénycsalád, ahol $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Az f_m függvényhez rendelt parabola csúcsa a $2x+3y+6=0$ egyenletű egyenesen található, ha az $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ értéke:

A $\frac{1}{16}$; B $-\frac{1}{32}$; C $-\frac{1}{24}$; D $-\frac{5}{32}$.

7. Tekintjük az

$$\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 2 \\ x + y + z &= 4, \end{cases}$$

egyenletrendszert, ahol a egy valós paraméter. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az egyenletrendszer determinánsa nem függ az a paraméter értékétől.
- B $a < 0$ esetén az egyenletrendszer kompatibilis és határozott.
- C $a = 1$ esetén az egyenletrendszer kompatibilis és határozatlan.
- D $a = 1$ esetén az egyenletrendszer inkompatibilis.

8. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, ahol $a \in \mathbb{R}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Létezik $a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $A^2 = O_2$.
- B Létezik $a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $A^2 = I_2$.
- C Létezik $a \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $A^2 = A$.
- D Léteznek $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $A^2 = \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}$.

9. Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat általános tagja $x_n = \dfrac{3^n}{(n+1)!}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az $(x_n)_{n\geq 1}$ sorozat csökkenő.
- B Minden $n \geq 1$ esetén $0 < x_n < 1$.
- C $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 0$.
- D $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

10. Rögzített $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esetén a $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$ határérték:

- A e^{-2a};
- B 1;
- C e^{2a};
- D ∞.

11. Legyen $L = \lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_0^a x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A $L = \infty$.
- B $L = 1$.
- C $L < \mathrm{e}$.
- D L nem létezik.

12. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 1, & \text{ha } x < 1 \\ b + \ln x, & \text{ha } x \geq 1. \end{cases}$$

képlettel értelmezzük. Az a és b valós paraméterek értéke, amelyekre az f deriválható az $\mathbb{R}$-en:

- A $a = 3,\ b = 1$;
- B $a = -3,\ b = 1$;
- C $a = -3,\ b = -1$;
- D $a = 1,\ b = 3$.

13. Ha egy 3, 4 és 5 oldalhosszúságú háromszög beírt és köréírt köreinek sugarai r és R, akkor a $\dfrac{r}{R}$ arány:

- A $\dfrac{2}{5}$;
- B $\dfrac{5}{2}$;
- C $\dfrac{4}{5}$;
- D $\dfrac{1}{5}$.

14. Tekintjük az ABC háromszöget és az M, N, P pontokat úgy, hogy M az AB oldal felezőpontja, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$ és $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$. A k valós paraméter értéke, amelyre az $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$ egyenlőség teljesül:

- A $\dfrac{3}{2}$;
- B $\dfrac{1}{3}$;
- C $\dfrac{1}{2}$;
- D $\dfrac{2}{3}$.

15. A valós számok halmazán tekintjük a

$$\log_3 \sqrt{3+x} + \log_9(3-x) = \frac{1}{2}$$

egyenletet. Az egyenlet megoldásainak halmaza

$\boxed{\text{A}}$ $S = \{0\}$; $\boxed{\text{B}}$ $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$; $\boxed{\text{C}}$ $S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$; $\boxed{\text{D}}$ $S = \{-\sqrt{12}, \sqrt{12}\}$.

16. Az $x^2 + x + 4 = 2\sqrt{x^2 + x + 7}$ egyenlet valós megoldásainak szorzata

$\boxed{\text{A}}$ 12; $\boxed{\text{B}}$ -12; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ -2.

17. Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = x + |x^3 - x^2| + \max\{x^3, x^4\}$ képlettel értelmezzük. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x$, minden $x \in (-\infty, 0)$ esetén.
$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = x^2 - x$, minden $x \in [0, 1]$ esetén.
$\boxed{\text{C}}$ Az f függvény nem deriválható a 0-ban.
$\boxed{\text{D}}$ Az f grafikonjának érintője az $O(0, 0)$ pontban az első szögfelező.

18. Tekintjük az

$$A := \{a \in \mathbb{R} \mid \text{ az } f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 10x^2 + 2021 \text{ függvény szigorúan növekvő}\}$$

halmazt. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $A = \emptyset$. $\boxed{\text{B}}$ $[3, \infty) \subseteq A$. $\boxed{\text{C}}$ Az A halmaznak van egy legkisebb eleme. $\boxed{\text{D}}$ $2 \notin A$.

19. Az a valós paraméterek halmaza, amelyekre az $x^2(1 - \ln x) = a$ egyenletnek két különböző valós megoldása van:

$\boxed{\text{A}}$ $(\sqrt{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$; $\boxed{\text{B}}$ $\left(-\infty, \frac{\mathrm{e}}{2}\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $\left(0, \frac{\mathrm{e}}{2}\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $\left[0, \frac{\mathrm{e}}{2}\right]$.

20. Ha $\cos x = -\dfrac{7}{25}$ és $x \in \left(\dfrac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$, akkor:

$\boxed{\text{A}}$ $\cos\frac{x}{2} = \frac{3}{5}$; $\boxed{\text{B}}$ $\cos\frac{x}{2} = \frac{4}{5}$; $\boxed{\text{C}}$ $\cos\frac{x}{2} = -\frac{3}{5}$; $\boxed{\text{D}}$ $\cos\frac{x}{2} = -\frac{4}{5}$.

21. A szokásos jelöléseket használva az ABC háromszögben $a = 13$, $b = 1$ és $\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{2}{3}$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $c = 4\sqrt{10}$. $\boxed{\text{B}}$ $c = 6\sqrt{5}$. $\boxed{\text{C}}$ $\sin C = \frac{12}{13}$. $\boxed{\text{D}}$ $T_{ABC\triangle} = 6$ a terület.

22. Ha a egy paraméter és a $\cos 2x + a \sin x - 2a + 7 = 0$ egyenletnek van megoldása, akkor

$\boxed{\text{A}}$ $0 < a \leq 5$;

$\boxed{\text{B}}$ $2 \leq a \leq 6$;

$\boxed{\text{C}}$ $a = 5$ esetén a megoldások halmaza $S = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\boxed{\text{D}}$ $a = 5$ esetén a megoldások halmaza $S = \left\{(-1)^k \frac{\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

23. Legyen $\alpha \neq 1$ a $z^3 = 1$ egyenlet egy gyöke. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $|\alpha| = 1$. $\boxed{\text{B}}$ $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \notin \mathbb{R}$.
$\boxed{\text{C}}$ $\alpha^{2021} = -\alpha - 1$. $\boxed{\text{D}}$ A $-\alpha$ szám gyöke a $z^2 - z + 1 = 0$ egyenletnek.

24. A $(\mathbb{Z}_{12},+,\cdot)$ gyűrűben az $x^2+\widehat{4}x+\widehat{3}=\widehat{0}$ egyenletnek

$\boxed{\text{A}}$ nincs megoldása;

$\boxed{\text{B}}$ nem egyetlen megoldása van;

$\boxed{\text{C}}$ pontosan két különböző megoldása van;

$\boxed{\text{D}}$ pontosan négy különböző megoldása van.

25. Tekintjük az

$$x*y=\frac{xy-2}{x+y-4}$$

kifejezést. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ A $*$ egy művelet az $\mathbb{R}$-en.

$\boxed{\text{B}}$ A $*$ egy művelet a $(2,+\infty)$ intervallumon.

$\boxed{\text{C}}$ $3*(3*3)=\frac{18}{5}$.

$\boxed{\text{D}}$ $x*4=x$, minden $x>3$ esetén.

26. Az $\displaystyle\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/3}\sqrt{(1-\cos x)(1-\cos 2x)}\,\mathrm{d}x$ integrál értéke:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{4}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{2}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

27. Az $f\colon(-1,\infty)\to\mathbb{R}$ függvényt az $f(x)=\mathrm{e}^x-1-\ln(1+x)$ képlettel értelmezzük és legyenek $a,b\in(-1,\infty)$ úgy, hogy $a<b$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az f függvénynek egyetlen globális minimumpontja van.

$\boxed{\text{B}}$ Az f függvény injektív.

$\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_a^b(1+\ln(1+x))\mathrm{d}x<\int_a^b\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$.

$\boxed{\text{D}}$ Az f függvénynek van legalább egy globális maximumpontja.

28. Az xOy koordináta-rendszerben tekintjük az $A(-6,2)$, $B(4,-3)$, $M(\alpha,0)$ és $N(0,\beta)$ pontokat. Ha az $AM+MB+BN+NA$ összeg minimális, akkor

$\boxed{\text{A}}$ $MN=0$; $\boxed{\text{B}}$ $MN=1$; $\boxed{\text{C}}$ $MN=\sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $MN=\sqrt{5}$.

29. Az $A=\{1,2,\dots,99,100\}$ halmaz elemeivel hány 5044 értékű összeg alkotható (az összegben az elemek nem ismétlődnek)?

$\boxed{\text{A}}$ 3; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 5; $\boxed{\text{D}}$ 6.

30. Minden $n\in\mathbb{N}^*$ esetén legyen $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^{2n}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $I_n+I_{n+1}=\dfrac{1}{2n+1},\quad\forall n\in\mathbb{N}^*$. $\boxed{\text{B}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$. $\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nI_n=\frac{1}{4}$.

BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM, KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

HELYES VÁLASZOK

FELVÉTELI, 2021
Írásbeli próba MATEMATIKÁBÓL
1-es változat

1. $\boxed{\textbf{C}}$

2. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

3. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

4. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$

5. $\boxed{\textbf{B}}$

6. $\boxed{\textbf{B}}$

7. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

8. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

9. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

10. $\boxed{\textbf{C}}$

11. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

12. $\boxed{\textbf{C}}$

13. $\boxed{\textbf{A}}$

14. $\boxed{\textbf{D}}$

15. $\boxed{\textbf{C}}$

16. $\boxed{\textbf{D}}$

17. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

18. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

19. $\boxed{\textbf{C}}$

20. $\boxed{\textbf{C}}$

21. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

22. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

23. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

24. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

25. $\boxed{\textbf{B}}$

26. $\boxed{\textbf{C}}$

27. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

28. $\boxed{\textbf{D}}$

29. $\boxed{\textbf{B}}$

30. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$