BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

AUFNAHMEPRÜFUNG 2021
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK
1. Variante

1. Gegeben seien die Punkte $A(-1,1), B(1,3), C(3,2)$ in einem kartesischen Koordinatensystem xOy. Die Gleichung der Geraden OG, wobei G der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist, lautet:

A $y=-2x$; B $y=-\frac{x}{2}$; C $y=2x$; D $y=\frac{x}{2}$.

2. Gegeben sei der Vektor $\vec{v}(t,t^2)$, mit $t\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, in einem kartesischen Koordinatensystem. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Für $t=2$ steht der Vektor $\vec{v}$ senkrecht auf den Vektor $\vec{a}(-1,\frac{1}{2})$.
B Es gibt t, so dass $\vec{v}$ kollinear zum Vektor $\vec{b}(17,19)$ ist.
C Es gibt t, so dass $\vec{v}$ kollinear zum Vektor $\vec{c}(-1,-1)$ ist.
D Es gibt t, so dass $\vec{v}$ kollinear zum Vektor $\vec{d}(0,1)$ ist.

3. Sind $(-4,0)$ und $(1,-1)$ zwei Eckpunkte eines Dreiecks, dessen Flächeninhalt gleich 4 ist, dann kann sich der dritte Eckpunkt auf der Geraden:

A $x+5y=0$; B $x+5y+8=0$; C $x+5y-4=0$; D $x+5y+12=0$

befinden.

4. Bildet die Gerade $ax+cy-2b=0$, mit $a,b,c>0$, mit den Koordinatenachsen ein Dreieck, dessen Flächeninhalt 2 beträgt, dann sind:

A a,b,c in geometrischer Folge; B $a,-b,c$ in geometrischer Folge;
C $a,2b,c$ in geometrischer Folge; D $a,-2b,c$ in geometrischer Folge.

5. Gegeben sei die Funktion

$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\left|\dfrac{1}{2}x-3\right|, & \text{falls } x\in(-\infty,-2]\\ x+3, & \text{falls } x\in(-2,1)\\ 3-2x, & \text{falls } x\in[1,\infty).\end{cases}$$

Eventuell den Graphen dieser Funktion verwendend, gebe man an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A f ist surjektiv, jedoch nicht injektiv.
B f ist bijektiv.
C f ist injektiv, jedoch nicht surjektiv.
D f ist weder surjektiv, noch injektiv.

6. Gegeben sei die Menge von Funktionen zweiten Grades $f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_m(x)=mx^2-(2m+1)x+m+1, \forall x\in\mathbb{R}$, wobei $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Der Wert von $m\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, für den der Scheitelpunkt der zu der Funktion f_m gehörenden Parabel auf der Geraden $2x+3y+6=0$ liegt, beträgt:

A $\frac{1}{16}$; B $-\frac{1}{32}$; C $-\frac{1}{24}$; D $-\frac{5}{32}$.

7. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{cases} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 2 \\ x + y + z &= 4, \end{cases}$$

wobei a ein reeller Parameter ist. Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

- A Die Determinante des Systems hängt vom Parameter a nicht ab.
- B Für $a < 0$ ist das System eindeutig lösbar.
- C Für $a = 1$ ist das System mehrdeutig lösbar.
- D Für $a = 1$ ist das System unlösbar.

8. Es sei $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$, wobei $a \in \mathbb{R}$. Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

- A Es gibt $a \in \mathbb{R}$, so dass $A^2 = O_2$.
- B Es gibt $a \in \mathbb{R}$, so dass $A^2 = I_2$.
- C Es gibt $a \in \mathbb{R}$, so dass $A^2 = A$.
- D Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $A^2 = \begin{pmatrix} b & b \\ b & b \end{pmatrix}$.

9. Es sei $(x_n)_{n\geq 1}$ die Folge mit allgemeinem Glied $x_n = \dfrac{3^n}{(n+1)!}$. Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

- A Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist fallend.
- B $0 < x_n < 1$ für alle $n \geq 1$.
- C $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 0$.
- D $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

10. Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist der Wert des Grenzwertes $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x$ gleich

A e^{-2a}; B 1; C e^{2a}; D ∞.

11. Es sei $L = \lim\limits_{a\to\infty} \displaystyle\int_0^a x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A $L = \infty$. B $L = 1$. C $L < \mathrm{e}$. D L existiert nicht.

12. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei durch

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + ax + 1, & \text{falls } x < 1 \\ b + \ln x, & \text{falls } x \geq 1 \end{cases}$$

definiert. Die Werte der reellen Parameter a und b, für die f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, sind:

A $a = 3,\ b = 1$; B $a = -3,\ b = 1$; C $a = -3,\ b = -1$; D $a = 1,\ b = 3$.

13. Sind r und R die Radien des eingeschriebenen, beziehungsweise des umschriebenen Kreises eines Dreiecks mit den Seitenlängen 3, 4 und 5, dann ist der Quotient $\dfrac{r}{R}$ gleich:

A $\dfrac{2}{5}$; B $\dfrac{5}{2}$; C $\dfrac{4}{5}$; D $\dfrac{1}{5}$.

14. Gegeben sei das Dreieck ABC und die Punkte M, N, P, so dass M der Mittelpunkt der Seite AB, $\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BN} = k\overrightarrow{BC}$ ist. Der Wert des reellen Parameters k, für den $\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{MN}$ ist, beträgt

A $\dfrac{3}{2}$; B $\dfrac{1}{3}$; C $\dfrac{1}{2}$; D $\dfrac{2}{3}$.

15. Gegeben sei in $\mathbb{R}$ die Gleichung

$$\log_3 \sqrt{3+x} + \log_9(3-x) = \frac{1}{2}.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist:

$\boxed{\text{A}}$ $S = \{0\}$; $\boxed{\text{B}}$ $S = \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$; $\boxed{\text{C}}$ $S = \{-\sqrt{6}, \sqrt{6}\}$; $\boxed{\text{D}}$ $S = \{-\sqrt{12}, \sqrt{12}\}$.

16. Das Produkt der reellen Lösungen der Gleichung $x^2 + x + 4 = 2\sqrt{x^2 + x + 7}$ beträgt:

$\boxed{\text{A}}$ 12; $\boxed{\text{B}}$ -12; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ -2.

17. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x + |x^3 - x^2| + \max\{x^3, x^4\}$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 + x$ für alle $x \in (-\infty, 0)$.
$\boxed{\text{B}}$ $f(x) = x^2 - x$ für alle $x \in [0, 1]$.
$\boxed{\text{C}}$ Die Funktion f ist in 0 nicht differenzierbar.
$\boxed{\text{D}}$ Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $O(0, 0)$ ist die erste Winkelhalbierende.

18. Gegeben sei die Menge

$$A := \{a \in \mathbb{R} \mid \text{die Funktion } f\colon [a, \infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = x^4 - 10x^2 + 2021 \text{ ist streng wachsend}\}.$$

Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ $A = \emptyset$. $\boxed{\text{B}}$ $[3, \infty) \subseteq A$. $\boxed{\text{C}}$ Die Menge A hat ein kleinstes Element. $\boxed{\text{D}}$ $2 \notin A$.

19. Die Menge gebildet aus den Werten des reellen Parameters a, für welche die Gleichung $x^2(1 - \ln x) = a$ zwei verschiedene reelle Lösungen hat, ist:

$\boxed{\text{A}}$ $(\sqrt{\mathrm{e}}, \mathrm{e})$; $\boxed{\text{B}}$ $\left(-\infty, \frac{\mathrm{e}}{2}\right)$; $\boxed{\text{C}}$ $\left(0, \frac{\mathrm{e}}{2}\right)$; $\boxed{\text{D}}$ $\left[0, \frac{\mathrm{e}}{2}\right]$.

20. Sind $\cos x = -\dfrac{7}{25}$ und $x \in \left(\dfrac{5\pi}{2}, 3\pi\right)$, dann ist:

$\boxed{\text{A}}$ $\cos\frac{x}{2} = \frac{3}{5}$; $\boxed{\text{B}}$ $\cos\frac{x}{2} = \frac{4}{5}$; $\boxed{\text{C}}$ $\cos\frac{x}{2} = -\frac{3}{5}$; $\boxed{\text{D}}$ $\cos\frac{x}{2} = -\frac{4}{5}$.

21. Mit den üblichen Bezeichnungen im Dreieck ABC, seien $a = 13$, $b = 1$ und $\mathrm{tg}\frac{C}{2} = \frac{2}{3}$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ $c = 4\sqrt{10}$. $\boxed{\text{B}}$ $c = 6\sqrt{5}$. $\boxed{\text{C}}$ $\sin C = \frac{12}{13}$. $\boxed{\text{D}}$ $\mathcal{F}\textit{läche}\textit{ninhalt}\,(ABC) = 6$.

22. Ist a ein Parameter und hat die Gleichung $\cos 2x + a\sin x - 2a + 7 = 0$ Lösungen, dann gelten:

$\boxed{\text{A}}$ $0 < a \le 5$;

$\boxed{\text{B}}$ $2 \le a \le 6$;

$\boxed{\text{C}}$ für $a = 5$ ist die Lösungsmenge $S = \left\{(-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$;

$\boxed{\text{D}}$ für $a = 5$ ist die Lösungsmenge $S = \left\{(-1)^k\frac{\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

23. Es sei $\alpha \ne 1$ eine Lösung der Gleichung $z^3 = 1$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ $|\alpha| = 1$. $\boxed{\text{B}}$ $1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} \notin \mathbb{R}$.
$\boxed{\text{C}}$ $\alpha^{2021} = -\alpha - 1$. $\boxed{\text{D}}$ Die Zahl $-\alpha$ ist Lösung der Gleichung $z^2 - z + 1 = 0$.

24. Im Ring $(\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot)$ hat die Gleichung $x^2 + \widehat{4}x + \widehat{3} = \widehat{0}$

$\boxed{\text{A}}$ keine Lösungen;
$\boxed{\text{B}}$ keine eindeutig bestimmte Lösung;
$\boxed{\text{C}}$ genau zwei verschiedene Lösungen;
$\boxed{\text{D}}$ genau vier verschiedene Lösungen.

25. Gegeben sei der Ausdruck

$$x * y = \frac{xy - 2}{x + y - 4}.$$

Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $*$ ist auf $\mathbb{R}$ eine Operation.
$\boxed{\text{B}}$ $*$ ist auf $(2, +\infty)$ eine Operation.
$\boxed{\text{C}}$ $3 * (3 * 3) = \frac{18}{5}$.
$\boxed{\text{D}}$ $x * 4 = x$, für alle $x > 3$.

26. Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sqrt{(1 - \cos x)(1 - \cos 2x)}\,\mathrm{d}x$ ist:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{4}{3}$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{2}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.

27. Es seien $f\colon (-1, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \mathrm{e}^x - 1 - \ln(1 + x)$, und $a, b \in (-1, \infty)$ mit $a < b$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ Die Funktion f hat eine einzige globale Minimalstelle.
$\boxed{\text{B}}$ Die Funktion f ist injektiv.
$\boxed{\text{C}}$ $\displaystyle\int_a^b (1 + \ln(1 + x))\mathrm{d}x < \int_a^b \mathrm{e}^x \mathrm{d}x$.
$\boxed{\text{D}}$ Die Funktion f hat wenigstens eine globale Maximalstelle.

28. Gegeben seien die Punkte $A(-6, 2)$, $B(4, -3)$, $M(\alpha, 0)$ und $N(0, \beta)$ im Koordinatensystem xOy. Nimmt die Summe $AM + MB + BN + NA$ den kleinsten Wert an, dann ist:

$\boxed{\text{A}}$ $MN = 0$; $\boxed{\text{B}}$ $MN = 1$; $\boxed{\text{C}}$ $MN = \sqrt{2}$; $\boxed{\text{D}}$ $MN = \sqrt{5}$.

29. Es sei $A = \{1, 2, \ldots, 99, 100\}$. Wie viele Summen gleich 5044 kann man mit den Elementen der Menge A bilden, wobei die Summen keine Wiederholungen der Elemente enthalten?

$\boxed{\text{A}}$ 3; $\boxed{\text{B}}$ 4; $\boxed{\text{C}}$ 5; $\boxed{\text{D}}$ 6.

30. Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ sei $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x^2}\,\mathrm{d}x$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{2n + 1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \dfrac{1}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \dfrac{1}{4}$.

BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

Richtige Antworten

AUFNAHMEPRÜFUNG 2021
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK
1. Variante

1. $\boxed{\textbf{C}}$
2. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
3. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
4. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$
5. $\boxed{\textbf{B}}$
6. $\boxed{\textbf{B}}$
7. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
8. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
9. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
10. $\boxed{\textbf{C}}$
11. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
12. $\boxed{\textbf{C}}$
13. $\boxed{\textbf{A}}$
14. $\boxed{\textbf{D}}$
15. $\boxed{\textbf{C}}$
16. $\boxed{\textbf{D}}$
17. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
18. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
19. $\boxed{\textbf{C}}$
20. $\boxed{\textbf{C}}$
21. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
22. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
23. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
24. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
25. $\boxed{\textbf{B}}$
26. $\boxed{\textbf{C}}$
27. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
28. $\boxed{\textbf{D}}$
29. $\boxed{\textbf{B}}$
30. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$