BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

MUSTER-THEMEN

MATHE-INFO UBB 2021 WETTBEWERB
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

WICHTIG ZU BEACHTEN: Jede Ankreuzaufgabe hat eine oder mehrere richtige Antworten, die vom Kandidaten auf dem dafür vorgesehenen Formular vom Prüfungsblatt angegeben werden müssen. Die Bewertung der Ankreuzaufgaben erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung vorgesehenen Benotungssystem.

1. Gegeben sei in $\mathbb{R}$ die Gleichung

$$2^{x^2+x+\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2} = 0\,.$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung ist

[A] $S = \{1\}$. [B] $S = \{1, 2\}$. [C] $S = \{2\}$. [D] $S = \{-2, 1\}$.

2. Damit es wenigstens eine von der Nullmatrix verschiedene Matrix $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ gibt, so dass

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ist es notwendig und hinreichend, dass

[A] $a \in \mathbb{R}^*$ ist. [B] $a = 0$ ist. [C] $a \in \{-3, 2\}$ ist. [D] $a \in \{-1, 1\}$ ist.

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^2 + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

[A] Für alle $x \in \mathbb{R}$ gibt es $y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$.
[B] Für alle $y \in \mathbb{R}$ gibt es $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = y$.
[C] Falls $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1 \neq x_2$, dann ist $f(x_1) \neq f(x_2)$.
[D] Falls $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $x_1 = x_2$, dann ist $f(x_1) = f(x_2)$.

4. Ist $\alpha \in \mathbb{C}$, so dass $\alpha^3 = 1$, dann beträgt der Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$

[A] 1, weil $\alpha^3 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$. [B] 2, weil die Determinante der Matrix 0 ist.
[C] 1. [D] 1 oder 2, abhängig von α.

5. Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine arithmetische Folge. Sind $a_{101} = 695$ und $a_{1001} = 6995$, entscheide man, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

[A] $a_1 \in [-6, 6]$. [B] $a_1 = 5$. [C] $a_{2021} = 14135$. [D] $\sum_{k=11}^{20} a_k = 965$.

6. Gegeben seien die Funktionen $f_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2+2(m+1)x+m-2, \forall x \in \mathbb{R}$, wobei $m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ ist. Die Scheitelpunkte aller Parabeln, die zu diesen Funktionen gehören, liegen auf

$\boxed{\text{A}}$ der Geraden $y = -x+3$.
$\boxed{\text{B}}$ der Parabel $y = x^2 - 3$.
$\boxed{\text{C}}$ der Geraden $y = x - 3$.
$\boxed{\text{D}}$ der Geraden $y = 4x + 2$.

7. Gegeben sei das Polynom $P = X^4+aX^3-6X^2+15X+b \in \mathbb{R}[X]$. Ist P durch die Polynome $Q_1 = X-1$ und $Q_2 = X+3$, teilbar, dann ist

$\boxed{\text{A}}$ $a = -3$.
$\boxed{\text{B}}$ $b = -9$.
$\boxed{\text{C}}$ $a + b = -10$.
$\boxed{\text{D}}$ $a = 1$ und $b = 9$.

8. Die Funktionen $f\colon \mathbb{R} \to (0,\infty)$ und $g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ seien durch $f(x) = (2a^2+2a+1)^x, \forall x \in \mathbb{R}$, und $g(y) = \log_{a^2+4} y, \forall y \in (0,\infty)$, definiert. Es sei A die Menge der Zahlen $a \in \mathbb{R}$, für die f und g Umkehrfunktionen zueinander sind. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $A \subseteq [-1,4]$.
$\boxed{\text{B}}$ $A \subseteq [-4,1]$.
$\boxed{\text{C}}$ $A \subseteq [-2,3]$.
$\boxed{\text{D}}$ $A \subseteq [-3,2]$.

9. Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen wird die Operation „$*$“ durch

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20$$

definiert. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ $(1*1)*1 = 3$.
$\boxed{\text{B}}$ 4 ist das neutrale Element der Operation „$*$“.
$\boxed{\text{C}}$ Das symmetrische Element von 3 ist 3.
$\boxed{\text{D}}$ $(\mathbb{R}, *)$ ist eine Gruppe.

10. Es seien $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$ und B die Menge aller dreistelligen Zahlen, die aus verschiedenen Ziffern der Menge A gebildet werden. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ B hat 240 Elemente.
$\boxed{\text{B}}$ B hat 210 Elemente.
$\boxed{\text{C}}$ B hat 180 Elemente.
$\boxed{\text{D}}$ Genau 35 Elemente von B haben die Ziffern in fallender Reihenfolge angeordnet.

11. Haben die Eckpunkte des Dreiecks ABC die Koordinaten $A(2,3)$, $B(-1,1)$, $C(-3,4)$, dann

$\boxed{\text{A}}$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich $\frac{13}{2}$.
$\boxed{\text{B}}$ ist das Dreieck ABC rechtwinklig.
$\boxed{\text{C}}$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.
$\boxed{\text{D}}$ liegt der Punkt C auf der Geraden AB.

12. Gegeben seien die Punkte $A(-2,3)$ und $B(0,1)$ im kartesischen Koordinatensystem xOy. Die Entfernung des Punktes $M(1,5)$ zur Mittelsenkrechten der Strecke $[AB]$ beträgt

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
$\boxed{\text{B}}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
$\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{\sqrt{2}}$.
$\boxed{\text{D}}$ einen von den vorhin erwähnten Zahlen verschiedenen Wert.

13. Gegeben sei das Dreieck ABC in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Eckpunkte des Dreiecks haben die Koordinaten $A(1,1)$, $B(9,1)$, $C(1,5)$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ Das Dreieck ABC ist rechtwinklig mit $m(\widehat{A}) = 90°$.
$\boxed{\text{B}}$ $H = A(1,1)$ ist das Orthozentrum, $G\left(\frac{11}{3}, \frac{7}{3}\right)$ der Schwerpunkt und $O(5,3)$ der Mittelpunkt des Umkreises des Dreiecks ABC.
$\boxed{\text{C}}$ Die Punkte G, H, O sind nicht kollinear.
$\boxed{\text{D}}$ Der Schwerpunkt G ist von den Seiten $[AB]$ und $[AC]$ des Dreiecks ABC gleich weit entfernt.

14. Die Gleichung $4 \cdot |\sin(x)| \cdot \cos(x) = 1$ hat im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\boxed{\text{A}}$ keine Lösung.
$\boxed{\text{B}}$ zwei Lösungen.
$\boxed{\text{C}}$ vier Lösungen.
$\boxed{\text{D}}$ unendlich viele Lösungen.

15. Es seien $2, 3, 4$ die Längen von drei Strecken a, b, c. Dann gelten die folgenden Aussagen.

$\boxed{\text{A}}$ a, b, c können ein spitzwinkliges Dreieck bilden.
$\boxed{\text{B}}$ a, b, c können ein stumpfwinkliges Dreieck bilden.
$\boxed{\text{C}}$ a, b, c können ein gleichseitiges Dreieck bilden.
$\boxed{\text{D}}$ a, b, c können ein Dreieck bilden.

16. Gegeben seien die Vektoren $\vec{u} = (m-1)\vec{a} + 2\vec{b}$ und $\vec{v} = 3\vec{a} + m\vec{b}$, wobei die Vektoren $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ nicht kollinear sind. Wie viele Werte kann der Parameter $m \in \mathbb{R}$ annehmen, so dass $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear sind?

A 0. B 1. C 2. D 3.

17. Es sei ABC ein in A rechtwinkliges Dreieck. Sind $AB = 2c$, $BC = 2a$, $AC = 2b$ sowie R und r der Radius des umschriebenen bzw. des eingeschriebenen Kreises des gegebenen Dreiecks, dann ist

A $\mathcal{F}l(\Delta ABC) = 2bc$. B $R = \frac{a}{2}$. C $AB + AC = 2(R + r)$. D $r = \frac{2bc}{a+b+c}$.

18. Sind A, B, C, M verschiedene Punkte in einer Ebene, so dass

$$6\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC},$$

gilt, dann sind

A B, C, M kollinear. B B, C, M nicht kollinear.
C $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$. D $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$.

19. Gegeben seien die Punkte $A(1, -1)$, $B(3, -1)$, $A'(-4, -2)$ und $B'(0, -2)$. Die Punkte C und C' liegen auf der Parabel $\mathcal{P}$ mit der Gleichung $y = x^2$. Es seien α der Flächeninhalt des Dreiecks ABC und α' jener des Dreiecks $A'B'C'$.

A Es gibt einen Punkt P auf der Parabel $\mathcal{P}$, so dass $C = C' = P$ und $\alpha = \alpha'$ ist.
B Es gibt einen einzigen Punkt C, so dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.
C Es gibt mindestens einen Punkt C mit ganzzahligen Koordinaten, so dass α eine Primzahl ist.
D Es gibt mindestens einen Punkt C', so dass die Länge der Seite $A'C'$ gleich $3\sqrt{2}$ ist.

20. Gegeben seien $d : x - y = 1$ die Gleichung einer Geraden sowie die Punkte $A(-1, 0)$ und $B(1, 2)$. Für jeden Punkt $M \in d$ sei s_M die Summe der Längen der Strecken $[AM]$ und $[BM]$. Dann ist

A $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + 2$. B $\forall M \in d : s_M \leq \sqrt{2} + 4$.
C $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + \sqrt{10}$. D $\exists M \in d$ mit $s_M = \sqrt{2} + 2$.

21. Der Grenzwert der Folge $a_n = n\left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\right), \forall n \geq 1$, ist

A 4. B $\frac{1}{4}$. C 0. D $+\infty$.

22. Für $n \in \mathbb{N}^*$ sei $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ist streng wachsend. B $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.
C $a_{2021} \leq \frac{1}{2021}$. D $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

23. Der Wert des Integrals $I = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{x + \sin x} dx$ beträgt:

A $\frac{\ln 2}{2}$. B $\frac{1}{2}$. C $\ln 2$. D $\frac{\ln 3}{3}$.

24. Es sei A die Menge der reellen Zahlen a, für welche die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(x + a), \forall x \in \mathbb{R}$, genau zwei Extremstellen hat. Dann ist

A $A = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, +\infty)$. B $A = (-\frac{3}{2}, 0)$. C $A = \emptyset$. D $A = \mathbb{R}^*$.

25. Es sei $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 2, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

definierte Funktion. Dann gelten die folgenden Aussagen.

A Die Funktion $|f|$ ist stetig in 0.
B Die Funktion f hat mindestens eine Nullstelle im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, weil $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$ ist.
C Die Funktion f hat keine Nullstelle im Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
D Die Funktion f hat keinen Grenzwert in 0.

26. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 2^{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

A $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x) = 0$.

B Die Funktion f ist auf dem Intervall $[1, \infty)$ streng wachsend.

C Die Ungleichung $f'(x) \geq xf(x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

D $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{(2x+1)f(x)} = 1$.

27. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, deren Schaubild waagerechte Asymptoten sowohl nach ∞ als auch nach $-\infty$ hat. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

B Die Funktion f ist beschränkt.

C Das Schaubild der Funktion f schneidet jede waagerechte Gerade in mindestens einem Punkt.

D Die Gleichung $f(x) = x^{2021}$ hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{R}$.

28. Es sei I der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

A $I = \dfrac{1}{4} + \ln 2$.

B $I \in \mathbb{Q}$.

C $0 < I < \ln 2$.

D $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2} < I < \dfrac{1}{2}\ln 2$.

29. Es sei A die Menge der reellen Zahlen a, für welche die Gleichung $\sqrt{3-x} - x = a$ mindestens eine reelle Lösung hat. Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

A $(-\infty, -10) \subset A$.

B $\{-10, -9, -8\} \subset A$.

C $\{-3, -2, -1, 0\} \subset A$.

D $\{8, 9, 10\} \subset A$.

30. Der Wert des Integrals

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 + \sin^2 x}\mathrm{d}x$$

beträgt

A 0.

B $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$.

C $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - 1$.

D 1.

Antworten

1. $\boxed{\textbf{D}}$
2. $\boxed{\textbf{D}}$
3. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
4. $\boxed{\textbf{C}}$
5. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
6. $\boxed{\textbf{C}}$
7. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
8. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
9. $\boxed{\textbf{C}}$
10. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$.
11. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
12. $\boxed{\textbf{A}}$
13. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$
14. $\boxed{\textbf{C}}$
15. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
16. $\boxed{\textbf{C}}$
17. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
18. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$
19. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
20. $\boxed{\textbf{A}}$
21. $\boxed{\textbf{D}}$
22. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
23. $\boxed{\textbf{A}}$
24. $\boxed{\textbf{A}}$
25. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
26. $\boxed{\textbf{B}}$
27. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
28. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
29. $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$
30. $\boxed{\textbf{B}}$