UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Model de subiect pentru CONCURSUL MATE-INFO UBB şi
ADMITEREA la facultate 2021
Proba scrisă la MATEMATICĂ
SOLUŢII

1. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$2^{x^2+x+\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2} = 0\,.$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

$\boxed{\text{A}}$ $S = \{1\}$; $\boxed{\text{B}}$ $S = \{1, 2\}$; $\boxed{\text{C}}$ $S = \{2\}$; $\boxed{\text{D}}$ $S = \{-2, 1\}$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Scriem ecuaţia din enunţ sub forma

$$2^{x^2+x+\frac{1}{2}} = 2^{\frac{5}{2}},$$

ceea ce este echivalent cu $x^2 + x - 2 = 0$, ecuaţie care are soluţiile $x_1 = -2$ şi $x_2 = 1$. Prin urmare, răspunsul corect este $S = \{-2, 1\}$.

2. Pentru ca să existe cel puţin o matrice nenulă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este necesar şi suficient ca:

$\boxed{\text{A}}$ $a \in \mathbb{R}^*$; $\boxed{\text{B}}$ $a = 0$; $\boxed{\text{C}}$ $a \in \{-3, 2\}$; $\boxed{\text{D}}$ $a \in \{-1, 1\}$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$ şi $X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$.
Dacă $\det A \neq 0$, atunci A este inversabilă şi ecuaţia $AX = O_2$ are soluţia unică $X = O_2$.
Dacă $\det A = 0$, atunci ecuaţia din enunţ conduce la ecuaţiile matriceale

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ şi } \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Rezultă două sisteme omogene compatibile nedeterminate din care se deduc coloanele lui X şi găsim şi soluţii $X \neq O_2$ pentru ecuaţia dată.

Prin urmare, ecuaţia dată admite cel puţin o soluţie $X \neq O_2$ atunci şi numai atunci când $\det A = 0$, adică $1 - a^2 = 0$ sau, echivalent, $a \in \{-1, 1\}$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x^2 + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$.
$\boxed{\text{B}}$ Pentru orice $y \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$.
$\boxed{\text{C}}$ Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ şi $x_1 \neq x_2$, atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$.
$\boxed{\text{D}}$ Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ şi $x_1 = x_2$, atunci $f(x_1) = f(x_2)$.

Răspuns:
$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: $\boxed{\text{A}}$ Această proprietate este adevărată pentru orice funcţie, pentru că în definiţia funcţiei este precizat că oricărui element din domeniu îi corespunde un unic element din codomeniu. În cazul nostru, pentru un $x \in \mathbb{R}$ nu avem decât să calculăm $y = x^2 + x + 1 \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{B}}$. Funcţia de gradul al doilea definită pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$ nu este surjectivă. (O justificare simplă ar fi că $f(x) = x^2 + x + 1$ nu ia valori negative.)

$\boxed{\text{C}}$ Funcţia de gradul al doilea definită pe $\mathbb{R}$ cu valori în $\mathbb{R}$ nu este injectivă (de exemplu, $0 \neq -1$, dar $f(0) = 1 = f(-1)$).

$\boxed{\text{D}}$ Această implicaţie este adevărată pentru orice funcţie pentru că unui element din domeniu ($x_1 = x_2$ în cazul nostru) îi corespunde un unic element din codomeniu (şi anume $f(x_1) = f(x_2)$).

4. Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $\alpha^3 = 1$, atunci rangul matricei $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 1, deoarece $\alpha^3 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$. $\boxed{\text{B}}$ 2, deoarece determinantul matricei este 0.
$\boxed{\text{C}}$ 1. $\boxed{\text{D}}$ 1 sau 2, depinde de α.

Răspuns:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Fie A matricea din enunţ. Cum

$$\alpha^3 = 1 \Leftrightarrow \alpha^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ sau } \alpha^2 + \alpha + 1 = 0,$$

există 3 numere complexe distincte ce verifică egalitatea dată. Acestea sunt 1 şi rădăcinile complexe nereale ale ecuaţiei $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$.

Evident, $\text{rang}A \geq 1$, iar cum

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha^2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

$\text{rang}A = 1$ pentru orice rădăcină de ordinul 3 a unităţii. Aşadar, răspunsul corect este $\boxed{\text{C}}$.
$\boxed{\text{A}}$ este fals pentru că ignoră rădăcinile din $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ale ecuaţiei $\alpha^3 = 1$.
$\boxed{\text{B}}$ este fals (chiar dacă $\det A = 0$) deoarece $\text{rang}A \neq 2$.
$\boxed{\text{D}}$ este fals pentru că, independent de valoarea pe care o poate lua α, $\text{rang}A = 1$.

5. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un şir de numere reale în progresie aritmetică. Dacă $a_{101} = 695$ şi $a_{1001} = 6995$, stabiliţi care din următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $a_1 \in [-6, 6]$; $\boxed{\text{B}}$ $a_1 = 5$; $\boxed{\text{C}}$ $a_{2021} = 14135$; $\boxed{\text{D}}$ $\sum_{k=11}^{20} a_k = 965$.

Răspuns:

A **adevărată**; **B** **falsă**; **C** **adevărată**; **D** **adevărată**.

Soluţie: Folosind formula termenului general în funcţie de primul termen a_1 şi raţia r, din ipoteză obţinem sistemul

$$\begin{cases} a_1 + 100r = 695 \\ a_1 + 1000r = 6995 \end{cases} \quad \text{de unde deducem } a_1 = -5 \text{ şi } r = 7.$$

Astfel, $\boxed{\text{A}}$ este adevărată, iar $\boxed{\text{B}}$ este falsă.

$$a_{2021} = a_1 + 2020r = 14135,$$

prin urmare $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

$$\begin{aligned}\sum_{k=11}^{20} a_k =& S_{20} - S_{10} = \frac{(a_1 + a_{20}) \cdot 20}{2} - \frac{(a_1 + a_{10}) \cdot 10}{2} = \\ =& [-5 + (-5 + 19 \cdot 7)] \cdot 10 - [-5 + (-5 + 9 \cdot 7)] \cdot 5 = 1230 - 265 = 965,\end{aligned}$$

deci şi $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

6. Fie funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 2, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vârfurile tuturor parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe:

$\boxed{\text{A}}$ dreapta $y = -x + 3$; $\boxed{\text{B}}$ parabola $y = x^2 - 3$;
$\boxed{\text{C}}$ dreapta $y = x - 3$; $\boxed{\text{D}}$ dreapta $y = 4x + 2$.

Răspuns:

A **falsă**; **B** **falsă**; **C** **adevărată**; **D** **falsă**.

Soluţie: Vârful parabolei asociate unei funcţii

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ g(x) = ax^2 + bx + c \ (a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0)$$

este punctul $V\left(-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Fie $m \in \mathbb{R}^*$ fixat. Pentru funcţia f_m avem

$$\Delta = 4(m+1)^2 - 4m(m-2) = 4m^2 + 8m + 4 - 4m^2 + 8m = 16m + 4.$$

Abscisa vârfului parabolei asociate este

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{m+1}{m}, \tag{1}$$

iar ordonata este

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16m+4}{4m} = -\frac{4m+1}{m}. \tag{2}$$

Cum $4m + 1 = (m+1) + 3m$,

$$y_V = -\frac{m+1}{m} - 3 = x_V - 3.$$

Deci, vârfurile parabolelor asociate funcţiilor f_m se găsesc pe dreapta $y = x - 3$.

Se poate proceda şi astfel: (1) se mai scrie

$$mx_V = -m - 1.$$

Rezultă că nici unul dintre vârfurile parabolelor asociate funcţiilor f_m nu poate avea abscisa $x_V = -1$ şi putem scrie

$$m = -\frac{1}{x_V + 1}.$$

Înlocuind acest m în (2) rezultă $y_V = x_V - 3$.

7. Fie polinomul $P = X^4 + aX^3 - 6X^2 + 15X + b \in \mathbb{R}[X]$. Dacă P este divizibil cu polinoamele $Q_1 = X - 1$ şi $Q_2 = X + 3$, atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $a = -3$; $\boxed{\text{B}}$ $b = -9$;
$\boxed{\text{C}}$ $a + b = -10$; $\boxed{\text{D}}$ $a = 1$ şi $b = 9$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Din $Q_1 \mid P$ deducem că $P(1) = 0$, adică:

$$1 + a - 6 + 15 + b = 0 \Leftrightarrow a + b = -10,$$

care este chiar egalitatea de la $\boxed{\text{C}}$.
Din $Q_2 \mid P$ deducem că $P(-3) = 0$, adică:

$$81 - 27a - 54 - 45 + b = 0 \Leftrightarrow -27a + b = 18.$$

Rezultă sistemul:

$$\begin{cases} a + b = -10 \\ 27a - b = -18 \end{cases}$$

care are soluţia unică $(a, b) = (-1, -9)$. Deci şi $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

8. Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = (2a^2 + 2a + 1)^x, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $g(y) = \log_{a^2+4} y, \forall y \in (0, \infty)$. Fie A mulţimea valorilor $a \in \mathbb{R}$ pentru care f şi g sunt funcţii inverse una alteia. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ $A \subseteq [-1, 4]$; $\boxed{\text{B}}$ $A \subseteq [-4, 1]$;
$\boxed{\text{C}}$ $A \subseteq [-2, 3]$; $\boxed{\text{D}}$ $A \subseteq [-3, 2]$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Să observăm că pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $2a^2 + 2a + 1 = a^2 + (a + 1)^2 > 0$ şi $a^2 + 4 \geq 4$ (în consecinţă pozitiv şi diferit de 1). Dacă funcţiile f şi g sunt una inversa celeilalte, atunci

$$f \circ g = 1_{(0,\infty)} \text{ şi } g \circ f = 1_{\mathbb{R}}.$$

În particular, avem $f(g(a^2 + 4)) = a^2 + 4$, adică $f(1) = a^2 + 4$ şi astfel $2a^2 + 2a + 1 = a^2 + 4$. Rezultă că $a^2 + 2a - 3 = 0$, care are soluţiile $a = 1$ şi $a = -3$. Pentru aceste valori putem verifica direct că f şi g sunt funcţii inverse una alteia.

9. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim operaţia ,,$*$" prin

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ $(1 * 1) * 1 = 3$; $\boxed{\text{B}}$ 4 este element neutru faţă de ,,$*$";
$\boxed{\text{C}}$ simetricul lui 3 este 3; $\boxed{\text{D}}$ $(\mathbb{R}, *)$ este grup.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: $(1 * 1) * 1 = -23$, deci $\boxed{\text{A}}$ este fals.
Avem

$$x * e = x \Leftrightarrow x(e-5) - 4e + 20 = 0 \Leftrightarrow x(e-5) - 4(e-5) = 0 \Leftrightarrow (e-5)(x-4) = 0.$$

Aceasta are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$ dacă şi numai dacă $e = 5$. Deci elementul neutru (care e unic) este 5, deci $\boxed{\text{B}}$ este fals.

Fie $x \in \mathbb{R}$ arbitrar fixat. Avem

$$x * x' = e \Leftrightarrow xx' - 4x - 4x' + 20 = 5 \Leftrightarrow xx' - 4x - 4x' + 16 = 1 \Leftrightarrow (x-4)(x'-4) = 1.$$

Ecuaţia în x' are soluţie $\left(\text{pe } x' = \dfrac{1}{x-4} + 4, \text{ soluţie unică}\right)$ dacă şi numai dacă $x \neq 4$.

Pentru $x = 3$ se obţine $x' = \dfrac{1}{3-4} + 4 = 3$. Rezultă că $\boxed{\text{C}}$ este adevărat.

Varianta $\boxed{\text{D}}$ este falsă deoarece 4 nu e simetrizabil.

10. Fie $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi B mulţimea numerelor de trei cifre construite cu cifre distincte din A. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ B are 240 de elemente; $\boxed{\text{B}}$ B are 210 de elemente; $\boxed{\text{C}}$ B are 180 de elemente;
$\boxed{\text{D}}$ exact 35 din elementele lui B au cifrele scrise in ordine descrescătoare.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Numărul elementelor lui B coincide cu numărul tripletelor (a, b, c) cu $a, b, c \in A$, $a \neq b \neq c \neq a \neq 0$. Numărul tripletelor (a, b, c) cu $a, b, c \in A$, $a \neq b \neq c \neq a$ coincide cu numărul aranjamentelor de 7 elemente — elementele din A — luate câte 3, adică $\mathbf{A}_7^3 = 210$. Numărul tripletelor $(0, b, c)$ cu $b, c \in A \setminus \{0\}$, $b \neq c$ coincide cu $\mathbf{A}_6^2 = 30$. Deci cardinalul lui B este

$$210 - 30 = 180.$$

Pentru ultima intrebare, trebuie sa numărăm tripletele (a, b, c) cu $a, b, c \in A$, $a > b > c$. Evident, nu mai există posibilitatea ca $a = 0$ şi fiecare astfel de triplet corespunde unei submulţimi cu 3 elemente a mulţimii A (elemente pe care le ordonăm conform cerinţei când formăm tripletul corespunzător). Prin urmare, numărul acestor triplete este

$$\mathbf{C}_7^3 = 35.$$

Deci $\boxed{\text{A}}$ şi $\boxed{\text{B}}$ sunt false, iar $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt adevărate.

11. Dacă vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(2, 3)$, $B(-1, 1)$, $C(-3, 4)$, atunci

$\boxed{\text{A}}$ Aria triunghiului ABC este egală cu $\frac{13}{2}$. $\boxed{\text{B}}$ Triunghiul ABC este dreptunghic.
$\boxed{\text{C}}$ Triunghiul ABC este isoscel. $\boxed{\text{D}}$ Punctul C se află pe dreapta AB.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Observăm că $\overrightarrow{BA}(3, 2)$, $||\overrightarrow{BA}|| = \sqrt{13}$, $\overrightarrow{BC}(-2, 3)$, $||\overrightarrow{BC}|| = \sqrt{13}$. Rezultă că ΔABC este isoscel. În plus, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ şi triunghiul ABC este dreptunghic. Aria triunghiului este $S = \dfrac{c_1 \cdot c_2}{2} = \dfrac{AB \cdot BC}{2} = \dfrac{13}{2} \neq 0$, deci triunghiul este nedegenerat, *i.e.* $C \notin AB$.

12. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-2,3)$ şi $B(0,1)$. Distanţa de la punctul $M(1,5)$ la mediatoarea segmentului $[AB]$ este

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{B}}$ $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{3}{\sqrt{2}}$; $\boxed{\text{D}}$ altă valoare.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: $C(-1,2)$ este mijlocul segmentului $[AB]$. Panta dreptei AB este egală cu -1, deci panta mediatoarei segmentului $[AB]$ este 1, şi ecuaţia mediatoarei este $d : y-2 = 1\cdot(x+1) \Leftrightarrow x-y+3 = 0$. Deci $d(M,d) = \frac{|1-5+3|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

13. Se consideră triunghiul ABC. Faţă de un reper cartezian ortonormat al planului său, vârfurile triunghiului au coordonatele $A(1,1)$, $B(9,1)$, $C(1,5)$.

$\boxed{\text{A}}$ Triunghiul ABC este dreptunghic şi $m(\widehat{A}) = 90°$;

$\boxed{\text{B}}$ $H = A(1,1)$ este ortocentrul, $G\left(\frac{11}{3},\frac{7}{3}\right)$ este centrul de greutate şi $O(5,3)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC;

$\boxed{\text{C}}$ Punctele G,H,O nu sunt coliniare.

$\boxed{\text{D}}$ Centrul de greutate G este egal depărtat de laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: $\boxed{\text{A}}$ **Adevărat.** Într-adevăr laturile AB şi AC sunt paralele cu axele de coordonate deoarece $\overrightarrow{AB}\,(8,0)$ şi $\overrightarrow{AC}\,(0,4)$.

$\boxed{\text{B}}$ **Adevărat.** Într-adevăr ortocentrul unui triunghi dreptunghic este vârful unghiului drept. De asemenea, coordonatele centrului de greutate sunt mediile aritmetice ale absciselor respectiv ordonatelor vârfurilor. În acest caz particular coordonatele centrului de greutate sunt, într-adevăr, $\left(\dfrac{11}{3},\dfrac{7}{3}\right)$. În sfârşit, centrul cercului circumscris unui triunghi dreptunghic este mijlocul ipotenuzei deoarece acolo se întâlnesc mediatoarele laturilor triunghiului. În acest caz particular coordonatele centrului cercului circumscris sunt, într-adevăr, $(5,3)$ deoarece acest punct este mijlocul ipotenuzei $[BC]$.

$\boxed{\text{C}}$ **Fals.** Punctele G,H,O sunt coliniare în orice triunghi, iar dreapta lor comună este binecunoscuta dreaptă a lui Euler. În acest caz particular se poate verifica direct coliniaritatea celor 3 puncte observând că

$$\overrightarrow{HG}\left(\frac{8}{3},\frac{4}{3}\right) \text{ iar } \overrightarrow{HO}\,(4,2)$$

adică

$$\overrightarrow{HG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{HO}\,. \tag{1}$$

De altfel relaţia (1) are loc în orice triunghi.

$\boxed{\text{D}}$ **Fals.** Într-adevăr

$$\text{dist}(G,AB) = \frac{7}{3} - 1 = \frac{4}{3} \neq \frac{8}{3} = \text{dist}(G,AC).$$

14. În intervalul $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ ecuaţia $4\cdot|\sin(x)|\cdot\cos(x) = 1$

$\boxed{\text{A}}$ nu are nici o soluţie; $\boxed{\text{B}}$ are două soluţii; $\boxed{\text{C}}$ are patru soluţii; $\boxed{\text{D}}$ are o infinitate de soluţii.

Răspuns: $\boxed{\textbf{A}}$ **falsă** $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă** $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată** $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Fie $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Atunci, $|\sin(x)| \cdot \cos(x) \geq 0$. Astfel vom avea:

$4 \cdot |\sin(x)| \cdot \cos(x) = 1 \Leftrightarrow (4 \cdot |\sin(x)| \cdot \cos(x))^2 = 1 \Leftrightarrow 16\sin^2(x)\cos^2(x) = 1 \Leftrightarrow 4\sin^2(2x) = 1 \Leftrightarrow 2(1-\cos(4x)) = 1 \Leftrightarrow \cos(4x) = \frac{1}{2}$.

Deci soluţiile din intervalul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sunt: $-\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}$.

15. Dacă a, b, c sunt trei segmente care au lungimile $2, 3, 4$, atunci:

$\boxed{\text{A}}$ a, b, c pot forma un triunghi ascuţitunghic; $\boxed{\text{B}}$ a, b, c pot forma un triunghi obtuzunghic;
$\boxed{\text{C}}$ a, b, c pot forma un triunghi echilateral; $\boxed{\text{D}}$ a, b, c pot forma un triunghi.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: $2+3>4, 3+4>2, 4+2>3 \implies \exists A, B, C$ vârfuri ale unui triunghi nedegenerat astfel încât $a = [BC]$, $b = [CA]$, $c = [AB]$. Teorema cosinusului implică

$$\cos C = \frac{2^2+3^2-4^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{1}{4} < 0.$$

Deci, $m(\hat{C}) > 90°$.

16. Se consideră vectorii $\vec{u} = (m-1)\vec{a} + 2\vec{b}$ şi $\vec{v} = 3\vec{a} + m\vec{b}$, unde $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt vectori necoliniari. Câte valori poate avea parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie coliniari?

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 1; $\boxed{\text{C}}$ 2; $\boxed{\text{D}}$ 3.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari, dacă există $k \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $\vec{u} = k \cdot \vec{v} \Leftrightarrow (m-1)\vec{a} + 2\vec{b} = k \cdot (3\vec{a} + m\vec{b}) \Leftrightarrow (m-1-3k)\vec{a} = (mk-2)\vec{b}$. Vectorii $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ nu sunt coliniari, astfel

$$\begin{cases} m-1-3k = 0, \\ km-2 = 0. \end{cases}$$

Deci, $m = 3k+1$ şi astfel $k \cdot (3k+1) = 2$. Soluţiile acestei ecuaţii sunt $k_1 = -1$, $k_2 = \dfrac{2}{3}$, de unde $m_1 = -2$ şi $m_2 = 3$.

17. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Dacă $AB = 2c$, $BC = 2a$, $AC = 2b$, R şi r sunt raza cercului circumscris, respectiv înscris în triunghiul dat, atunci

$\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{A}ria(_\Delta ABC) = 2bc$ $\boxed{\text{B}}$ $R = \frac{a}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ $AB + AC = 2(R+r)$ $\boxed{\text{D}}$ $r = \frac{2bc}{a+b+c}$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată** $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă** $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată** $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Dacă ABC este un triunghi dreptunghic în A şi $AB = 2c$, $BC = 2a$, $AC = 2b$, atunci

- $\mathcal{A}ria(_\Delta ABC) = \frac{c_1 \cdot c_2}{2} = \frac{AB \cdot AC}{2} = 2bc$;
- centrul centrului circumscris triunghiului dreptunghic este mijlocul ipotenuzei, deci $R = \frac{BC}{2} = a$;
- $r = \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{p} = \frac{2bc}{a+b+c}$ unde $p = a+b+c$ este semiperimetrul triunghiului dat.

Observăm că $2(R+r) = 2\left(a + \frac{2bc}{a+b+c}\right) = 2\frac{a^2+ab+ac+2bc}{a+b+c} = 2\frac{(b^2+c^2)+ab+ac+2bc}{a+b+c} = 2\frac{(b^2+c^2+2bc)+ab+ac}{a+b+c} = 2\frac{(b+c)^2+a(b+c)}{a+b+c} = 2\frac{(b+c)(a+b+c)}{a+b+c} = 2b+2c = AB+AC.$

18. Dacă A, B, C, M sunt puncte distincte într-un plan astfel încât

$$6\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC},$$

atunci:

$\boxed{A}$ B, C, M sunt coliniare; $\boxed{B}$ B, C, M sunt necoliniare;
$\boxed{C}$ $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$; $\boxed{D}$ $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$.

Răspuns:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie:
$6\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC} \implies 6(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}) = 3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC} \implies 6\overrightarrow{BM} = -3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}-5\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC} - 5\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BC} \implies \overrightarrow{BC} = -3\overrightarrow{BM} \implies B, C, M$ sunt coliniare şi $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} = -3|\overrightarrow{BM}|^2 < 0$.

19. Se consideră punctele $A(1,-1)$, $B(3,-1)$, $A'(-4,-2)$ şi $B'(0,-2)$. Punctele C şi C' se află pe parabola $\mathcal{P}$ de ecuaţie $y = x^2$. Notăm cu α aria triunghiului ABC şi cu α' aria triunghiului $A'B'C'$.

$\boxed{A}$ Există un punct P pe parabola $\mathcal{P}$ astfel încât $C = C' = P$ şi $\alpha = \alpha'$.
$\boxed{B}$ Există un unic punct C astfel încât triunghiul ABC să fie dreptunghic.
$\boxed{C}$ Există cel puţin un punct C cu coordonate numere întregi astfel încât α să fie un număr prim.
$\boxed{D}$ Există cel puţin un punct C' astfel încât latura $A'C'$ să fie de lungime $3\sqrt{2}$.

Răspuns:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **falsă** $\boxed{\mathbf{B}}$ **falsă** $\boxed{\mathbf{C}}$ **adevărată** $\boxed{\mathbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: $\boxed{B}$ este fals deoarece unghiul drept poate fi atât în A cât şi în B iar perpendicularele pe AB din A respectiv B intersectează parabola în două puncte distincte.

Fie $C = C(x, x^2)$ şi $C' = C'(y, y^2)$. Avem

$$\alpha = 1 + x^2 \quad \text{şi} \quad \alpha' = 2(2 + y^2).$$

Deci $\boxed{C}$ este adevărat.

Din $1 + x^2 = 2(2 + x^2) \Leftrightarrow x^2 = -3$, adică $\boxed{A}$ este fals.

Distanţa de la C' la A' este $\sqrt{y^4 + 5y^2 + 8y + 20} = 3\sqrt{2}$ şi se observă soluţia -1, deci $\boxed{D}$ este adevărat. (Sau, din desen observăm că un cerc de rază $3\sqrt{2}$ centrat în A' intersectează parabola în $(-1, 1)$, deci $\boxed{D}$ este adevărat.)

20. Considerăm ecuaţia dreptei $d : x - y = 1$ şi punctele $A(-1, 0)$ şi $B(1, 2)$. Oricare ar fi $M \in d$, notăm cu s_M suma lungimilor segmentelor $[AM]$ şi $[BM]$. Atunci:

$\boxed{A}$ $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + 2$; $\boxed{B}$ $\forall M \in d : s_M \leq \sqrt{2} + 4$;
$\boxed{C}$ $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + \sqrt{10}$; $\boxed{D}$ $\exists M \in d$ astfel încât $s_M = \sqrt{2} + 2$.

Răspuns:

$\boxed{\mathbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\mathbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\mathbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\mathbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Fie $A'(1, -2)$ simetricul lui A faţă de d şi $\{M_0(1, 0)\} = BA' \cap d$. Atunci

$$|AM_0| + |M_0B| = |A'M_0| + |M_0B| = |A'B| \leq |A'M| + |MB| = |AM| + |MB|$$

şi $|AM_0| = |M_0B| = 2$. Deci, oricare ar fi $M \in d$, $s_M \in [4, \infty)$.

21. Limita şirului $a_n = n\,(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}), \forall n \geq 1$ este

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Din $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/4}-1}{x} = 1/4$ rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(\sqrt[4]{1+1/n}-1) = 1/4$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} n^{3/4}\,(\sqrt[4]{n+1}-\sqrt[4]{n}) = 1/4$. Astfel limita cerută este $+\infty$.

22. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fie $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

$\boxed{\text{A}}$ Şirul $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este strict crescător. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

$\boxed{\text{C}}$ $a_{2021} \leq \frac{1}{2021}$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Cum $a_1 = 1 > \frac{1}{2} = a_2$, şirul nu este strict crescător. Folosind inegalitatea $n! \leq n^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, rezultă că

$$0 \leq a_n \leq \frac{1}{n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

de unde se obţine că $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

23. Notăm $I = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{x + \sin x} dx$. Valoare lui I este

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\ln 2}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\ln 3}{3}$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Dacă $t = x + \sin x$, atunci $dt = (1 + \cos x)dx$, deci $dt = 2\cos^2 \frac{x}{2} dx$ şi obţinem

$$2I = \ln(x + \sin x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = \ln 2.$$

Astfel $I = \frac{\ln 2}{2}$.

24. Notăm cu A mulţimea numerelor reale a pentru care funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(x + a), \forall x \in \mathbb{R}$ admite exact două puncte de extrem.

$\boxed{\text{A}}$ $A = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, +\infty)$; $\boxed{\text{B}}$ $A = (-\frac{3}{2}, 0)$; $\boxed{\text{C}}$ $A = \emptyset$; $\boxed{\text{D}}$ $A = \mathbb{R}^*$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: Din $f'(x) = 3x^2 + 2ax$ rezultă punctele critice $x_1 = 0$ şi $x_2 = -2a/3$. Condiţia ca funcţia să aibă exact două puncte de extrem este ca al doilea punct critic să nu aparţină intervalului $(0, 1)$. În acest caz punctele de extrem ale funcţiei vor fi doar capetele intervalului de definiţie. Deci $-2a/3 \leq 0$ sau $-2a/3 \geq 1$. Rezultă $a \in (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, +\infty)$.

25. Fie $f\colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 2, \ -\frac{\pi}{2} \le x \le 0 \\ \\ \frac{\sin x}{x}, \ 0 < x \le \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Atunci

$\boxed{\text{A}}$ funcţia $|f|$ este continuă în 0;
$\boxed{\text{B}}$ funcţia f are cel puţin un zero în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru că $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$;
$\boxed{\text{C}}$ funcţia f nu are niciun zero în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
$\boxed{\text{D}}$ funcţia f nu are limită în 0.

Răspuns:
$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Egalităţile

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} |f(x)| = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} |f(x)| = 1 = |f(0)|$$

implică continuitatea funcţiei $|f|$ în 0, iar egalităţile

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = -1 \text{ şi } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = 1$$

arată că f nu are limită în 0.

Din definiţia lui f rezultă că f nu are niciun zero în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

26. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2^{x^2}, \ \forall x \in \mathbb{R}$. Atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x) = 0$;

$\boxed{\text{B}}$ funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$;

$\boxed{\text{C}}$ inegalitatea $f'(x) \ge xf(x)$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{(2x+1)f(x)} = 1.$

Răspuns:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie: A) $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x) = 0$: afirmaţie falsă, pentru că $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x) = \lim\limits_{x\to\infty} 2^{x^2} = \infty$;
B) funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$: afirmaţie adevărată, pentru că oricare ar fi $x, y \in [1, \infty)$ cu $x \le y$ are loc $x^2 \le y^2$ şi aceasta implică $2^{x^2} \le 2^{y^2}$ (funcţia $u \in \mathbb{R} \mapsto 2^u$ este funcţie crescătoare);
C) inegalitatea $f'(x) \ge xf(x)$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$: afirmaţie falsă, pentru că

$$f'(x) = 2x \cdot 2^{x^2} \cdot \ln 2 \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R}, \text{ iar } f'(-1) = -4\ln 2, \ xf(x)\Big|_{x=-1} = -2;$$

are loc $-4\ln 2 < -2 \Leftrightarrow 4 > e$; prin urmare inegalitatea indicată în problemă nu are loc, de exemplu, pentru $x = -1$;
D) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{(2x+1)f(x)} = 1$: afirmaţie falsă, pentru că

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{(2x+1)f(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln 2 \cdot x \cdot 2^{x^2}}{(2x+1)2^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\ln 2 \cdot x}{2x+1} = \ln 2.$$

27. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă al cărei grafic admite asimptote orizontale spre $-\infty$ şi spre $+\infty$. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

$\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$;

$\boxed{\text{B}}$ funcţia f este mărginită;

$\boxed{\text{C}}$ graficul funcţiei f intersectează orice dreaptă orizontală în cel puţin un punct;

$\boxed{\text{D}}$ ecuaţia $f(x) = x^{2021}$ are cel puţin o soluţie în $\mathbb{R}$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Cum graficul lui f admite asimptote orizontale spre $-\infty$ şi $+\infty$, există şi sunt finite limitele $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =: l_1 \in \mathbb{R}$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) =: l_2 \in \mathbb{R}$. Pe de altă parte, $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$. Rezultă că $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Deci afirmaţia $\boxed{\text{A}}$ este adevărată.

Pe baza definiţiei limitelor l_1 şi l_2, există $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) \in (l_1 - 1, l_1 + 1)\ \forall\, x \in (-\infty, a_1)$, respectiv $f(x) \in (l_2 - 1, l_2 + 1)$, $\forall\, x \in (a_2, +\infty)$. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că $a_1 < a_2$. Pe de altă parte, funcţia f fiind continuă pe intervalul compact $[a_1, a_2]$, ea este mărginită pe acest interval, adică există $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$, $m_1 < m_2$, astfel încât $f(x) \in [m_1, m_2]$, $\forall\, x \in [a_1, a_2]$. Notând $\min\{l_1 - 1, l_2 - 1, m_1\} =: M_1$ şi $\max\{l_1 + 1, l_2 + 1, m_2\} =: M_2$, rezultă că $f(x) \in [M_1, M_2]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, deci f este mărginită. Aşadar afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

Fie $m \in \mathbb{R} \setminus [M_1, M_2]$. Cum $f(x) \neq m$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă că dreapta orizontală de ecuaţie $y = m$ nu are puncte comune cu graficul funcţiei f. Deci afirmaţia $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

Fie $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $g(x) = f(x) - x^{2021}$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Această funcţie este continuă, fiind diferenţa a două funcţii continue pe $\mathbb{R}$, deci are proprietatea lui Darboux. Pe de altă parte, avem $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = l_1 + \infty = +\infty$ şi $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = l_2 - \infty = -\infty$. Rezultă că $\operatorname{Im} g = \mathbb{R}$ şi, prin urmare, pentru $y = 0$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel ca $g(x) = y = 0$, adică $f(x) = x^{2021}$. Aşadar afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

28. Se notează cu I valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 x \ln(1 + x)\,\mathrm{d}x$. Atunci

$\boxed{\text{A}}$ $I = \dfrac{1}{4} + \ln 2$; $\boxed{\text{B}}$ $I \in \mathbb{Q}$;

$\boxed{\text{C}}$ $0 < I < \ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{3}{2} < I < \dfrac{1}{2} \ln 2$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Avem

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln(1 + x)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln(1 + x)\Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x + 1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x + 1)\right) \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Funcţia $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) := x\ln(1+x), \forall x \in [0,1]$ este strict crescătoare pe $[0,1]$, deci $0 < f(x) < \ln 2$ pentru orice $x \in (0,1)$, de unde $0 < I < \ln 2$. Avem

$$\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} < I < \frac{1}{2}\ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}\ln 2$$
$$\Leftrightarrow \quad \ln\frac{3}{2} < \frac{1}{2} = \ln\sqrt{e} < \ln 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1.5^2 = 2.25 < e < 4 = 2^2,$$

ceea ce este adevărat.

29. Notăm cu A mulţimea numerelor reale a pentru care ecuaţia $\sqrt{3-x} - x = a$ are cel puţin o soluţie reală.

$\boxed{\text{A}}$ $(-\infty, -10) \subset A$; $\boxed{\text{B}}$ $\{-10, -9, -8\} \subset A$;
$\boxed{\text{C}}$ $\{-3, -2, -1, 0\} \subset A$; $\boxed{\text{D}}$ $\{8, 9, 10\} \subset A$.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

Soluţie: Definim funcţia $f : (-\infty, 3] \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = \sqrt{3-x} - x, \forall x \leq 3$. Funcţia este continuă, deci are proprietatea lui Darboux. Pe de altă parte avem $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 3)$. Prin urmare f este strict descrescătoare, deci f este injectivă. $f(-3) = 3$ şi $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, deci imaginea lui f este $[-3, \infty)$. Astfel ecuaţia $f(x) = a$ are cel puţin o soluţie (de fapt are exact o soluţie) dacă şi numai dacă $a \in [-3, \infty)$.

30. Fie

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 + \sin^2 x}\mathrm{d}x.$$

Valoarea lui I este

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$;
$\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - 1$; $\boxed{\text{D}}$ 1.

Răspuns:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

Soluţie:

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 + \sin^2 x}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x}}{\frac{x^2+\sin^2 x}{\sin^2 x}}\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\left(\frac{x}{\sin x}\right)'}{1+\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2}\mathrm{d}x$$
$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$$
$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$$