UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Model de subiect pentru CONCURSUL MATE-INFO UBB şi ADMITEREA la facultate 2021
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ: Problemele pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte, care trebuie indicate de candidat. Notarea subiectului se face conform sistemului de punctare parţială din regulamentul concursului.

1. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$2^{x^2+x+\frac{1}{2}} - 4\sqrt{2} = 0\,.$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

A $S = \{1\}$; B $S = \{1, 2\}$; C $S = \{2\}$; D $S = \{-2, 1\}$.

2. Pentru ca să existe cel puţin o matrice nenulă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este necesar şi suficient ca:

A $a \in \mathbb{R}^*$; B $a = 0$; C $a \in \{-3, 2\}$; D $a \in \{-1, 1\}$.

3. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dată prin $f(x) = x^2 + x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ există $y \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$.
B Pentru orice $y \in \mathbb{R}$ există $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = y$.
C Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ şi $x_1 \neq x_2$, atunci $f(x_1) \neq f(x_2)$.
D Dacă $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ şi $x_1 = x_2$, atunci $f(x_1) = f(x_2)$.

4. Dacă $\alpha \in \mathbb{C}$ şi $\alpha^3 = 1$, atunci rangul matricei $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$ este:

A 1, deoarece $\alpha^3 = 1 \Rightarrow \alpha = 1$. B 2, deoarece determinantul matricei este 0.
C 1. D 1 sau 2, depinde de α.

5. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir de numere reale în progresie aritmetică. Dacă $a_{101} = 695$ şi $a_{1001} = 6995$, stabiliţi care din următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $a_1 \in [-6, 6]$; B $a_1 = 5$; C $a_{2021} = 14135$; D $\displaystyle\sum_{k=11}^{20} a_k = 965$.

6. Fie funcţiile $f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_m(x) = mx^2 + 2(m+1)x + m - 2, \forall x \in \mathbb{R}$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Vârfurile tuturor parabolelor asociate acestor funcţii se găsesc pe:

A dreapta $y = -x + 3$; B parabola $y = x^2 - 3$;
C dreapta $y = x - 3$; D dreapta $y = 4x + 2$.

7. Fie polinomul $P = X^4 + aX^3 - 6X^2 + 15X + b \in \mathbb{R}[X]$. Dacă P este divizibil cu polinoamele $Q_1 = X - 1$ şi $Q_2 = X + 3$, atunci:

A $a = -3$; B $b = -9$;
C $a + b = -10$; D $a = 1$ şi $b = 9$.

8. Fie funcţiile $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ şi $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definite prin $f(x) = (2a^2 + 2a + 1)^x, \forall x \in \mathbb{R}$ şi $g(y) = \log_{a^2+4} y, \forall y \in (0, \infty)$. Fie A mulţimea valorilor $a \in \mathbb{R}$ pentru care f şi g sunt funcţii inverse una alteia. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $A \subseteq [-1, 4]$; B $A \subseteq [-4, 1]$;
C $A \subseteq [-2, 3]$; D $A \subseteq [-3, 2]$.

9. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ a numerelor reale definim operaţia ,,$*$" prin

$$x * y = xy - 4x - 4y + 20.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A $(1 * 1) * 1 = 3$; B 4 este element neutru faţă de ,,$*$";
C simetricul lui 3 este 3; D $(\mathbb{R}, *)$ este grup.

10. Fie $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi B mulţimea numerelor de trei cifre construite cu cifre distincte din A. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

A B are 240 de elemente; B B are 210 de elemente; C B are 180 de elemente;
D exact 35 din elementele lui B au cifrele scrise in ordine descrescătoare.

11. Dacă vârfurile triunghiului ABC au coordonatele $A(2, 3)$, $B(-1, 1)$, $C(-3, 4)$, atunci

A Aria triunghiului ABC este egală cu $\frac{13}{2}$. B Triunghiul ABC este dreptunghic.
C Triunghiul ABC este isoscel. D Punctul C se află pe dreapta AB.

12. În sistemul de coordonate xOy se consideră punctele $A(-2, 3)$ şi $B(0, 1)$. Distanţa de la punctul $M(1, 5)$ la mediatoarea segmentului $[AB]$ este

A $\frac{1}{\sqrt{2}}$; B $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; C $\frac{3}{\sqrt{2}}$; D altă valoare.

13. Se consideră triunghiul ABC. Faţă de un reper cartezian ortonormat al planului său, vârfurile triunghiului au coordonatele $A(1, 1)$, $B(9, 1)$, $C(1, 5)$.

A Triunghiul ABC este dreptunghic şi $m(\widehat{A}) = 90°$;
B $H = A(1, 1)$ este ortocentrul, $G\left(\frac{11}{3}, \frac{7}{3}\right)$ este centrul de greutate şi $O(5, 3)$ este centrul cercului circumscris triunghiului ABC;
C Punctele G, H, O nu sunt coliniare.
D Centrul de greutate G este egal depărtat de laturile $[AB]$ şi $[AC]$ ale triunghiului ABC.

14. În intervalul $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ecuaţia $4 \cdot |\sin(x)| \cdot \cos(x) = 1$

A nu are nici o soluţie; B are două soluţii; C are patru soluţii; D are o infinitate de soluţii.

15. Dacă a, b, c sunt trei segmente care au lungimile $2, 3, 4$, atunci:

A a, b, c pot forma un triunghi ascuţitunghic; B a, b, c pot forma un triunghi obtuzunghic;
C a, b, c pot forma un triunghi echilateral; D a, b, c pot forma un triunghi.

16. Se consideră vectorii $\vec{u} = (m - 1)\vec{a} + 2\vec{b}$ şi $\vec{v} = 3\vec{a} + m\vec{b}$, unde $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sunt vectori necoliniari. Câte valori poate avea parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ să fie coliniari?

A 0; B 1; C 2; D 3.

17. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A. Dacă $AB = 2c$, $BC = 2a$, $AC = 2b$, R şi r sunt raza cercului circumscris, respectiv înscris în triunghiul dat, atunci

$\boxed{\text{A}}$ $\mathcal{A}ria(_{\Delta}ABC) = 2bc$ $\boxed{\text{B}}$ $R = \frac{a}{2}$ $\boxed{\text{C}}$ $AB + AC = 2(R + r)$ $\boxed{\text{D}}$ $r = \frac{2bc}{a+b+c}$.

18. Dacă A, B, C, M sunt puncte distincte într-un plan astfel încât

$$6\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{BC},$$

atunci:

$\boxed{\text{A}}$ B, C, M sunt coliniare; $\boxed{\text{B}}$ B, C, M sunt necoliniare;
$\boxed{\text{C}}$ $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} < 0$; $\boxed{\text{D}}$ $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{BC} > 0$.

19. Se consideră punctele $A(1, -1)$, $B(3, -1)$, $A'(-4, -2)$ şi $B'(0, -2)$. Punctele C şi C' se află pe parabola $\mathcal{P}$ de ecuaţie $y = x^2$. Notăm cu α aria triunghiului ABC şi cu α' aria triunghiului $A'B'C'$.

$\boxed{\text{A}}$ Există un punct P pe parabola $\mathcal{P}$ astfel încât $C = C' = P$ şi $\alpha = \alpha'$.
$\boxed{\text{B}}$ Există un unic punct C astfel încât triunghiul ABC să fie dreptunghic.
$\boxed{\text{C}}$ Există cel puţin un punct C cu coordonate numere întregi astfel încât α să fie un număr prim.
$\boxed{\text{D}}$ Există cel puţin un punct C' astfel încât latura $A'C'$ să fie de lungime $3\sqrt{2}$.

20. Considerăm ecuaţia dreptei $d : x - y = 1$ şi punctele $A(-1, 0)$ şi $B(1, 2)$. Oricare ar fi $M \in d$, notăm cu s_M suma lungimilor segmentelor $[AM]$ şi $[BM]$. Atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + 2$; $\boxed{\text{B}}$ $\forall M \in d : s_M \leq \sqrt{2} + 4$;
$\boxed{\text{C}}$ $\forall M \in d : s_M \geq \sqrt{2} + \sqrt{10}$; $\boxed{\text{D}}$ $\exists M \in d$ astfel încât $s_M = \sqrt{2} + 2$.

21. Limita şirului $a_n = n\left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\right), \forall n \geq 1$ este

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{4}$; $\boxed{\text{C}}$ 0; $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$.

22. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ fie $a_n = \frac{n!}{n^n}$. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

$\boxed{\text{A}}$ Şirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict crescător. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 1$.
$\boxed{\text{C}}$ $a_{2021} \leq \frac{1}{2021}$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

23. Notăm $I = \displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \frac{\cos^2 \frac{x}{2}}{x + \sin x} dx$. Valoare lui I este

$\boxed{\text{A}}$ $\frac{\ln 2}{2}$; $\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{2}$; $\boxed{\text{C}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $\frac{\ln 3}{3}$.

24. Notăm cu A mulţimea numerelor reale a pentru care funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2(x + a), \forall x \in \mathbb{R}$ admite exact două puncte de extrem.

$\boxed{\text{A}}$ $A = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [0, +\infty)$; $\boxed{\text{B}}$ $A = (-\frac{3}{2}, 0)$; $\boxed{\text{C}}$ $A = \emptyset$; $\boxed{\text{D}}$ $A = \mathbb{R}^*$.

25. Fie $f \colon \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - 2, \ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0 \\ \\ \frac{\sin x}{x}, \ 0 < x \leq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Atunci

$\boxed{\text{A}}$ funcţia $|f|$ este continuă în 0;
$\boxed{\text{B}}$ funcţia f are cel puţin un zero în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, pentru că $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$;
$\boxed{\text{C}}$ funcţia f nu are niciun zero în intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$;
$\boxed{\text{D}}$ funcţia f nu are limită în 0.

26. Considerăm funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definită prin $f(x) = 2^{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(-x) = 0$;

$\boxed{\text{B}}$ funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $[1, \infty)$;

$\boxed{\text{C}}$ inegalitatea $f'(x) \geq xf(x)$ are loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$;

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f'(x)}{(2x+1)f(x)} = 1$.

27. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie continuă al cărei grafic admite asimptote orizontale spre $-\infty$ şi spre $+\infty$. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii:

$\boxed{\text{A}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$;

$\boxed{\text{B}}$ funcţia f este mărginită;

$\boxed{\text{C}}$ graficul funcţiei f intersectează orice dreaptă orizontală în cel puţin un punct;

$\boxed{\text{D}}$ ecuaţia $f(x) = x^{2021}$ are cel puţin o soluţie în $\mathbb{R}$.

28. Se notează cu I valoarea integralei $\displaystyle\int_0^1 x \ln(1+x)\,\mathrm{d}x$. Atunci

$\boxed{\text{A}}$ $I = \dfrac{1}{4} + \ln 2$;

$\boxed{\text{B}}$ $I \in \mathbb{Q}$;

$\boxed{\text{C}}$ $0 < I < \ln 2$;

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2} \ln \dfrac{3}{2} < I < \dfrac{1}{2} \ln 2$.

29. Notăm cu A mulţimea numerelor reale a pentru care ecuaţia $\sqrt{3-x} - x = a$ are cel puţin o soluţie reală.

$\boxed{\text{A}}$ $(-\infty, -10) \subset A$;

$\boxed{\text{B}}$ $\{-10, -9, -8\} \subset A$;

$\boxed{\text{C}}$ $\{-3, -2, -1, 0\} \subset A$;

$\boxed{\text{D}}$ $\{8, 9, 10\} \subset A$.

30. Fie

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x - x\cos x}{x^2 + \sin^2 x} \mathrm{d}x.$$

Valoarea lui I este

$\boxed{\text{A}}$ 0;

$\boxed{\text{B}}$ $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - \operatorname{arctg}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\right)$;

$\boxed{\text{C}}$ $\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}\right) - 1$;

$\boxed{\text{D}}$ 1.