BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

MATHE-INFO UBB WETTBEWERB 2021
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

WICHTIG ZU BEACHTEN: Jede Ankreuzaufgabe hat eine oder mehrere richtige Antworten, die vom Kandidaten im elektronischen System angegeben werden müssen. Die Bewertung der Ankreuzaufgaben erfolgt nach dem in der Prüfungsordnung vorgesehenen Benotungssystem.

1. Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine geometrische Folge reeller von Null verschiedener Zahlen mit dem Quotienten $r \in \mathbb{R}$. Wenn bekannt ist, dass der Ausdruck

$$E = \frac{4a_4}{a_2} + \frac{4a_8}{a_7} + \frac{a_5 \cdot a_7}{a_6^2}$$

den kleinstmöglichen Wert hat, entscheide man, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A $r = \frac{1}{2}$.
B $\left|\frac{a_{12}}{a_9}\right| < \frac{1}{4}$.
C $a_5a_2 + 2a_1a_5 + a_0a_5 > 0$.
D $a_na_{n+1} < 0$, für alle $n \in \mathbb{N}$.

2. Es seien d_1 und d_2 die Geraden mit den Gleichungen $x - 3y + 1 = 0$ und $3x + y + 2 = 0$, a eine reelle Zahl und P der Punkt mit den Koordinaten $(0, a)$. Der Punkt P ist von den Geraden d_1 und d_2 gleich weit entfernt, wenn a gleich

A $-\frac{1}{4}$ ist.
B 0 ist.
C $\frac{1}{4}$ ist.
D $\frac{3}{2}$ ist.

3. Die Lösungsmenge der Gleichung $A_x^6 - 24xC_x^4 - 11A_x^4 = 0$ ist

A $\{1\}$.
B $\{9\}$.
C $\{5\}$.
D $\{1, 9\}$.

4. Es sei $x > 0$. Der Binomialkoeffizient des Gliedes, welches im Ausdruck

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{2021}$$

x^6 enthält, ist

A C_{2021}^{1435}.
B C_{2021}^{586}.
C C_{2021}^{587}.
D C_{2021}^{1434}.

5. Es seien M, N, P beziehungsweise Q die Mittelpunkte der Seiten $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ beziehungsweise $[DA]$ des allgemeinen Vierecks $ABCD$. Dann gelten

A $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$.
B $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$.
C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$.
D $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

6. Es sei $(a_n)_{n\geq 1}$ die Folge mit dem allgemeinen Glied

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 + \frac{n}{n}\right).$$

Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$ B $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 1.$ C $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2.$ D $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

7. Ist $\log_{12} 27 = a$, dann beträgt $\log_6 16$

A $4.$ B $\dfrac{4(3-a)}{3+a}.$ C $\dfrac{4+a}{4-a}.$ D $\dfrac{4(3+a)}{3-a}.$

8. Auf dem Intervall $(-1,1)$ wird die Operation „$*$“ durch $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, für alle $x, y \in (-1,1)$, definiert. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Das neutrale Element der Operation „$*$“ ist $\frac{1}{2}$.

B $\frac{1}{3} * (\frac{1}{3} * \frac{1}{3}) = \frac{5}{9}$.

C Die Operation „$*$“ ist assoziativ.

D Das symmetrische Element von $\frac{1}{3}$ bezüglich „$*$“ ist $\frac{1}{9}$.

9. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die wie folgt definierte Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + a, & x \in (-\infty, 0], \\ bx^3, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ Parameter sind. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Sind $a = 0$ und $b \in \mathbb{R}$, dann ist die Funktion f stetig auf $\mathbb{R}$.

B Sind $a = 1$ und $b = -1$, dann ist die Funktion f streng fallend auf $\mathbb{R}$.

C Sind $a = 1$ und $b = -1$, dann ist die Funktion f unstetig in 0.

D $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

10. Sind $\cos x = -\dfrac{1}{7}$ und $\cos y = -\dfrac{13}{14}$, mit $x, y \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, dann kann die Differenz $x - y$ gleich

A $-\dfrac{\pi}{3}$ sein. B $\dfrac{\pi}{6}$ sein. C $\dfrac{\pi}{3}$ sein. D $\dfrac{2\pi}{3}$ sein.

11. Für alle $n \in \mathbb{N}^*$ sei $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f_n(x) = (2-x)^n,\ x \in \mathbb{R}$, definierte Funktion. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A $0 < f_n(x) < 1$, für alle $n \in \mathbb{N}^*$ und alle $x \in [1,2]$.

B $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, für alle $x \in [1,2]$.

C Die Folge $\Big(f_n(4)\Big)_{n\geq 1}$ hat eine wachsende Teilfolge.

D $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(4) = \infty$.

12. Es sei ABC ein nichtentartetes Dreieck mit den Eigenschaften, dass die Länge der Strecke $[BC]$ gleich $\sqrt{3}$, der Winkel $\widehat{B}$ gleich 60° und der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC gleich 1 ist. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC ist $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

B Der Umfang des Dreiecks ABC ist $3\sqrt{3}$.

C Das Dreieck ABC ist gleichseitig.

D Der Radius des Inkreises des Dreiecks ABC ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13. Gegeben seien die Geraden $d_1 : x = 1$ und $d_2 : y = 1$ in einer Ebene mit einem kartesischen Koordinatensystem mit Mittelpunkt in O. Für alle Punkte A, B, C dieser Ebene mit den Eigenschaften, dass O, A, B, C die Eckpunkte eines Quadrates sind und eine der Diagonalen $[AB]$ ist, mit $A \in d_1$ und $B \in d_2$, gelten:

A $C \in d$, wobei $d : x - y = 0$.

B Die Entfernung zwischen A und B ist mindestens $\sqrt{2}$.

C $C \in d$, wobei $d : x + y = 2$.

D Der Flächeninhalt des von O, A, B, C bestimmten Quadrates ist mindestens 1.

14. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}$ definierte Funktion. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Die Funktion f ist differenzierbar in $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

B Die Funktion f hat genau eine lokale Extremstelle.

C Die Funktion hat mindestens eine globale Minimalstelle.

D $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$.

15. Gegeben seien die Punkte $A(7, 5)$ und $B(9, 1)$ in einem kartesischen Koordinatensystem. Die Mittelsenkrechte der Strecke $[AB]$ ist $d : x - 2y = 2$. Es sei $\mathcal{C}$ die Menge aller Kreise, deren Mittelpunkte auf der Geraden d liegen und die A und B enthalten. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Es gibt einen Kreis in $\mathcal{C}$, dessen Flächeninhalt gleich π ist.

B Es gibt einen Kreis in $\mathcal{C}$, dessen Flächeninhalt gleich 17 ist.

C Es gibt einen Kreis in $\mathcal{C}$, der jede der beiden Achsen des Koordinatensystems in genau einem Punkt anschneidet.

D Für den Punkt $D(3, 3)$ liegt der Umkreis des Dreiecks ABD in $\mathcal{C}$.

16. Gegeben sei die Matrizengleichung

$$\begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

in der alle auftretenden Matrizen reelle Einträge haben. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Egal, welchen Wert der Parameter $a \in \mathbb{R}$ hat, gibt es keine Matrix in $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, die (1) erfüllt.

B Ist $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, dann hat die Gleichung wenigstens eine Lösung.

C Die Gleichung (1) hat für jedes $a \in \mathbb{R}$ wenigstens eine Lösung.

D Ist $\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, dann hat die Gleichung (1) keine Lösung.

17. Es sei ℓ der Wert des Grenzwertes $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^{\operatorname{tg} x}$. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A $\ell = \infty$.

B $\ell < 1$.

C $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

D $\ell \in (2, \infty)$.

18. Es sei v der kleinste Wert des Ausdruckes $E(x,y) = x^2 + 2y^2$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$, wobei x und y der Gleichung

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

genügen. Dann gelten

$\boxed{\text{A}}$ $v > 0$. $\boxed{\text{B}}$ $v = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $v < 1$. $\boxed{\text{D}}$ $v = -\frac{1}{3}$.

19. Man gebe an, welche von den folgenden Bedingungen die Tatsache implizieren, dass die Geraden $(d_1) : ax + by + c = 0$, $(d_2) : bx + cy + a = 0$ und $(d_3) : cx + ay + b = 0$ wenigstens einen gemeinsamen Punkt haben, wobei a, b, c von Null verschiedene reelle Zahlen sind.

$\boxed{\text{A}}$ $a + b + c = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

$\boxed{\text{C}}$ $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. $\boxed{\text{D}}$ $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

20. Es sei $f : \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ eine Funktion, die Stammfunktionen besitzt, und es sei F eine Stammfunktion von f. Der Wert des Parameters $m \in \mathbb{R}$, für den

$$F(4m^2 - 12m + 5) \geq F(3m^2 - 6m - 4)$$

ist, beträgt:

$\boxed{\text{A}}$ $m = 1$. $\boxed{\text{B}}$ $m = 2$. $\boxed{\text{C}}$ $m = 3$. $\boxed{\text{D}}$ $m = 4$.

21. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ die durch $f(x) = \cos x + i \sin x$ definierte Funktion. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ f ist ein Gruppenmorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

$\boxed{\text{B}}$ f ist injektiv.

$\boxed{\text{C}}$ f ist surjektiv.

$\boxed{\text{D}}$ f ist ein Gruppenisomorphismus zwischen den Gruppen $(\mathbb{R}, +)$ und $(\mathbb{C}^*, \cdot)$.

22. Ist S die Menge der reellen Lösungen der Ungleichung $2\cos^2 x \geq \cos x + 1$, dann gelten

$\boxed{\text{A}}$ $2020\pi \in S$. $\boxed{\text{B}}$ $2021\pi \in S$. $\boxed{\text{C}}$ $\left[\frac{2018\pi}{3}, \frac{2020\pi}{3}\right] \subset S$. $\boxed{\text{D}}$ $20 \in S$.

23. Es sei ℓ der Wert des Grenzwertes $\displaystyle\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} \int_0^t \left(\sqrt{x} + \sin\left(x^2\right)\right) \mathrm{d}x$. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ $\ell = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\ell = \frac{2}{3}$. $\boxed{\text{C}}$ $\ell = \infty$. $\boxed{\text{D}}$ $\ell = \pi$.

24. Es wird vorausgesetzt, dass es komplexe von Null verschiedene Zahlen a, b, c, d gibt, so dass $z \in \mathbb{C}$ den Gleichungen $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ und $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$ genügt. In diesem Fall sind alle möglichen (komplexen) Werte von z:

$\boxed{\text{A}}$ $\{i, -i\}$. $\boxed{\text{B}}$ $\{1, -1\}$. $\boxed{\text{C}}$ $\{1, i, -1\}$. $\boxed{\text{D}}$ $\{1, i, -1, -i\}$.

25. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch

$$f(x) = |x - 2k|, \quad \text{für alle } x \in (2k-1, 2k+1] \text{ und alle } k \in \mathbb{Z},$$

definierte Funktion. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ unstetig.

$\boxed{\text{B}}$ Die Funktion f ist auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ differenzierbar.

$\boxed{\text{C}}$ Die Funktion f ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

$\boxed{\text{D}}$ Die Funktion f ist in den Punkten der Menge $\{2k-1 : k \in \mathbb{Z}\}$ unstetig.

26. Es sei $I = \lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_0^t \frac{x}{x^4+2x^2+2}\mathrm{d}x$. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ $I = \infty$. $\boxed{\text{B}}$ $I = \frac{\pi}{8}$. $\boxed{\text{C}}$ $I = \frac{\pi}{4}$. $\boxed{\text{D}}$ $I < \frac{1}{2}$.

27. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die durch $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ erklärte Funktion und es sei n die Anzahl der lokalen Extremstellen von f. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ $n = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $n = 1$. $\boxed{\text{C}}$ $n = 2$. $\boxed{\text{D}}$ $n = 3$.

28. Im Dreieck ABC ist die A enthaltende Seitenhalbierende des Dreiecks gleich der Seite BC. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ $5\sin^2 A - \cos 2B - \cos 2C = -2$. $\boxed{\text{B}}$ $5\sin^2 A + \cos 2B + \cos 2C = 2$.

$\boxed{\text{C}}$ $3\sin^2 A - 4\sin B \sin C \cos A = 0$. $\boxed{\text{D}}$ $4\sin^2 A - 3\sin B \sin C \cos A = 0$.

29. Eine Strecke MN, die parallel zu den Basen eines Trapezes ist und deren Endpunkte auf den nichtparallelen Seiten liegen, teilt den Flächeninhalt des Trapezes in zwei gleiche Teile. Sind die Längen der Basen gleich a und b, $a > b$, dann gilt für die Länge l der Strecke MN:

$\boxed{\text{A}}$ $l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. $\boxed{\text{B}}$ $l = \sqrt{ab}$. $\boxed{\text{C}}$ $l > \frac{a+b}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ $l = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

30. Es sei A die Menge der natürlichen Zahlen n, deren letzte Ziffer gleich 6 ist und welche die Eigenschaft haben, dass wenn man diese Ziffer vor die Zahl schreibt, man eine viermal größere Zahl erhält. Man entscheide, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ Ist $n \in A$, dann $3 \mid n$.

$\boxed{\text{B}}$ Es gibt $n \in A$, so dass $12 \mid n$.

$\boxed{\text{C}}$ Es gibt $n \in A$ mit 8 Ziffern.

$\boxed{\text{D}}$ Es gibt $n \in A$, deren Ziffern alle paarweise verschieden sind.