BABEŞ-BOLYAI TUDOMÁNYEGYETEM KOLOZSVÁR
MATEMATIKA ÉS INFORMATIKA KAR

BBTE Matek-Infó Verseny 2021
MATEMATIKA írásbeli próba

FONTOS MEGJEGYZÉS: A feladatoknak egy vagy több helyes válasza is lehet, amelyeket a versenyző az elektronikus rendszerben kell bejelöljön. A feleletválasztós feladatok osztályozása a versenyszabályzat részleges pontozási rendszere alapján történik.

1. Legyen $(a_n)_{n\geq 0}$ egy nem nulla számokból álló mértani haladvány, amelynek állandó hányadosa $r \in \mathbb{R}$. Ha az

$$E = \frac{4a_4}{a_2} + \frac{4a_8}{a_7} + \frac{a_5 \cdot a_7}{a_6^2}$$

kifejezés a lehető legkisebb értéket veszi fel, akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $r = \frac{1}{2}$.

B $\left|\frac{a_{12}}{a_9}\right| < \frac{1}{4}$.

C $a_5a_2 + 2a_1a_5 + a_0a_5 > 0$.

D $a_na_{n+1} < 0$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

2. Legyenek d_1 és d_2 az $x - 3y + 1 = 0$, illetve $3x + y + 2 = 0$ egyenletű egyenesek, a egy valós szám és P a $(0, a)$ koordinátájú pont. A P pont a d_1 és d_2 egyenesektől egyenlő távolságra van, ha az a szám értéke

A $-\frac{1}{4}$.

B 0.

C $\frac{1}{4}$.

D $\frac{3}{2}$.

3. A $V_x^6 - 24xC_x^4 - 11V_x^4 = 0$ egyenlet megoldásainak halmaza

A $\{1\}$.

B $\{9\}$.

C $\{5\}$.

D $\{1, 9\}$.

4. Tetszőleges $x > 0$ szám esetén a

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{2021},$$

binom kifejtésének az x^6-t tartalmazó tagjában a binomiális együttható

A C_{2021}^{1435}.

B C_{2021}^{586}.

C C_{2021}^{587}.

D C_{2021}^{1434}.

5. Legyenek M, N, P, Q egy $ABCD$ négyszög AB, BC, CD, DA oldalainak felezőpontjai. Ekkor

A $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.

B $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$.

C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.

D $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

6. Az $(a_n)_{n\geq 1}$ számsorozat általános tagja

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n}\right).$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

B $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$.

C $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2$.

D $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

7. Ha $\log_{12} 27 = a$, akkor $\log_6 16$ értéke

$\boxed{\text{A}}$ 4. $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$. $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{4+a}{4-a}$. $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{4(3+a)}{3-a}$.

8. A $(-1,1)$ intervallumon értelmezzük a következő „$*$” műveletet: $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, minden $x, y \in (-1,1)$ esetén. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ A semleges elem a „$*$” műveletre nézve $\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\frac{1}{3} * (\frac{1}{3} * \frac{1}{3}) = \frac{5}{9}$.

$\boxed{\text{C}}$ A „$*$” művelet asszociatív.

$\boxed{\text{D}}$ A $\frac{1}{3}$ inverze a „$*$” műveletre nézve $\frac{1}{9}$.

9. Értelmezzük az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + a, & x \in (-\infty, 0], \\ bx^3, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

szabály által, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Ha $a = 0$ és $b \in \mathbb{R}$, akkor az f függvény folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon.

$\boxed{\text{B}}$ Ha $a = 1$ és $b = -1$, akkor az f függvény szigorúan csökkenő az $\mathbb{R}$ halmazon.

$\boxed{\text{C}}$ Ha $a = 1$ és $b = -1$, akkor az f függvény nem folytonos a 0-ban.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$, bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.

10. Ha $\cos x = -\dfrac{1}{7}$ és $\cos y = -\dfrac{13}{14}$, ahol $x, y \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, akkor az $x - y$ különbség lehet

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{\pi}{3}$. $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\pi}{6}$. $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi}{3}$. $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{2\pi}{3}$.

11. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük az $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = (2-x)^n$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket. Ekkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $0 < f_n(x) < 1$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ és minden $x \in [1, 2]$ esetén.

$\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$, minden $x \in [1, 2]$ esetén.

$\boxed{\text{C}}$ Az $\big(f_n(4)\big)_{n \geq 1}$ sorozatnak létezik egy növekvő részsorozata.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(4) = \infty$.

12. Legyen ABC egy olyan nem elfajult háromszög, hogy a BC szakasz hossza $\sqrt{3}$, a $\widehat{B}$ mértéke $60°$ és az ABC háromszög köré írt kör sugara 1. Ekkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az ABC háromszög területe $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ Az ABC háromszög kerülete $3\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{C}}$ Az ABC háromszög egyenlő oldalú.

$\boxed{\text{D}}$ Az ABC háromszög beírt körének sugara $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. A síkban felveszünk egy O origójú Descartes-féle koordináta-rendszert, melyben tekintjük a $d_1 : x = 1$ és $d_2 : y = 1$ egyenletű síkbeli egyeneseket. Az alábbi állítások közül melyek igazak olyan A, B, C síkbeli pontok esetén, ahol $A \in d_1$, $B \in d_2$ és O, A, B, C egy $[AB]$ átlójú négyzet csúcsai?

$\boxed{\text{A}}$ $C \in d$, ahol $d : x - y = 0$.

$\boxed{\text{B}}$ Az A és B pontok közötti távolság legalább $\sqrt{2}$.

$\boxed{\text{C}}$ $C \in d$, ahol $d : x + y = 2$.

$\boxed{\text{D}}$ Az O, A, B, C csúcsú négyzet területe legalább 1.

14. Tekintjük az $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}$ függvényt. A következő állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az f függvény deriválható az $x \in \mathbb{R}$ pontban $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

$\boxed{\text{B}}$ Az f függvénynek egyetlen egy helyi szélsőérték-pontja van.

C Az f függvénynek van legalább egy globális minimum pontja.

D $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$.

15. A sík egy Descartes-féle koordináta-rendszerében tekintjük az $A(7,5)$ és $B(9,1)$ pontokat. Az AB szakasz felezőmerőlegese $d : x - 2y = 2$. Jelölje $\mathcal{C}$ azon körök halmazát, amelyek középpontja a d egyenesen van, és átmennek az A és B pontokon. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A A $\mathcal{C}$ halmazban van olyan kör, amelynek területe π.

B A $\mathcal{C}$ halmazban van olyan kör, amelynek területe 17.

C A $\mathcal{C}$ halmazban van olyan kör, amely mindegyik koordinátatengelyt egy pontban metszi.

D A $D(3,3)$ pont esetén az ABD háromszög köréírt kör benne van a $\mathcal{C}$ halmazban.

16. Tekintjük a valós együtthatós mátrixok következő egyenletét:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Az $a \in \mathbb{R}$ paraméter értékétől függetlenül nem létezik olyan mátrix az $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ halmazban, amelyre teljesül az (1) egyenlet.

B Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, akkor az (1) egyenletnek van legalább egy megoldása.

C Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén az (1) egyenletnek van legalább egy megoldása.

D Ha $\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, akkor az (1) egyenletnek nincs megoldása.

17. Jelölje ℓ a $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^{\operatorname{tg} x}$ határértéket. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $\ell = \infty$.

B $\ell < 1$.

C $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

D $\ell \in (2, \infty)$.

18. Legyen v az $E(x,y) = x^2 + 2y^2$ kifejezés minimuma, ahol $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ teljesítik a

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

egyenletet. Ekkor

A $v > 0$.

B $v = 1$.

C $v < 1$.

D $v = -\dfrac{1}{3}$.

19. Ha a, b, c nem nulla valós számok, akkor az alábbi feltételek közül melyekből következik, hogy a $(d_1) : ax + by + c = 0$, $(d_2) : bx + cy + a = 0$ és $(d_3) : cx + ay + b = 0$ egyeneseknek van legalább egy közös pontja?

A $a + b + c = 0$.

B $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

C $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$.

D $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

20. Legyen $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ egy primitiválható függvény, amelynek primitívje F. Az $m \in \mathbb{R}$ paraméter melyre teljesül az

$$F(4m^2 - 12m + 5) \geq F(3m^2 - 6m - 4)$$

egyenlőtlenség:

A $m = 1$.

B $m = 2$.

C $m = 3$.

D $m = 4$.

21. Tekintjük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}^*$, $f(x)=\cos x+i\sin x$ függvényt. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ f egy csoportmorfizmus az $(\mathbb{R},+)$ és $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ csoportok között. $\boxed{\text{B}}$ f injektív.

$\boxed{\text{C}}$ f szürjektív. $\boxed{\text{D}}$ f egy izomorfizmus az $(\mathbb{R},+)$ és $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ csoportok között.

22. Ha a $2\cos^2 x\geq \cos x+1$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza S, akkor

$\boxed{\text{A}}$ $2020\pi\in S$. $\boxed{\text{B}}$ $2021\pi\in S$. $\boxed{\text{C}}$ $\left[\frac{2018\pi}{3},\frac{2020\pi}{3}\right]\subset S$. $\boxed{\text{D}}$ $20\in S$.

23. Jelölje ℓ a $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t\sqrt{t}}\int_0^t\left(\sqrt{x}+\sin\left(x^2\right)\right)\mathrm{d}x$ határértéket. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $\ell=0$. $\boxed{\text{B}}$ $\ell=\dfrac{2}{3}$. $\boxed{\text{C}}$ $\ell=\infty$. $\boxed{\text{D}}$ $\ell=\pi$.

24. Feltételezzük, hogy léteznek olyan a,b,c,d nem nulla komplex számok, hogy $z\in\mathbb{C}$ teljesíti az $az^3+bz^2+cz+d=0$ és $bz^3+cz^2+dz+a=0$ egyenleteket. Ekkor a z összes lehetséges (komplex) értékeinek halmaza:

$\boxed{\text{A}}$ $\{i,-i\}$. $\boxed{\text{B}}$ $\{1,-1\}$. $\boxed{\text{C}}$ $\{1,i,-1\}$. $\boxed{\text{D}}$ $\{1,i,-1,-i\}$.

25. Értelmezzük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ függvényt a következő módon:

$$f(x)=|x-2k|,\quad \text{minden } x\in(2k-1,2k+1] \text{ és minden } k\in\mathbb{Z} \text{ esetén.}$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Az f függvény nem folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon.
$\boxed{\text{B}}$ Az f függvény deriválható az $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ halmazon.
$\boxed{\text{C}}$ Az f függvény deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon.
$\boxed{\text{D}}$ Az f függvény nem folytonos a $\{2k-1:k\in\mathbb{Z}\}$ halmaz pontjaiban.

26. Legyen $I=\displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t\frac{x}{x^4+2x^2+2}\mathrm{d}x$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $I=\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $I=\frac{\pi}{8}$. $\boxed{\text{C}}$ $I=\frac{\pi}{4}$. $\boxed{\text{D}}$ $I<\frac{1}{2}$.

27. Tekintjük az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ függvényt és legyen n az f függvény helyi szélsőérték pontjainak száma. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $n=0$. $\boxed{\text{B}}$ $n=1$. $\boxed{\text{C}}$ $n=2$. $\boxed{\text{D}}$ $n=3$.

28. Az ABC háromszög A csúcsából húzott oldalfelező hossza egyenlő a BC oldal hosszával. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ $5\sin^2 A-\cos 2B-\cos 2C=-2$. $\boxed{\text{B}}$ $5\sin^2 A+\cos 2B+\cos 2C=2$.

$\boxed{\text{C}}$ $3\sin^2 A-4\sin B\sin C\cos A=0$. $\boxed{\text{D}}$ $4\sin^2 A-3\sin B\sin C\cos A=0$.

29. Az MN szakasz párhuzamos egy trapéz alapjaival, a végpontjai a trapéz nem párhuzamos oldalain vannak, és a szakasz felezi a trapéz területét. Ha az alapok hossza a és b, $a>b$, akkor az MN szakasz l hosszúsága:

$\boxed{\text{A}}$ $l=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. $\boxed{\text{B}}$ $l=\sqrt{ab}$. $\boxed{\text{C}}$ $l>\frac{a+b}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ $l=\dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

30. Legyen A azon n természetes számok halmaza, melyek utolsó számjegye 6 és azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy ha ezt a számjegyet a szám elejére helyezzük, akkor egy nála négyszer nagyobb számot kapunk. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{\text{A}}$ Ha $n\in A$, akkor $3\mid n$. $\boxed{\text{B}}$ Létezik $n\in A$ úgy, hogy $12\mid n$.

$\boxed{\text{C}}$ Létezik 8 számjegyű $n\in A$ szám. $\boxed{\text{D}}$ Létezik $n\in A$ melynek az összes számjegye különböző.