

MATE-INFO UBB verseny – 2021-es MODEL
MATEMATIKA írásbeli próba
MEGOLDÁSOK

1. Az $\mathbb{R}$ halmazon adott a

$$2^{x^2+x+\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2} = 0.$$

egyenlet megoldásainak halmaza:

- ☐ A $S = \{1\}$; ☐ B $S = \{1, 2\}$; ☐ C $S = \{2\}$; ☐ D $S = \{-2, 1\}$.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B hamis; ☐ C hamis; ☐ D igaz.

Megoldás: A feladatban szereplő egyenletet átírjuk

$$2^{x^2+x+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}}$$

alakba, amely egyenértékű az $x^2 + x - 2 = 0$ egyenlettel. Ezutóbbi egyenlet megoldásai $x_1 = -2$ és $x_2 = 1$, következésképpen a helyes válasz $S = \{-2, 1\}$.

2. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen legalább egy olyan $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix, amelyre

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a következő:

- ☐ A $a \in \mathbb{R}^*$; ☐ B $a = 0$; ☐ C $a \in \{-3, 2\}$; ☐ D $a \in \{-1, 1\}$.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B hamis; ☐ C hamis; ☐ D igaz.

Megoldás: Legyenek $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ és $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.

Ha $\det A \neq 0$, akkor az A mátrix invertálható és az $AX = O_2$ egyenletnek $X = O_2$ az egyetlen megoldása.

Ha $\det A = 0$, akkor $AX = O_2$ egyenlet a következő két mátrix egyenlethez vezet

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ és } \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ez a két mátrix egyenlet két homogén határozatlan és kompatibilis lineáris egyenletrendszerhez vezet, amelyeknek vannak nem nulla megoldásai. Ezekből a nem nulla megoldásokból alkothatjuk az X oszlopait és így megkaphatjuk a feladatban szereplő egyenletnek egy $X \neq O_2$ megoldását.

Ezek alapján a feladatban megadott egyenletnek pontosan akkor létezik $X \neq O_2$ megoldása, ha $\det A = 0$, vagyis $1 - a^2 = 0$, ahonnan $a \in \{-1, 1\}$.

3. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = x^2 + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ képlettel értelmezzük. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐ A Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik $y \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = y$.
☐ B Minden $y \in \mathbb{R}$ esetén létezik $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = y$.
☐ C Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$.
☐ D Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 = x_2$, akkor $f(x_1) = f(x_2)$.

Válasz:

- ☐ A igaz; ☐ B hamis; ☐ C hamis; ☐ D igaz.

Megoldás: ☐ A Ez a tulajdonság igaz minden függvény esetén, mivel definíció szerint a függvények az értelmezési tartomány minden elemének egyértelműen megfeleltetnek egy elemet az értékkészletből. A mi esetünkben az f függvény az $x \in \mathbb{R}$ elemnek megfelelteti az $y = x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}$ értéket.

☐ B Az $\mathbb{R}$ -en értelmezett és $\mathbb{R}$ értékkészletű másodfokú függvény nem szürjektív. (Ez egyszerűen úgy is látható, hogy $f(x) = x^2 + x + 1$ nem vesz fel negatív értékeket).

☐ C Az $\mathbb{R}$ -en értelmezett és $\mathbb{R}$ értékkészletű másodfokú függvény nem injektív (például, $0 \neq -1$, de $f(0) = 1 = f(-1)$).

☐ D Ez az állítás igaz minden függvény esetén, mivel az értelmezési tartomány minden elemének (esetünkben $x_1 = x_2$ -nek) megfeleltet egyetlen egy elemet az értékkészletből (nevezetesen $f(x_1) = f(x_2)$ -et).

4. Ha $\alpha \in \mathbb{C}$ és $\alpha^3 = 1$, akkor az $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ mátrix rangja:

- ☐ A 1, mivel $\alpha^3 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$; ☐ B 2, mivel a mátrix determinánsa 0;
☐ C 1; ☐ D 1 vagy 2, az α értékétől függően.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B hamis; ☐ C igaz; ☐ D hamis.

Megoldás: Jelöljük A -val a feladatban szereplő mátrixot. Mivel

$$\alpha^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ vagy } \alpha^2 + \alpha + 1 = 0,$$

ezért a fenti egyenletnek három különböző komplex gyöke van. Ez a három gyök az 1 és az $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ másodfokú egyenlet két komplex (nem valós) gyöke. Ezek a harmadrendű egységgyökök.

Mivel A -nak van nem nulla együtthatója, így $\text{rang } A \geq 1$, továbbá

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

ezért $\text{rang } A = 1$ minden harmadrendű egységgyök esetén. Tehát a helyes válasz a ☐ C.

- ☐ A hamis, mivel nem veszi figyelembe az $\alpha^3 = 1$ egyenlet $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ -beli gyökeit.
☐ B hamis, mivel $\text{rang } A \neq 2$ (még akkor is, ha $\det A = 0$).
☐ D hamis, mivel az α értékétől függetlenül a $\text{rang } A = 1$.

5. Legyen $(a_n)_{n \geq 1}$ egy valós számokból álló számtani haladvány. Ha $a_{101} = 695$ és $a_{1001} = 6995$, akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐ A $a_1 \in [-6, 6]$. ☐ B $a_1 = 5$. ☐ C $a_{2021} = 14135$. ☐ D $\sum_{k=11}^{20} a_k = 965$.

Válasz:

☐ A igaz; ☐ B hamis; ☐ C igaz; ☐ D igaz.

Megoldás: Használjuk a számtani haladvány általános tagjára vonatkozó képletet az a_1 első tag és az r állandó különbség függvényében. Ez alapján felírhatjuk a következő egyenletrendszert

$$\begin{cases} a_1 + 100r = 695 \\ a_1 + 1000r = 6995 \end{cases}, \text{ ahonnan } a_1 = -5 \text{ és } r = 7.$$

Tehát az ☐ A igaz és a ☐ B hamis.

A ☐ C igaz, mivel $a_{2021} = a_1 + 2020r = 14135$.

Végül

$$\begin{aligned} \sum_{k=11}^{20} a_k &= S_{20} - S_{10} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} - \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \\ &= [-5 + (-5 + 19 \cdot 7)] \cdot 10 - [-5 + (-5 + 9 \cdot 7)] \cdot 5 = 1230 - 265 = 965, \end{aligned}$$

tehát a ☐ D is igaz.

6. Adottak az $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ függvények, ahol $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ezen függvényekhez rendelt parabolák csúcsai a következő görbéken helyezkednek el:

☐ A az $y = -x + 3$ egyenesen; ☐ B az $y = x^2 - 3$ parabolán;
☐ C az $y = x - 3$ egyenesen; ☐ D az $y = 4x + 2$ egyenesen.

Válasz:

☐ A hamis; ☐ B hamis; ☐ C igaz; ☐ D hamis.

Megoldás: A $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$) másodfokú függvényhez rendelt parabola csúcsa $V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Rögzítjük az $m \in \mathbb{R}^*$ számot. Az f_m függvényre

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4m(m-2) = 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 8m = 16m + 4.$$

Tehát az f_m -hez rendelt parabola csúcsának abszcisszája

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{m+1}{m} \quad (6.1)$$

és az ordinátája

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16m+4}{4m} = -\frac{4m+1}{m}. \quad (6.2)$$

Mivel $4m+1 = (m+1) + 3m$, ezért írhatjuk, hogy

$$y_V = -\frac{m+1}{m} - 3 = x_V - 3.$$

Tehát az f_m másodfokú függvényekhez rendelt parabolák csúcsai az $y = x - 3$ egyenesen találhatók, így a helyes válasz a ☐ C.

A következőképpen is eljárhatunk: a (6.1) összefüggés átírható

$$mx_V = -m - 1$$

alakba. Innen látható, hogy az f_m másodfokú függvényekhez rendelt parabolák csúcsai közül egyiknek sem lehet az abszcisszája $x_V = -1$, így kapjuk, hogy

$$m = -\frac{1}{x_V + 1}.$$

Ezt behelyettesítve a (6.2) összefüggésbe kapjuk, hogy $y_V = x_V - 3$.

7. Adott a $P = X^4 + aX^3 - 6X^2 + 15X + b \in \mathbb{R}[X]$ polinom. Ha P osztható a $Q_1 = X - 1$ és $Q_2 = X + 3$ polinomokkal, akkor:

- ☐ A $a = -3$; ☐ B $b = -9$; ☐ C $a + b = -10$; ☐ D $a = 1$ és $b = 9$.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B igaz; ☐ C igaz; ☐ D hamis.

Megoldás: A $Q_1 \mid P$ relációból adódik, hogy $P(1) = 0$, vagyis

$$1 + a - 6 + 15 + b = 0 \Leftrightarrow a + b = -10,$$

amely pontosan a ☐ C-ben lévő összefüggés. A $Q_2 \mid P$ relációból adódik, hogy $P(-3) = 0$, vagyis

$$81 - 27a - 54 - 45 + b = 0 \Leftrightarrow -27a + b = 18.$$

A fenti két összefüggésből alkotható az

$$\begin{cases} a + b = -10 \\ 27a - b = -18 \end{cases}$$

egyenletrendszer, amelynek egyetlen megoldása az $(a, b) = (-1, -9)$. Tehát a ☐ B is igaz, illetve az ☐ A és ☐ D hamisak.

8. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = (2a^2 + 2a + 1)^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ és $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \log_{a^2+4} y$, $\forall y \in (0, \infty)$ függvényeket. Legyen A azon $a \in \mathbb{R}$ számok halmaza, amelyekre az f és g függvények egymás inverzei. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐ A $A \subseteq [-1, 4]$. ☐ B $A \subseteq [-4, 1]$. ☐ C $A \subseteq [-2, 3]$. ☐ D $A \subseteq [-3, 2]$.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B igaz; ☐ C hamis; ☐ D igaz.

Megoldás: Észrevehető, hogy minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $2a^2 + 2a - 1 = a^2 + (a + 1)^2 > 0$ és $a^2 + 4 \geq 4$ (az utóbbi pozitív és nem egyenlő 1-gyel). Ha az f és g függvények egymás inverzei, akkor

$$f \circ g = 1_{(0, \infty)} \text{ és } g \circ f = 1_{\mathbb{R}}.$$

A baloldali egyenlőség alapján $f(g(a^2 + 4)) = a^2 + 4$, vagyis $f(1) = a^2 + 4$, így $2a^2 + 2a + 1 = a^2 + 4$. Innen kapjuk az $a^2 + 2a - 3 = 0$ egyenletet, amelynek megoldásai $a_1 = -3$ és $a_2 = 1$. Ezekre az értékekre ellenőrizhető, hogy az f és g függvények egymás inverzei. Tehát a ☐ B és ☐ D igazak, illetve az ☐ A és ☐ C hamisak.

9. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán bevezetjük a következő „ $*$ ” műveletet

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20.$$

A következő állítások közül melyek igazak?

- ☐ A $(1 * 1) * 1 = 3$. ☐ B A „ $*$ ” művelet semleges eleme a 4.
☐ C A 3 inverze a „ $*$ ” műveletre nézve a 3. ☐ D $(\mathbb{R}, *)$ egy csoport.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B hamis; ☐ C igaz; ☐ D hamis.

Megoldás: $(1 * 1) * 1 = -23$, tehát ☐ A hamis.

A következő átalakításokat végezzük

$$x * e = x \Leftrightarrow x(e - 5) - 4e + 20 = 0 \Leftrightarrow x(e - 5) - 4(e - 5) = 0 \Leftrightarrow (e - 5)(x - 4) = 0.$$

Ez alapján minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x * e = x$ pontosan akkor teljesül, ha $e = 5$. Tehát a semleges elem (amely egyértelmű) egyenlő 5-tel, ezért a ☐ B hamis.

Rögzítünk egy tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ számot. A következő átalakításokat végezzük

$$x * x' = e \Leftrightarrow xx' - 4x - 4x' + 20 = 5 \Leftrightarrow xx' - 4x - 4x' + 16 = 1 \Leftrightarrow (x - 4)(x' - 4) = 1.$$

Ennek az egyenletnek (melynek x' az ismeretlene) pontosan akkor van megoldása, ha $x \neq 4$. Ebben az esetben $x' = \frac{1}{x - 4} + 4$ egyértelmű megoldás. Tehát a ☐ D hamis, mivel az $x = 4$ elemnek nincs inverze a „ $*$ ” műveletre nézve.

Végül $x = 3$ esetén kapjuk, hogy az inverze a „ $*$ ” műveletre nézve $x' = \frac{1}{3 - 4} + 4 = 3$. Tehát a ☐ C igaz.

10. Adott az $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz és legyen a B halmaz különböző A -beli elemek felhasználásával alkotott háromjegyű számok halmaza. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ A B halmaznak 240 eleme van;

☐ B B halmaznak 210 eleme van;

☐ C B halmaznak 180 eleme van;

☐ D B halmaz pontosan 35 elemében szerepelnek a számjegyek csökkenő sorrendben.

Válasz:

☐ A hamis;

☐ B hamis;

☐ C igaz;

☐ D igaz.

Megoldás: A B halmaz elemeinek száma megegyezik az (a, b, c) számhármások számával, ahol $a, b, c \in A$ és $a \neq b \neq c \neq a \neq 0$. Azon (a, b, c) számhármások száma, ahol $a, b, c \in A$ és $a \neq b \neq c \neq a$, megegyezik az A halmaz elemeiből alkotott 3 elemű rendezett részhalmazok számával (az A halmaz 3-ad osztályú variációinak számával), vagyis $A_7^3 = 210$ -zel (mivel az A halmaz 7 elemű). Azon $(0, b, c)$ számhármások száma, ahol $b, c \in A \setminus \{0\}$ és $b \neq c$, egyenlő $A_6^2 = 30$ -cal. Tehát a B halmaz elemeinek száma

$$210 - 30 = 180.$$

Végül az utolsó állításhoz meg kell számoljuk azokat az (a, b, c) számhármásokat, amelyekre $a, b, c \in A$ és $a > b > c$. Nyilvánvalóan ekkor $a \neq 0$, így az ilyen számhármások száma megegyezik az A halmaz 3 elemű részhalmazainak számával (a 3 elemű részhalmazokat csökkenő sorrendbe rendezve kapjuk meg a keresett számhármásokat). Így adódik, hogy a csökkenő sorrendű számhármások száma

$$C_7^3 = 35.$$

Tehát ☐ A és ☐ B hamisak, míg ☐ C és ☐ D igazak.

11. Ha az ABC háromszög csúcsai $A(2, 3)$, $B(-1, 1)$, $C(-3, 4)$, akkor

☐ A az ABC háromszög területe $\frac{13}{2}$;

☐ B az ABC háromszög derékszögű;

☐ C az ABC háromszög egyenlő szárú;

☐ D a C pont az AB egyenesen található.

Válasz:

☐ A igaz;

☐ B igaz;

☐ C igaz;

☐ D hamis.

Megoldás: Felírjuk, hogy $\overrightarrow{BA}(3, 2)$ és $\overrightarrow{BC}(-2, 3)$, ahonnan $\|\overrightarrow{BA}\| = \sqrt{13}$ és $\|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{13}$. Ezek alapján az ABC háromszög egyenlő szárú. Továbbá $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, ahonnan $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$, így az ABC háromszög derékszögű ($m(\hat{B}) = 90^\circ$). Tehát ☐B és ☐C igazak.

Az ABC háromszög területe $T_{ABC\Delta} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{13}{2} \neq 0$, ezért a háromszög nem elfajuló, vagyis $C \notin AB$. Tehát ☐A igaz és ☐D hamis.

12. Az xOy koordináta-rendszerben tekintjük az $A(-2, 3)$ és $B(0, 1)$ pontokat. Az $M(1, 5)$ pont távolsága az $[AB]$ szakasz oldalfelező merőlegesétől

☐A $\frac{1}{\sqrt{2}}$; ☐B $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; ☐C $\frac{3}{\sqrt{2}}$; ☐D egyik sem.

Válasz:

☐A **igaz**; ☐B **hamis**; ☐C **hamis**; ☐D **hamis**.

Megoldás: Az $[AB]$ szakasz felezőpontja $C(-1, 2)$. Az $[AB]$ szakasz iránytényezője -1 , ezért az oldalfelező merőlegesének az iránytényezője 1 . Ezek alapján felírható az $[AB]$ szakasz d oldalfelező merőlegesének egyenlete $y - 2 = 1 \cdot (x + 1) \Leftrightarrow x - y + 3 = 0$. Végül az M pont távolsága a d egyenestől

$$d(M, d) = \frac{|1 - 5 + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tehát ☐A a helyes válasz.

13. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái a síkjának egy ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszerében $A(1, 1)$, $B(9, 1)$, $C(1, 5)$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐A Az ABC háromszög derékszögű és $m(\hat{A}) = 90^\circ$.
☐B Az ABC háromszög ortocentruma $H = A(1, 1)$, súlypontja $G(\frac{11}{3}, \frac{7}{3})$ és körülírt körének középpontja $O(5, 3)$.
☐C A G, H, O pontok nem kollineárisak.
☐D A G súlypont egyenlő távolságra van az ABC háromszög $[AB]$ és $[AC]$ oldalaitól.

Válasz:

☐A **igaz**; ☐B **igaz**; ☐C **hamis**; ☐D **hamis**.

Megoldás: ☐A Igaz. Valóban, a háromszög AB és AC oldalai merőlegesek egymásra, mivel $\overrightarrow{AB}(8, 0)$ és $\overrightarrow{AC}(0, 4)$ alapján az AB és AC oldalak párhuzamosak a koordinátatengelyekkel.

☐B Igaz. Valóban, egy derékszögű háromszög ortocentruma megegyezik a derékszögű csúccsal, tehát $H = A$. A súlypont koordinátái az háromszög csúcsai koordinátáinak számtani közepe, tehát $G(\frac{11}{3}, \frac{7}{3})$. Egy derékszögű háromszög körülírt körének középpontja az átfogó felezőpontja, mivel ott találkoznak a háromszög oldalfelező merőlegesei. Tehát a $[BC]$ szakasz felezőpontja $O(5, 3)$ a körülírt kör középpontja.

☐C Hamis. A G, H, O pontok kollineárisak minden háromszög esetén és az általuk meghatározott egyenes az Euler-egyenes. Ezen feladat esetén akár direkt módon is ellenőrizhető a kollinearitás.

$$\overrightarrow{HG}\left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ és } \overrightarrow{HO}(4, 2),$$

ahonnan

$$\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{HO}. \quad (13.1)$$

Megjegyezzük, hogy a (13.1) összefüggés teljesül minden háromszög esetén.

☐D Hamis. Valóban, a G súlypont távolsága az AB és AC egyenesektől

$$d(G, AB) = \frac{4}{3} \neq \frac{8}{3} = d(G, AC).$$

14. A $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon a $4 \cdot |\sin(x)| \cdot \cos(x) = 1$ egyenletnek

- ☐ A nincs megoldása; ☐ B két megoldása van;
☐ C négy megoldása van; ☐ D végtelen sok megoldása van.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B hamis; ☐ C igaz; ☐ D hamis.

Megoldás: Minden $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ esetén $|\sin(x)| \cdot \cos(x) \geq 0$. Így a következő egyenértékű átalakításokat végezzük:

$$\begin{aligned} 4 \cdot |\sin(x)| \cdot \cos(x) = 1 &\Leftrightarrow (4 \cdot |\sin(x)| \cdot \cos(x))^2 = 1 \Leftrightarrow 16 \sin^2(x) \cos^2(x) = 1 \\ &\Leftrightarrow 4 \sin^2(2x) = 1 \Leftrightarrow 2(1 - \cos(4x)) = 1 \Leftrightarrow \cos(4x) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Tehát a megadott egyenletnek a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon négy megoldása van, éspedig $-\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$.

15. Ha az a, b, c szakaszok rendre 2, 3, 4 hosszúságúak, akkor:

- ☐ A az a, b, c szakaszokkal hegyesszögű háromszög szerkeszthető;
☐ B az a, b, c szakaszokkal tompaszögű háromszög szerkeszthető;
☐ C az a, b, c szakaszokkal egyenlő oldalú háromszög szerkeszthető;
☐ D az a, b, c szakaszokkal háromszög szerkeszthető.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B igaz; ☐ C hamis; ☐ D igaz.

Megoldás: Az $2 + 3 > 4$, $3 + 4 > 2$, $4 + 2 > 3$ egyenlőtlenségek alapján létezik egy nem elfajult ABC háromszög úgy, hogy $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$. A koszinusztétel alapján

$$\cos C = \frac{2^2 + 3^2 - 4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Tehát $m(\widehat{C}) > 90^\circ$, ezért az ABC háromszög tompaszögű.

16. Tekintjük az $\vec{u} = (m-1)\vec{a} + 2\vec{b}$ és $\vec{v} = 3\vec{a} + m\vec{b}$ vektorokat, ahol az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok nem kollineárisak. Hány olyan értéke van az $m \in \mathbb{R}$ paraméternek, amelyre az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok kollineárisak?

- ☐ A 0; ☐ B 1; ☐ C 2; ☐ D 3.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B hamis; ☐ C igaz; ☐ D hamis.

Megoldás: Az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok kollineárisak, ha létezik $k \in \mathbb{R}^*$ úgy, hogy

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v} \Leftrightarrow (m-1)\vec{a} + 2\vec{b} = k \cdot (3\vec{a} + m\vec{b}) \Leftrightarrow (m-1-3k)\vec{a} = (mk-2)\vec{b}.$$

Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok nem kollineárisak, ezért

$$\begin{cases} m-1-3k=0 \\ km-2=0 \end{cases}.$$

Tehát $m = 3k + 1$ és $k \cdot (3k + 1) = 2$. Ennek az egyenletnek a megoldásai $k_1 = -1$, $k_2 = \frac{2}{3}$, ahonnan $m_1 = -2$ és $m_2 = 3$. Tehát m -nek két értéke van, amelyekre $\vec{u}$ és $\vec{v}$ kollineárisak.

17. Legyen ABC az A csúcsban derékszögű háromszög. Ha $AB = 2c$, $BC = 2a$, $AC = 2b$, illetve R a körülírt kör és r a beírt kör sugara, akkor

- ☐ A $T_{ABC\Delta} = 2bc$; ☐ B $R = \frac{a}{2}$;
☐ C $AB + AC = 2(R + r)$; ☐ D $r = \frac{2bc}{a+b+c}$.

Válasz:

- ☐ A igaz; ☐ B hamis; ☐ C igaz; ☐ D igaz.

Megoldás: Ha ABC háromszög az A szögben derékszögű és $AB = 2c$, $BC = 2a$, $AC = 2b$, akkor

- a háromszög területe $T_{ABC\Delta} = \frac{AB \cdot AC}{2} = 2bc$;
- a háromszög köréírt kör középpontja az átfogó felezőpontja, ezért $R = \frac{BC}{2} = a$;
- $r = \frac{T_{ABC\Delta}}{p} = \frac{2bc}{a+b+c}$, ahol $p = a + b + c$ a háromszög félkerülete.

Észrevehetjük, hogy

$$\begin{aligned} 2(R + r) &= 2 \left(a + \frac{2bc}{a+b+c} \right) = 2 \frac{a^2 + ab + ac + 2bc}{a+b+c} = 2 \frac{(b^2 + c^2) + ab + ac + 2bc}{a+b+c} \\ &= 2 \frac{(b^2 + c^2 + 2bc) + ab + ac}{a+b+c} = 2 \frac{(b+c)^2 + a(b+c)}{a+b+c} = 2 \frac{(b+c)(a+b+c)}{a+b+c} \\ &= 2b + 2c = AB + AC. \end{aligned}$$

18. Ha A, B, C, M a sík különböző pontjai úgy, hogy

$$6\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC},$$

akkor

- ☐ A a B, C, M pontok kollineárisak; ☐ B a B, C, M pontok nem kollineárisak;
☐ C $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$; ☐ D $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$.

Válasz:

- ☐ A igaz; ☐ B hamis; ☐ C igaz; ☐ D hamis.

Megoldás:

$$\begin{aligned} 6\overrightarrow{AM} &= 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC} \implies 6(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC} \\ \implies 6\overrightarrow{BM} &= -3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BC} \implies \overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BM}, \end{aligned}$$

ezért a B, C, M pontok kollineárisak és $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = -3|\overrightarrow{BM}|^2 < 0$.

19. Adottak az $A(1, -1)$, $B(3, -1)$, $A'(-4, -2)$ és $B'(0, -2)$ pontok. A C és C' pontok az $y = x^2$ egyenletű $\mathcal{P}$ parabolán találhatók. Jelöljük α -val az ABC háromszög és α' -vel az $A'B'C'$ háromszög területét.

- ☐ A Létezik egy P pont a $\mathcal{P}$ parabolán úgy, hogy $C = C' = P$ és $\alpha = \alpha'$.
☐ B Létezik egyetlen C pont, amelyre az ABC háromszög derékszögű.
☐ C Létezik legalább egy olyan egész koordinátájú C pont, amelyre az α prím szám.
☐ D Létezik legalább egy olyan C' pont, amelyre az $A'C'$ oldal hossza $3\sqrt{2}$.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B hamis; ☐ C igaz; ☐ D igaz.

Megoldás: ☐ B hamis, mivel az A és B szögek is lehetnek derékszögek és ezekben a pontokba az AB -re merőleges egyenesek két különböző pontban metszik a parabolát.

A $C = C(x, x^2)$ és $C' = C'(y, y^2)$ pontok rajta vannak a $\mathcal{P}$ parabolán és ezekre a pontokra

$$\alpha = 1 + x^2 \quad \text{és} \quad \alpha' = 2(2 + y^2).$$

A ☐ C igaz, mivel például $x = 1$ esetén $C(1, 1)$ egész koordinátájú és $\alpha = 1 + 1^2 = 2$ pedig prím.

Az ☐ A hamis, mivel a fenti számolások alapján az $1 + x^2 = 2(2 + x^2) \Leftrightarrow x^2 = -3$ egyenlethez jutunk, amelynek nincs (valós) megoldása.

Az $A'C'$ szakasz hosszát egyenlővé téve $3\sqrt{2}$ -vel kapjuk a $\sqrt{y^4 + 5y^2 + 8y + 20} = 3\sqrt{2}$ egyenletet, amelynek egy megoldása $y = -1$, tehát ☐ D igaz. (Másképpen, lerajzolva az A' középpontú és $3\sqrt{2}$ sugarú kört láthatjuk, hogy elmetszi a megadott parabolát a $(-1, 1)$ pontban, így ☐ D igaz).

20. Tekintjük az $x - y = 1$ egyenletű d egyenest, illetve az $A(-1, 0)$ és $B(1, 2)$ pontokat. Minden $M \in d$ pontra s_M -mel jelöljük az $[AM]$ és $[BM]$ szakaszok hosszainak összegét. Ekkor

☐ A $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + 2;$

☐ B $\forall M \in d : s_M \leq \sqrt{2} + 4;$

☐ C $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + \sqrt{10};$

☐ D $\exists M \in d$ úgy, hogy $s_M = \sqrt{2} + 2.$

Válasz:

☐ A igaz;

☐ B hamis;

☐ C hamis;

☐ D hamis.

Megoldás: Az $A'(1, -2)$ pont az A szimmetrikusa a d egyenesre nézve és $\{M_0(1, 0)\} = BA' \cap d$. Ekkor $|AM_0| = |M_0B| = 2$ és

$$4 = |AM_0| + |M_0B| = |A'M_0| + |M_0B| = |A'B| \leq |A'M| + |MB| = |AM| + |MB| = s_M, \quad \forall M \in d.$$

Tehát minden $M \in d$ pont esetén $s_M \in [4, \infty)$.

21. Az $a_n = n(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n})$, $\forall n \geq 1$ sorozat határértéke

☐ A 4;

☐ B $\frac{1}{4};$

☐ C 0;

☐ D $+\infty.$

Válasz:

☐ A hamis;

☐ B hamis;

☐ C hamis;

☐ D igaz.

Megoldás: Az $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/4} - 1}{x} = 1/4$ alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt[4]{1+1/n} - 1) = 1/4$, tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{3/4}(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}) = 1/4$. Ezek alapján a kért határérték egyenlő $+\infty$ -nel.

22. Adott az $a_n = \frac{n!}{n^n}$ sorozat, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ A Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan növekvő.

☐ B $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$

☐ C $a_{2021} \leq \frac{1}{2021}.$

☐ D $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$

Válasz:

☐ A hamis;

☐ B hamis;

☐ C igaz;

☐ D igaz.

Megoldás: Mivel $a_1 = 1 > \frac{1}{2} = a_2$, ezért a sorozat nem szigorúan növekvő. Felhasználva az $n! \leq n^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

ahonnan a fogó tétel alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

23. Ha $I = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{x + \sin x} dx$, akkor az I értéke

- ☐ A $\frac{\ln 2}{2}$; ☐ B $\frac{1}{2}$; ☐ C $\ln 2$; ☐ D $\frac{\ln 3}{3}$.

Válasz:

- ☐ A igaz; ☐ B hamis; ☐ C hamis; ☐ D hamis.

Megoldás: Ha $t = x + \sin x$, akkor $dt = (1 + \cos x)dx$, vagyis $dt = 2 \cos^2 \frac{x}{2} dx$ és kapjuk, hogy

$$2I = \ln(x + \sin x) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \ln 2.$$

Tehát $I = \frac{\ln 2}{2}$.

24. Ha A azon valós a számok halmaza, amelyekre az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(x+a)$, $\forall x \in [0, 1]$ függvénynek pontosan két szélsőérték-pontja van, akkor

- ☐ A $A = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, +\infty)$; ☐ B $A = (-\frac{3}{2}, 0)$;
☐ C $A = \emptyset$; ☐ D $A = \mathbb{R}^*$.

Válasz:

- ☐ A igaz; ☐ B hamis; ☐ C hamis; ☐ D hamis.

Megoldás: Az $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ alapján a függvény stacionárius pontjai $x_1 = 0$ és $x_2 = -\frac{2a}{3}$. A feltétel szerint a függvénynek két szélsőérték-pontja kell legyen, ezért a második stacionárius pont nem lehet benne a $(0, 1)$ intervallumban. Ebben az esetben a függvény szélsőérték-pontjai csak az értelmezési tartomány végpontjai lesznek. Tehát az $x_2 \notin (0, 1)$ reláció a $-\frac{2a}{3} \leq 0$ vagy $-\frac{2a}{3} \geq 1$ egyenlőtlenségekhez vezet, amelyek alapján $a \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, +\infty)$.

25. Ha $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ az

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 2, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

képlettel értelmezett függvény, akkor

- ☐ A az $|f|$ függvény folytonos a 0-ban;
☐ B az f függvénynek van legalább egy zérushelye a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumon, mert $f(-\frac{\pi}{2}) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0$;
☐ C az f függvénynek nincs zérushelye a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumon;
☐ D az f függvénynek nincs határértéke a 0-ban.

Válasz:

- ☐ A igaz; ☐ B hamis; ☐ C igaz; ☐ D igaz.

Megoldás: A

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} |f(x)| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} |f(x)| = 1 = |f(0)|$$

egyenlőségekből következik az $|f|$ függvény folytonossága a 0-ban, míg a

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -1 \text{ és } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$$

egyenlőségek alapján az f függvénynek nincs határértéke a 0-ban.

Az értelmezése alapján az f függvénynek nincs zérushelye a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumon.

26. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az $f(x) = 2^{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ képlettel értelmezett függvény. Ekkor:

- ☐ A $\lim_{x \rightarrow \infty} f(-x) = 0$;
☐ B az f függvény szigorúan növekvő az $[1, \infty)$ intervallumon;
☐ C minden $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az $f'(x) \geq xf(x)$ egyenlőtlenség;
☐ D $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{(2x+1)f(x)} = 1$.

Válasz:

- ☐ A hamis; ☐ B igaz; ☐ C hamis; ☐ D hamis.

Megoldás: ☐ A hamis, mivel $\lim_{x \rightarrow \infty} f(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 2^{x^2} = \infty$.

☐ B igaz, mert bármely $x, y \in [1, \infty)$, $x < y$ esetén $x^2 < y^2$, ahonnan következik, hogy $2^{x^2} < 2^{y^2}$ (mivel az $u \mapsto 2^u$, $\forall u \in \mathbb{R}$ függvény szigorúan növekvő).

☐ C hamis. Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $f'(x) = 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2$, ahonnan $f'(1) = -4 \ln 2$. Továbbá

$$f'(-1) < (-1)f(-1) \Leftrightarrow -4 \ln 2 < -2 \Leftrightarrow 4 > e,$$

ezért $f'(x) \geq xf(x)$ egyenlőtlenség nem teljesül minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (például $x = -1$ esetén).

☐ D hamis, mert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{(2x+1)f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln 2 \cdot x \cdot 2^{x^2}}{(2x+1)2^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln 2 \cdot x}{2x+1} = \ln 2 \neq 1.$$

27. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, amelynek vízszintes aszimptotái vannak $-\infty$ és $+\infty$ -ben. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐ A $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
☐ B Az f függvény korlátos.
☐ C Az f függvény grafikonja metsz minden vízszintes egyenest legalább egy pontban.
☐ D Az $f(x) = x^{2021}$ egyenletnek van legalább egy megoldása az $\mathbb{R}$ -en.

Válasz:

- ☐ A igaz; ☐ B igaz; ☐ C hamis; ☐ D igaz.

Megoldás: Mivel az f függvénynek vízszintes aszimptotái vannak a $-\infty$ és $+\infty$ -ben, ezért léteznek és végesek a következő határértékek $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =: l_1 \in \mathbb{R}$ és $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =: l_2 \in \mathbb{R}$. Másrészt $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

és $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, amelyek alapján $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Tehát az ☐ A igaz.

Az l_1 és l_2 határértékek értelmezése alapján léteznek $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ számok úgy, hogy $f(x) \in (l_1 - 1, l_1 + 1)$, minden $x \in (-\infty, a_1)$ esetén, illetve $f(x) \in (l_2 - 1, l_2 + 1)$, minden $x \in (a_2, +\infty)$ esetén. Feltehető, hogy $a_1 < a_2$. Az f függvény folytonos az $[a_1, a_2]$ zárt intervallumon, ezért korlátos is ezen az intervallumon, vagyis léteznek $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $m_1 < m_2$ úgy, hogy $f(x) \in [m_1, m_2]$ minden $x \in [a_1, a_2]$ esetén. Bevezetve az $M_1 := \min\{l_1 - 1, l_2 - 1, m_1\}$ és $M_2 := \max\{l_1 + 1, l_2 + 1, m_2\}$ jelöléseket adódik, hogy $f(x) \in [M_1, M_2]$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, tehát az f függvény korlátos, így a ☐ B igaz.

Ha $m \in \mathbb{R} \setminus [M_1, M_2]$, akkor $f(x) \neq m$ semmilyen $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért az $y = m$ egyenletű vízszintes egyenesek nem metszik az f grafikonját. Tehát ☐ C hamis.

Tekintsük a következőképpen értelmezett függvényt $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - x^{2021}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Egyrészt ez a függvény két folytonos függvény különbsége, így szintén folytonos, tehát Darboux-tulajdonságú. Másrészt $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = l_1 + \infty = +\infty$ és $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l_2 - \infty = -\infty$. Ezek alapján

$\text{Im } g = \mathbb{R}$, és ezért $y = 0$ esetén létezik $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $g(x) = y = 0$, vagyis $f(x) = x^{2021}$. Tehát a ☐ D igaz.

28. Jelöljük I -vel az $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$ integrál értékét. Ekkor

☐ A $I = \frac{1}{4} + \ln 2$;

☐ B $I \in \mathbb{Q}$;

☐ C $0 < I < \ln 2$;

☐ D $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} < I < \frac{1}{2} \ln 2$.

Válasz:

☐ A hamis;

☐ B igaz;

☐ C igaz;

☐ D igaz.

Megoldás: A feladatban szereplő integrált a következőképpen számolhatjuk ki:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln(1+x) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(1+x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tehát ☐ A hamis és ☐ B igaz.

Az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := x \ln(1+x)$, $\forall x \in [0, 1]$ függvény szigorúan növekvő a $[0, 1]$ intervallumon, ezért $0 < f(x) < \ln 2$ minden $x \in (0, 1)$ esetén, ahonnan $0 < I < \ln 2$. Tehát ☐ C igaz.

Végül

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} < I < \frac{1}{2} \ln 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \ln 2 \\ \Leftrightarrow \ln \frac{3}{2} < \frac{1}{2} = \ln \sqrt{e} < \ln 2 &\Leftrightarrow 1.5^2 = 2.25 < e < 4 = 2^2, \end{aligned}$$

ami igaz. Tehát ☐ D igaz.

29. Jelöljük A -val azon a valós számok halmazát, amelyekre a $\sqrt{3-x} - x = a$ egyenletnek van legalább egy valós megoldása. Ekkor

☐ A $(-\infty, -10) \subset A$;

☐ B $\{-10, -9, -8\} \subset A$;

☐ C $\{-3, -2, -1, 0\} \subset A$;

☐ D $\{8, 9, 10\} \subset A$.

Válasz:

☐ A hamis;

☐ B hamis;

☐ C igaz;

☐ D igaz.

Megoldás: Értelmezzük az $f : (-\infty, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = \sqrt{3-x} - x$, $\forall x \leq 3$ képlettel. Ekkor $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 3)$, ahonnan következik, hogy az f függvény szigorúan csökkenő, ezért f injektív. Az $f(-3) = 3$ és $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ alapján az f képe $\text{Im } f = [-3, \infty)$. Ezért az $f(x) = a$ egyenletnek van legalább egy valós megoldása (tulajdonképpen egyetlen egy megoldása) pontosan akkor, ha $a \in [-3, \infty)$.

30. Legyen

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 + \sin^2 x} dx.$$

Ekkor az I értéke

☐ A 0;

☐ B $\arctg\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - \arctg\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$;

☐ C $\arctg\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - 1$;

☐ D 1.

Válasz:

☐ A hamis;

☐ B igaz;

☐ C hamis;

☐ D hamis.

Megoldás:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 + \sin^2 x} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x}}{\frac{x^2 + \sin^2 x}{\sin^2 x}} dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\frac{x}{\sin x}\right)'}{1 + \left(\frac{x}{\sin x}\right)^2} dx \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\sin x} \right) \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{3} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \operatorname{arctg} \left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4} \right). \end{aligned}$$