

2021-es MODELLE a MATE-INFO UBB versenyre és a felvételi
MATEMATIKA írásbeli próba

FONTOS MEGJEGYZÉS: A feladatoknak egy vagy több helyes válasza is lehet, amelyeket a versenyző a mellékelt speciális versenytagon kell bejelöljön. A feleletválasztós feladatok osztályozása a versenyszabályzat részleges pontozási rendszere alapján történik.

1. Az $\mathbb{R}$ halmazon adott a

$$2^{x^2+x+\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2} = 0.$$

egyenlet megoldásainak halmaza:

- ☐ A $S = \{1\}$; ☐ B $S = \{1, 2\}$; ☐ C $S = \{2\}$; ☐ D $S = \{-2, 1\}$.

2. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy létezzen legalább egy olyan nemnulla $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix, amelyre

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a következő:

- ☐ A $a \in \mathbb{R}^*$; ☐ B $a = 0$; ☐ C $a \in \{-3, 2\}$; ☐ D $a \in \{-1, 1\}$.

3. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az $f(x) = x^2 + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ képlettel értelmezzük. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐ A Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén létezik $y \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = y$.
☐ B Minden $y \in \mathbb{R}$ esetén létezik $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $f(x) = y$.
☐ C Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 \neq x_2$, akkor $f(x_1) \neq f(x_2)$.
☐ D Ha $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ és $x_1 = x_2$, akkor $f(x_1) = f(x_2)$.

4. Ha $\alpha \in \mathbb{C}$ és $\alpha^3 = 1$, akkor az $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ mátrix rangja:

- ☐ A 1, mivel $\alpha^3 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$; ☐ B 2, mivel a mátrix determinánsa 0;
☐ C 1; ☐ D 1 vagy 2, az α értékétől függően.

5. Legyen $(a_n)_{n \geq 1}$ egy valós számokból álló számtani haladvány. Ha $a_{101} = 695$ és $a_{1001} = 6995$, akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐ A $a_1 \in [-6, 6]$. ☐ B $a_1 = 5$. ☐ C $a_{2021} = 14135$. ☐ D $\sum_{k=11}^{20} a_k = 965$.

6. Adottak az $f_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$ függvények, ahol $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ezen függvényekhez rendelt parabolák csúcsai a következő görbéken helyezkednek el:

☐ A az $y = -x + 3$ egyenesen;

☐ B az $y = x^2 - 3$ parabolán;

☐ C az $y = x - 3$ egyenesen;

☐ D az $y = 4x + 2$ egyenesen.

7. Adott a $P = X^4 + aX^3 - 6X^2 + 15X + b \in \mathbb{R}[X]$ polinom. Ha P osztható a $Q_1 = X - 1$ és $Q_2 = X + 3$ polinomokkal, akkor:

☐ A $a = -3$;

☐ B $b = -9$;

☐ C $a + b = -10$;

☐ D $a = 1$ és $b = 9$.

8. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$, $f(x) = (2a^2 + 2a + 1)^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ és $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(y) = \log_{a^2+4} y$, $\forall y \in (0, \infty)$ függvényeket. Legyen A azon $a \in \mathbb{R}$ számok halmaza, amelyekre az f és g függvények egymás inverzei. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ A $A \subseteq [-1, 4]$.

☐ B $A \subseteq [-4, 1]$.

☐ C $A \subseteq [-2, 3]$.

☐ D $A \subseteq [-3, 2]$.

9. A valós számok $\mathbb{R}$ halmazán bevezetjük a következő „ $*$ ” műveletet

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20.$$

A következő állítások közül melyek igazak?

☐ A $(1 * 1) * 1 = 3$.

☐ B A „ $*$ ” művelet semleges eleme a 4.

☐ C A 3 inverze a „ $*$ ” műveletre nézve a 3.

☐ D $(\mathbb{R}, *)$ egy csoport.

10. Adott az $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ halmaz és legyen a B halmaz különböző A -beli elemek felhasználásával alkotott háromjegyű számok halmaza. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ A B halmaznak 240 eleme van;

☐ B B halmaznak 210 eleme van;

☐ C B halmaznak 180 eleme van;

☐ D B halmaz pontosan 35 elemében szerepelnek a számjegyek csökkenő sorrendben.

11. Ha az ABC háromszög csúcsai $A(2, 3)$, $B(-1, 1)$, $C(-3, 4)$, akkor

☐ A az ABC háromszög területe $\frac{13}{2}$;

☐ B az ABC háromszög derékszögű;

☐ C az ABC háromszög egyenlő szárú;

☐ D a C pont az AB egyenesen található.

12. Az xOy koordináta-rendszerben tekintjük az $A(-2, 3)$ és $B(0, 1)$ pontokat. Az $M(1, 5)$ pont távolsága az $[AB]$ szakasz oldalfelező merőlegesétől

☐ A $\frac{1}{\sqrt{2}}$;

☐ B $-\frac{1}{\sqrt{2}}$;

☐ C $\frac{3}{\sqrt{2}}$;

☐ D egyik sem.

13. Az ABC háromszög csúcsainak koordinátái a síkjának egy ortonormált Descartes-féle koordináta-rendszerében $A(1, 1)$, $B(9, 1)$, $C(1, 5)$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ A Az ABC háromszög derékszögű és $m(\hat{A}) = 90^\circ$.

☐ B Az ABC háromszög ortocentruma $H = A(1, 1)$, súlypontja $G(\frac{11}{3}, \frac{7}{3})$ és körülírt körének középpontja $O(5, 3)$.

☐ C A G, H, O pontok nem kollineárisak.

☐ D A G súlypont egyenlő távolságra van az ABC háromszög $[AB]$ és $[AC]$ oldalaitól.

14. A $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumon a $4 \cdot |\sin(x)| \cdot \cos(x) = 1$ egyenletnek

- ☐ A nincs megoldása; ☐ B két megoldása van;
☐ C négy megoldása van; ☐ D végtelen sok megoldása van.

15. Ha az a, b, c szakaszok rendre 2, 3, 4 hosszúságúak, akkor:

- ☐ A az a, b, c szakaszokkal hegyesszögű háromszög szerkeszthető;
☐ B az a, b, c szakaszokkal tompaszögű háromszög szerkeszthető;
☐ C az a, b, c szakaszokkal egyenlő oldalú háromszög szerkeszthető;
☐ D az a, b, c szakaszokkal háromszög szerkeszthető.

16. Tekintjük az $\vec{u} = (m-1)\vec{a} + 2\vec{b}$ és $\vec{v} = 3\vec{a} + m\vec{b}$ vektorokat, ahol az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok nem kollineárisak. Hány olyan értéke van az $m \in \mathbb{R}$ paraméternek, amelyre az $\vec{u}$ és $\vec{v}$ vektorok kollineárisak?

- ☐ A 0; ☐ B 1; ☐ C 2; ☐ D 3.

17. Legyen ABC az A csúcsban derékszögű háromszög. Ha $AB = 2c$, $BC = 2a$, $AC = 2b$, illetve R a körülírt kör és r a beírt kör sugara, akkor

- ☐ A $T_{ABC\Delta} = 2bc$; ☐ B $R = \frac{a}{2}$;
☐ C $AB + AC = 2(R + r)$; ☐ D $r = \frac{2bc}{a+b+c}$.

18. Ha A, B, C, M a sík különböző pontjai úgy, hogy

$$6\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC},$$

akkor

- ☐ A a B, C, M pontok kollineárisak; ☐ B a B, C, M pontok nem kollineárisak;
☐ C $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$; ☐ D $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$.

19. Adottak az $A(1, -1)$, $B(3, -1)$, $A'(-4, -2)$ és $B'(0, -2)$ pontok. A C és C' pontok az $y = x^2$ egyenletű $\mathcal{P}$ parabolán találhatók. Jelöljük α -val az ABC háromszög és α' -vel az $A'B'C'$ háromszög területét.

- ☐ A Létezik egy P pont a $\mathcal{P}$ parabolán úgy, hogy $C = C' = P$ és $\alpha = \alpha'$.
☐ B Létezik egyetlen C pont, amelyre az ABC háromszög derékszögű.
☐ C Létezik legalább egy olyan egész koordinátájú C pont, amelyre az α prím szám.
☐ D Létezik legalább egy olyan C' pont, amelyre az $A'C'$ oldal hossza $3\sqrt{2}$.

20. Tekintjük az $x - y = 1$ egyenletű d egyenest, illetve az $A(-1, 0)$ és $B(1, 2)$ pontokat. Minden $M \in d$ pontra s_M -mel jelöljük az $[AM]$ és $[BM]$ szakaszok hosszainak összegét. Ekkor

- ☐ A $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + 2$; ☐ B $\forall M \in d : s_M \leq \sqrt{2} + 4$;
☐ C $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + \sqrt{10}$; ☐ D $\exists M \in d$ úgy, hogy $s_M = \sqrt{2} + 2$.

21. Az $a_n = n(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n})$, $\forall n \geq 1$ sorozat határértéke

- ☐ A 4; ☐ B $\frac{1}{4}$; ☐ C 0; ☐ D $+\infty$.

22. Adott az $a_n = \frac{n!}{n^n}$ sorozat, ahol $n \in \mathbb{N}^*$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐ A Az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan növekvő. ☐ B $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.
☐ C $a_{2021} \leq \frac{1}{2021}$. ☐ D $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

23. Ha $I = \int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{x + \sin x} dx$, akkor az I értéke

- ☐ A $\frac{\ln 2}{2}$; ☐ B $\frac{1}{2}$; ☐ C $\ln 2$; ☐ D $\frac{\ln 3}{3}$.

24. Ha A azon valós a számok halmaza, amelyekre az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(x+a)$, $\forall x \in [0, 1]$ függvénynek pontosan két szélsőérték-pontja van, akkor

- ☐ A $A = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, +\infty)$; ☐ B $A = (-\frac{3}{2}, 0)$;
☐ C $A = \emptyset$; ☐ D $A = \mathbb{R}^*$.

25. Ha $f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ az

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 2, & \text{ha } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

képlettel értelmezett függvény, akkor

- ☐ A az $|f|$ függvény folytonos a 0-ban;
☐ B az f függvénynek van legalább egy zérushelye a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumon, mert $f(-\frac{\pi}{2}) \cdot f(\frac{\pi}{2}) < 0$;
☐ C az f függvénynek nincs zérushelye a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumon;
☐ D az f függvénynek nincs határértéke a 0-ban.

26. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ az $f(x) = 2^{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ képlettel értelmezett függvény. Ekkor:

- ☐ A $\lim_{x \rightarrow \infty} f(-x) = 0$;
☐ B az f függvény szigorúan növekvő az $[1, \infty)$ intervallumon;
☐ C minden $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az $f'(x) \geq xf(x)$ egyenlőtlenség;
☐ D $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{(2x+1)f(x)} = 1$.

27. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ egy olyan folytonos függvény, amelynek vízszintes aszimptotái vannak $-\infty$ és $+\infty$ -ben. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐ A $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
☐ B Az f függvény korlátos.
☐ C Az f függvény grafikonja metsz minden vízszintes egyenest legalább egy pontban.
☐ D Az $f(x) = x^{2021}$ egyenletnek van legalább egy megoldása az $\mathbb{R}$ -en.

28. Jelöljük I -vel az $\int_0^1 x \ln(1+x) dx$ integrál értékét. Ekkor

- ☐ A $I = \frac{1}{4} + \ln 2$; ☐ B $I \in \mathbb{Q}$; ☐ C $0 < I < \ln 2$; ☐ D $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2} < I < \frac{1}{2} \ln 2$.

29. Jelöljük A -val azon a valós számok halmazát, amelyekre a $\sqrt{3-x} - x = a$ egyenletnek van legalább egy valós megoldása. Ekkor

- ☐ A $(-\infty, -10) \subset A$; ☐ B $\{-10, -9, -8\} \subset A$;
☐ C $\{-3, -2, -1, 0\} \subset A$; ☐ D $\{8, 9, 10\} \subset A$.

30. Legyen

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x \cos x}{x^2 + \sin^2 x} dx.$$

Ekkor az I értéke

- ☐ A 0; ☐ B $\arctg\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - \arctg\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$;
☐ C $\arctg\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - 1$; ☐ D 1.