UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Concurs MATE-INFO UBB 2021
Proba scrisă la MATEMATICĂ

NOTĂ IMPORTANTĂ: Problemele pot avea unul sau mai multe răspunsuri corecte, care trebuie indicate de candidat în sistemul electronic. Notarea subiectului de tip grilă se face conform sistemului de punctare parţială din regulamentul concursului.

1. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale nenule în progresie geometrică, cu raţia $r \in \mathbb{R}$. Ştiind că expresia

$$E = \frac{4a_4}{a_2} + \frac{4a_8}{a_7} + \frac{a_5 \cdot a_7}{a_6^2}$$

are valoarea minimă posibilă, să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $r = \frac{1}{2}$.

B $\left|\frac{a_{12}}{a_9}\right| < \frac{1}{4}$.

C $a_5a_2 + 2a_1a_5 + a_0a_5 > 0$.

D $a_na_{n+1} < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

2. Fie dreptele d_1 şi d_2 respectiv de ecuaţii $x - 3y + 1 = 0$ şi $3x + y + 2 = 0$, a un număr real şi P punctul de coordonate $(0, a)$. Punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 şi d_2, dacă a ia valoarea

A $-\frac{1}{4}$. B 0. C $\frac{1}{4}$. D $\frac{3}{2}$.

3. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $A_x^6 - 24xC_x^4 - 11A_x^4 = 0$ este

A $\{1\}$. B $\{9\}$. C $\{5\}$. D $\{1, 9\}$.

4. Fie $x > 0$. Coeficientul binomial al termenului care îl conţine pe x^6 din dezvoltarea binomului

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{2021}$$

este

A C_{2021}^{1435}. B C_{2021}^{586}. C C_{2021}^{587}. D C_{2021}^{1434}.

5. Fie M, N, P respectiv Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ respectiv $[DA]$ al patrulaterului oarecare $ABCD$. Atunci

A $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

B $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$.

C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

D $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şirul de termen general

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n}\right).$$

Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. B $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$. C $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$. D $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

7. Dacă $\log_{12} 27 = a$, atunci valoarea lui $\log_6 16$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 4. $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$. $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{4+a}{4-a}$. $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{4(3+a)}{3-a}$.

8. Pe intervalul $(-1, 1)$ definim legea de compoziţie „$*$" prin $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x, y \in (-1, 1)$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Elementul neutru în raport cu „$*$" este $\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3} * (\frac{1}{3} * \frac{1}{3}) = \frac{5}{9}$.

$\boxed{\text{C}}$ Legea de compoziţie „$*$" este asociativă.

$\boxed{\text{D}}$ Simetricul lui $\frac{1}{3}$ în raport cu „$*$" este $\frac{1}{9}$.

9. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + a, & x \in (-\infty, 0], \\ bx^3, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$ sunt parametri. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Dacă $a = 0$ şi $b \in \mathbb{R}$, atunci funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{B}}$ Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci funcţia f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci funcţia f este discontinuă în 0.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

10. Dacă $\cos x = -\dfrac{1}{7}$ şi $\cos y = -\dfrac{13}{14}$, unde $x, y \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, atunci diferenţa $x - y$ poate fi

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{\pi}{3}$. $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\pi}{6}$. $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi}{3}$. $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{2\pi}{3}$.

11. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se defineşte funcţia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $f_n(x) = (2-x)^n,\ x \in \mathbb{R}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $0 < f_n(x) < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x \in [1, 2]$.

$\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, pentru orice $x \in [1, 2]$.

$\boxed{\text{C}}$ Şirul $\Big(f_n(4)\Big)_{n\geq 1}$ are un subşir crescător.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(4) = \infty$.

12. Fie ABC un triunghi nedegenerat astfel încât lungimea segmentului $[BC]$ este $\sqrt{3}$, măsura unghiului $\widehat{B}$ este $60°$ şi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC este 1. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Aria triunghiului ABC este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ Perimetrul triunghiului ABC este $3\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{C}}$ Triunghiul ABC este echilateral.

$\boxed{\text{D}}$ Lungimea razei cercului înscris triunghiului ABC este $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Considerăm ecuaţiile dreptelor $d_1 : x = 1$ şi $d_2 : y = 1$ într-un plan cu un sistem de coordonate carteziene cu originea în O. Oricare ar fi A, B, C puncte în plan astfel încât O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat având una dintre diagonale $[AB]$ cu $A \in d_1$ şi $B \in d_2$, avem:

$\boxed{\text{A}}$ $C \in d$, unde $d : x - y = 0$.

$\boxed{\text{B}}$ Distanţa dintre A şi B este cel puţin egală cu $\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{C}}$ $C \in d$, unde $d : x + y = 2$.

$\boxed{\text{D}}$ Aria pătratului determinat de O, A, B, C este cel puţin egală cu 1.

14. Fie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Funcţia f este derivabilă în punctul $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

$\boxed{\text{B}}$ Funcţia f are exact un punct de extrem local.

$\boxed{\text{C}}$ Funcţia f are cel puţin un punct de minim global.
$\boxed{\text{D}}$ $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$.

15. Relativ la un reper cartezian ortonormat al planului, se consideră punctele $A(7,5)$, $B(9,1)$. Mediatoarea segmentului $[AB]$ este $d : x - 2y = 2$. Notăm cu $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor cercurilor având centrul pe dreapta d, şi care trec prin A şi B. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Există în $\mathcal{C}$ un cerc cu aria egală cu π.
$\boxed{\text{B}}$ Există în $\mathcal{C}$ un cerc cu aria egală cu 17.
$\boxed{\text{C}}$ Există în $\mathcal{C}$ un cerc care intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct.
$\boxed{\text{D}}$ Pentru punctul $D(3,3)$, cercul circumscris triunghiului ABD se află în $\mathcal{C}$.

16. Se consideră ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

în care toate matricele care apar sunt considerate matrice cu elemente numere reale. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Indiferent ce valoare ia parametrul $a \in \mathbb{R}$, nu există matrice din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care să verifice (1).
$\boxed{\text{B}}$ Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, atunci ecuaţia (1) are cel puţin o soluţie.
$\boxed{\text{C}}$ Ecuaţia (1) are cel puţin o soluţie pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
$\boxed{\text{D}}$ Dacă $\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, atunci ecuaţia (1) nu are nicio soluţie.

17. Se notează cu ℓ valoarea limitei $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^{\operatorname{tg} x}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $\ell = \infty$. $\boxed{\text{B}}$ $\ell < 1$. $\boxed{\text{C}}$ $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. $\boxed{\text{D}}$ $\ell \in (2, \infty)$.

18. Fie v valoarea minimă a expresiei $E(x,y) = x^2 + 2y^2$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, unde x şi y verifică ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Atunci

$\boxed{\text{A}}$ $v > 0$. $\boxed{\text{B}}$ $v = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $v < 1$. $\boxed{\text{D}}$ $v = -\frac{1}{3}$.

19. Specificaţi care dintre următoarele condiţii implică faptul că dreptele $(d_1) : ax + by + c = 0$, $(d_2) : bx + cy + a = 0$ şi $(d_3) : cx + ay + b = 0$ au cel puţin un punct comun, a, b, c fiind numere reale nenule:

$\boxed{\text{A}}$ $a + b + c = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
$\boxed{\text{C}}$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. $\boxed{\text{D}}$ $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

20. Fie $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ o funcţie care admite primitive şi fie F o primitivă a lui f. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care

$$F(4m^2 - 12m + 5) \geq F(3m^2 - 6m - 4)$$

este:

$\boxed{\text{A}}$ $m = 1$. $\boxed{\text{B}}$ $m = 2$. $\boxed{\text{C}}$ $m = 3$. $\boxed{\text{D}}$ $m = 4$.

21. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ definită prin $f(x) = \cos x + i \sin x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$. $\boxed{\text{B}}$ f este injectivă.

$\boxed{\text{C}}$ f este surjectivă. $\boxed{\text{D}}$ f este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R}, +)$ şi $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

22. Dacă S este mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei $2\cos^2 x \geq \cos x + 1$, atunci

$\boxed{\text{A}}$ $2020\pi \in S$. $\boxed{\text{B}}$ $2021\pi \in S$. $\boxed{\text{C}}$ $\left[\frac{2018\pi}{3}, \frac{2020\pi}{3}\right] \subset S$. $\boxed{\text{D}}$ $20 \in S$.

23. Se notează cu ℓ valoarea limitei $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t\sqrt{t}} \displaystyle\int_0^t \left(\sqrt{x} + \sin\left(x^2\right)\right) \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $\ell = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\ell = \dfrac{2}{3}$. $\boxed{\text{C}}$ $\ell = \infty$. $\boxed{\text{D}}$ $\ell = \pi$.

24. Să presupunem că există numere complexe a, b, c, d diferite de zero, astfel încât $z \in \mathbb{C}$ satisface ecuaţiile $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ și $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$. În acest caz, toate valorile posibile (complexe) ale lui z sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\{i, -i\}$. $\boxed{\text{B}}$ $\{1, -1\}$. $\boxed{\text{C}}$ $\{1, i, -1\}$. $\boxed{\text{D}}$ $\{1, i, -1, -i\}$.

25. Fie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = |x - 2k|, \quad \text{pentru orice } x \in (2k-1, 2k+1] \text{ şi orice } k \in \mathbb{Z}.$$

Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Funcţia f nu este continuă pe $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{B}}$ Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

$\boxed{\text{C}}$ Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$. $\boxed{\text{D}}$ Funcţia f nu este continuă în punctele mulţimii $\{2k-1 : k \in \mathbb{Z}\}$.

26. Fie $I = \lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $I = \infty$. $\boxed{\text{B}}$ $I = \frac{\pi}{8}$. $\boxed{\text{C}}$ $I = \frac{\pi}{4}$. $\boxed{\text{D}}$ $I < \frac{1}{2}$.

27. Fie $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ şi fie n numărul punctelor de extrem local ale lui f. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.
afirmaţii.

$\boxed{\text{A}}$ $n = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $n = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $n = 2$. $\boxed{\text{D}}$ $n = 3$.

28. În triunghiul ABC mediana din vârful A al triunghiului este egală cu latura BC. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $5\sin^2 A - \cos 2B - \cos 2C = -2$. $\boxed{\text{B}}$ $5\sin^2 A + \cos 2B + \cos 2C = 2$.

$\boxed{\text{C}}$ $3\sin^2 A - 4\sin B \sin C \cos A = 0$. $\boxed{\text{D}}$ $4\sin^2 A - 3\sin B \sin C \cos A = 0$.

29. Un segment MN paralel cu bazele unui trapez, cu capetele segmentului aflate pe cele două laturi neparalele împarte aria trapezului în două părţi egale. Dacă lungimea bazelor este a şi b, $a > b$, atunci pentru lungimea l a segmentului MN avem:

$\boxed{\text{A}}$ $l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. $\boxed{\text{B}}$ $l = \sqrt{ab}$. $\boxed{\text{C}}$ $l > \frac{a+b}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ $l = \dfrac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$.

30. Notăm cu A mulţimea numerelor naturale n care au ultima cifră 6 şi au proprietatea că dacă mutăm această cifră în faţa numărului, obţinem un număr de 4 ori mai mare. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Dacă $n \in A$, atunci $3 \mid n$. $\boxed{\text{B}}$ Există $n \in A$ astfel încât $12 \mid n$.

$\boxed{\text{C}}$ Există $n \in A$ care are 8 cifre. $\boxed{\text{D}}$ Există $n \in A$ care are toate cifrele diferite două câte două.