UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

SOLUŢII

Concurs MATE-INFO UBB 2021
Proba scrisă la MATEMATICĂ

1. Fie $(a_n)_{n\geq 0}$ un şir de numere reale nenule în progresie geometrică, cu raţia $r \in \mathbb{R}$. Ştiind că expresia

$$E = \frac{4a_4}{a_2} + \frac{4a_8}{a_7} + \frac{a_5 \cdot a_7}{a_6^2}$$

are valoarea minimă posibilă, să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $r = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{B}}$ $\left|\frac{a_{12}}{a_9}\right| < \frac{1}{4}$.

$\boxed{\text{C}}$ $a_5a_2 + 2a_1a_5 + a_0a_5 > 0$.

$\boxed{\text{D}}$ $a_na_{n+1} < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Soluţie. Din proprietăţile de bază ale progresiilor geometrice avem

$$E = 4r^2 + 4r + 1 = (2r+1)^2.$$

Rezultă că $r = -\frac{1}{2}$, ceea ce invalidează afirmaţia $\boxed{\text{A}}$. Avem mai departe:

$\left|\frac{a_{12}}{a_9}\right| = \left|r^3\right| = \frac{1}{8}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

$$a_5a_2 + 2a_1a_5 + a_0a_5 = a_5(a_2 + 2a_1 + a_0) = a_0r^5(a_0r^2 + 2a_0r + a_0) = a_0^2r^5(r^2 + 2r + 1) = a_0^2 \cdot \frac{-1}{32} \cdot \frac{1}{4} < 0,$$

ceea ce contrazice $\boxed{\text{C}}$.

$a_na_{n+1} = a_n^2 \cdot r = -\frac{1}{2}a_n^2 < 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, ceea ce înseamnă că $\boxed{\text{D}}$ este adevărată.

$\square$

Răspunsuri:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

2. Fie dreptele d_1 şi d_2 respectiv de ecuaţii $x - 3y + 1 = 0$ şi $3x + y + 2 = 0$, a un număr real şi P punctul de coordonate $(0, a)$. Punctul P este egal depărtat de dreptele d_1 şi d_2, dacă a ia valoarea

$\boxed{\text{A}}$ $-\frac{1}{4}$. $\boxed{\text{B}}$ 0. $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{4}$. $\boxed{\text{D}}$ $\frac{3}{2}$.

Soluţie. Distanţa de la punctul $P(0, a)$ la dreapta d_1 este dată de:

$$d(P, d_1) = \frac{|-3a+1|}{\sqrt{10}},$$

Distanţa de la punctul $P(0, a)$ la dreapta d_2 este dată de:

$$d(P, d_2) = \frac{|a+2|}{\sqrt{10}}.$$

Condiţia ca cele două distanţe să fie egale este îndeplinită pentru $a \in \{-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\}$. $\square$

Răspunsuri:

A **adevărată**; **B** **falsă**; **C** **falsă**; **D** **adevărată**.

3. Mulţimea soluţiilor ecuaţiei $A_x^6 - 24xC_x^4 - 11A_x^4 = 0$ este

A $\{1\}$. B $\{9\}$. C $\{5\}$. D $\{1, 9\}$.

Soluţie. Înlocuind şi simplificând obţinem ecuaţia de gradul doi $x^2 - 10x + 9 = 0$, cu rădăcinile 1 şi 9. Convine doar soluţia $x = 9$, din cauza condiţiilor asupra aranjamentelor şi combinărilor, $x \in \mathbb{N}, x \geq 6$. □

Răspunsuri:

A **falsă**; **B** **adevărată**; **C** **falsă**; **D** **falsă**.

4. Fie $x > 0$. Coeficientul binomial al termenului care îl conţine pe x^6 din dezvoltarea binomului

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{2021}$$

este

A C_{2021}^{1435}. B C_{2021}^{586}. C C_{2021}^{587}. D C_{2021}^{1434}.

Soluţie. $T_{k+1} = C_{2021}^k (\sqrt{x})^{2021-k} (-1)^k \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^k = (-1)^k C_{2021}^k x^{\frac{2021-k}{2} - \frac{k}{5}}$.

Din ecuaţia $\dfrac{2021-k}{2} - \dfrac{k}{5} = 6$ rezultă $7k = 5 \cdot 2009$, deci $k = 1435$. Astfel coeficientul binomial este C_{2021}^{1435} care este egal cu C_{2021}^{586}. □

Răspunsuri:

A **adevărată**; **B** **adevărată**; **C** **falsă**; **D** **falsă**.

5. Fie M, N, P respectiv Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ respectiv $[DA]$ al patrulaterului oarecare $ABCD$. Atunci

A $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$. B $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$.
C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. D $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

Soluţie. Pentru a verifica egalităţile vectoriale de mai sus, încercăm să transformăm membrul stâng al egalităţii astfel încât în el să apară vectorii din membrul drept.

Astfel, pentru a verifica veridicitatea relaţiei vectoriale de la punctul A $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ scriem

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AC}.$$

De unde rezultă că A este **falsă**.

Pentru a verifica veridicitatea relaţiei vectoriale de la punctul B $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$ scriem

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{0}.$$

De unde rezultă că B este **adevărată**.

Pentru a verifica veridicitatea relaţiei vectoriale de la punctul C $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ scriem

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}.$$

De unde rezultă că C este **adevărată**.

Pentru a verifica veridicitatea relaţiei vectoriale de la punctul D $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$ scriem

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}.$$

De unde rezultă că D este **falsă**. □

Răspunsuri:
A **falsă**; **B** **adevărată**; **C** **adevărată**; **D** **falsă**.

6. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ şirul de termen general

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right).$$

Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1.$ B $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 1.$ C $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \ln 2.$ D $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty.$

Soluţie. Avem $a_n = \dfrac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}$, deci

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(2n)}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)\cdots(2n)(2n+1)(2n+2)} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{n+1}{2(2n+1)}.$$

Rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{e}{4} < 1$, deci $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ şi prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. □

Răspunsuri:
A **falsă**; **B** **adevărată**; **C** **falsă**; **D** **adevărată**.

7. Dacă $\log_{12} 27 = a$, atunci valoarea lui $\log_6 16$ este:

A 4. B $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$. C $\dfrac{4+a}{4-a}$. D $\dfrac{4(3+a)}{3-a}$.

Soluţie. Folosind proprietăţile logaritmilor, avem:

$$\log_6 16 = 4\log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1+\log_2 3}.$$

Din relaţia

$$a = \log_{12} 27 = 3\log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1+2\log_3 2} = \frac{3\log_2 3}{2+\log_2 3},$$

rezultă că

$$\log_2 3 = \frac{2a}{3-a}.$$

Prin urmare, obţinem

$$\log_6 16 = \frac{4}{1+\log_2 3} = \frac{4}{1+\frac{2a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{3+a}.$$

□

Răspunsuri:
A **falsă**; **B** **adevărată**; **C** **falsă**; **D** **falsă**.

8. Pe intervalul $(-1,1)$ definim legea de compoziţie „$*$" prin $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, pentru orice $x, y \in (-1,1)$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Elementul neutru în raport cu „$*$" este $\frac{1}{2}$. B $\frac{1}{3} * (\frac{1}{3} * \frac{1}{3}) = \frac{5}{9}$.

C Legea de compoziţie „$*$" este asociativă. D Simetricul lui $\frac{1}{3}$ în raport cu „$*$" este $\frac{1}{9}$.

Soluţie. Se verifică uşor că $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$ pentru orice $x, y \in (-1,1)$. Avem $(x*y)*z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx} = x*(y*z)$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. Pe baza acestei formule calculăm $\frac{1}{3}*(\frac{1}{3}*\frac{1}{3}) = \frac{7}{9}$, deci $\boxed{\text{B}}$ este falsă. Din $x*e = x$ pentru orice $x \in (-1,1)$ obţinem că elementul neutru este 0, deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă. Pentru $x \in (-1,1)$, din egalitatea $x*x' = 0$ obţinem că simetricul lui x este $x' = -x$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă. □

Răspunsuri:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

9. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + a, & x \in (-\infty, 0], \\ bx^3, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$ sunt parametri. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Dacă $a = 0$ şi $b \in \mathbb{R}$, atunci funcţia f este continuă pe $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{B}}$ Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci funcţia f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{C}}$ Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci funcţia f este discontinuă în 0.

$\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ oricare ar fi $a, b \in \mathbb{R}$.

Soluţie. Funcţia f este continuă pe $(-\infty, 0)$ şi pe $(0, \infty)$, iar

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^4 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} bx^3 = 0 = f(0).$$

Deci, f este continuă pe $\mathbb{R}$.

Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este definită prin

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^3, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Evident f este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, respectiv pe $(0, \infty)$. Fie $x_1 \in (-\infty, 0]$ şi $x_2 \in (0, \infty)$, deci $x_1 < x_2$. Atunci $f(x_1) = x_1^4 + 1 \geq 1 > 0 \geq f(x_2) = -x_2^3$. Prin urmare, f este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$.

Dacă $a = 1$ şi $b = -1$, atunci $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^4 + 1 = f(0) = 1 \neq \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} -x^3 = 0$. Deci, f este discontinuă în 0.

Oricare ar fi $a \in \mathbb{R}$, avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ şi oricare ar fi $b \in (-\infty, 0)$, avem $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$. Aşadar, pentru $a \in \mathbb{R}, b \in (-\infty, 0)$ avem $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \neq \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. □

Răspunsuri:
$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

10. Dacă $\cos x = -\dfrac{1}{7}$ şi $\cos y = -\dfrac{13}{14}$, unde $x, y \in \left(\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right)$, atunci diferenţa $x - y$ poate fi

$\boxed{\text{A}}$ $-\dfrac{\pi}{3}$. $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{\pi}{6}$. $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{\pi}{3}$. $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{2\pi}{3}$.

Soluţie. Ştiind că x şi y aparţin cadranului III, diferenţa lor este în intervalul $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, astfel $\boxed{\text{D}}$ este falsă. Avem $\sin x = -\sqrt{1 - \dfrac{1}{49}} = -\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$, $\sin y = -\sqrt{1 - \dfrac{169}{196}} = -\dfrac{3\sqrt{3}}{14}$. Astfel $\cos(x - y) = \dfrac{1}{7} \cdot \dfrac{13}{14} + \dfrac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \dfrac{3\sqrt{3}}{14} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x - y \in \left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}$. Dar $\sin(x - y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, deci $x - y = \frac{\pi}{3}$. Astfel $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false iar $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. □

Răspunsuri:
A **falsă**; B **falsă**; C **adevărată**; D **falsă**.

11. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se defineşte funcţia $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ prin $f_n(x) = (2-x)^n,\ x \in \mathbb{R}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $0 < f_n(x) < 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ şi orice $x \in [1,2]$.
B $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, pentru orice $x \in [1,2]$.
C Şirul $\Big(f_n(4)\Big)_{n\geq 1}$ are un subşir crescător.
D $\lim_{n\to\infty} f_n(4) = \infty$.

Soluţie. Afirmaţia A este falsă, pentru că $f_n(1) = 1$, sau pentru că $f_n(2) = 0$. Afirmaţia B este falsă, pentru că $\lim_{n\to\infty} f_n(1) = 1$. Afirmaţia C este adevărată, pentru că subşirul $\Big(f_{2k}(4)\Big)_{k\geq 1}$ este crescător, deoarece $f_{2k}(4) = (-2)^{2k} = 4^k$, iar $\Big(4^k\Big)_{k\geq 1}$ este şir crescător. Afirmaţia D este falsă, pentru că subşirul $\Big(f_{2k}(4)\Big)_{k\geq 1}$ are limita $\lim_{k\to\infty} f_{2k}(4) = \infty$, iar subşirul $\Big(f_{2k+1}(4)\Big)_{k\geq 1}$ are limita $\lim_{k\to\infty} f_{2k+1}(4) = -\infty$. □

Răspunsuri:
A **falsă**; **B** **falsă**; **C** **adevărată**; **D** **falsă**.

12. Fie ABC un triunghi nedegenerat astfel încât lungimea segmentului $[BC]$ este $\sqrt{3}$, măsura unghiului $\widehat{B}$ este 60° şi lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC este 1. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Aria triunghiului ABC este $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.
B Perimetrul triunghiului ABC este $3\sqrt{3}$.
C Triunghiul ABC este echilateral.
D Lungimea razei cercului înscris triunghiului ABC este $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Soluţie. Teorema sinusurilor implică $\frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\sin C} = 2$, deci $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Triunghiul fiind nedegenerat $m(\widehat{A}) \neq 120^\circ$, deci $m(\widehat{A}) = 60^\circ$. Astfel $m(\widehat{C}) = 60^\circ$, $b = c = \sqrt{3}$, deci triunghiul este echilateral. Perimetrul este $3\sqrt{3}$. $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{p\cdot r}{2} \implies r = \frac{1}{2}$ (lungimea razei cercului înscris). □

Răspunsuri:
A **falsă**; B **adevărată**; C **adevărată**; D **falsă**.

13. Considerăm ecuaţiile dreptelor $d_1 : x = 1$ şi $d_2 : y = 1$ într-un plan cu un sistem de coordonate carteziene cu originea în O. Oricare ar fi A, B, C puncte în plan astfel încât O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat având una dintre diagonale $[AB]$ cu $A \in d_1$ şi $B \in d_2$, avem:

A $C \in d$, unde $d : x - y = 0$.
B Distanţa dintre A şi B este cel puţin egală cu $\sqrt{2}$.
C $C \in d$, unde $d : x + y = 2$.
D Aria pătratului determinat de O, A, B, C este cel puţin egală cu 1.

Soluţie. Fie $A(1,y) \in d_1$, $B(x,1) \in d_2$, unde $x, y \in \mathbb{R}$. Dacă O, A, B, C sunt vârfurile unui pătrat cu diagonala $[AB]$, atunci $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x + y = 0$ şi $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Aşadar, $A(1,-x)$, $B(x,1)$ şi $C(1+x, 1-x)$, unde $x \in \mathbb{R}$. $C \in d : x + y = 2$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+x^2}\sqrt{2} \geq \sqrt{2}$. $\mathcal{A}_{OACB} = 1 + x^2 \geq 1$. □

Răspunsuri:
A **falsă**; B **adevărată**; C **adevărată**; D **adevărată**.

14. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Funcţia f este derivabilă în punctul $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.
B Funcţia f are exact un punct de extrem local.
C Funcţia f are cel puţin un punct de minim global.
D $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$.

Soluţie. Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$; ea nu este derivabilă în punctele -2 şi 0, pentru că valoarea derivatei în aceste puncte nu este finită. Pentru $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ avem că

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}} = -\frac{4x+4}{3\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^4})}.$$

Rezultă că $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$, oricare ar fi $x \in (-\infty, -1) \setminus \{-2\}$, şi $f'(x) < 0$, oricare ar fi $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$. Prin urmare funcţia f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, -1]$ şi strict descrescătoare pe intervalul $[-1, \infty)$. Se obţine că punctul -1 este singurul punct de extrem local al funcţiei f (este un punct de maxim global) şi că funcţia f nu are puncte de minim global.

Funcţia f fiind strict descrescătoare pe intervalul $(0, \infty)$, rezultă că $f(5) < f(3)$, de unde se obţine $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$. □

Răspunsuri:
A adevărată; **B adevărată**; **C falsă**; **D adevărată**.

15. Relativ la un reper cartezian ortonormat al planului, se consideră punctele $A(7, 5)$, $B(9, 1)$. Mediatoarea segmentului $[AB]$ este $d : x - 2y = 2$. Notăm cu $\mathcal{C}$ mulţimea tuturor cercurilor având centrul pe dreapta d, şi care trec prin A şi B. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Există în $\mathcal{C}$ un cerc cu aria egală cu π.
B Există în $\mathcal{C}$ un cerc cu aria egală cu 17.
C Există în $\mathcal{C}$ un cerc care intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct.
D Pentru punctul $D(3, 3)$, cercul circumscris triunghiului ABD se află în $\mathcal{C}$.

Soluţie. Fie C un cerc din $\mathcal{C}$ cu centrul $M(x_M, y_M)$. Deoarece d este mediatoarea segmentului $[AB]$, raza lui C este $r = d(A, M) = d(B, M)$, deci, avem $r = d(A, M) = \sqrt{5(y_M^2 - 6y_M + 10)}$. Aceasta este o funcţie convexă, iar minimul ei se obţine pentru $y_M = 3$. Deci, cea mai mică rază a unui cerc din $\mathcal{C}$ este $\sqrt{5}$. Prin urmare A este falsă iar B este adevărată. Dacă cercul C intersectează fiecare axă de coordonate în exact un punct, atunci centrul lui, M, este la distanţe egale faţă de cele două axe. Cum punctele A şi B sunt în primul cadran şi cercul trebuie să fie în primul cadran, adică centrul cercului are coordonatele $M = M(r, r)$ cu $r > 0$. Dar M este pe dreapta d, deci $r - 2r = 2$ şi obţinem o contradicţie cu $r > 0$, deci C este falsă. Triunghiul ABD este isoscel şi dreptunghic, deci centrul cercului circumscris este mijlocul ipotenuzei, adică este punctul $O_1(6, 2)$. Dar $O_1 \in d$, deci D este adevărată. □

Răspunsuri:
A falsă; **B adevărată**; **C falsă**; **D adevărată**.

16. Se consideră ecuaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

în care toate matricele care apar sunt considerate matrice cu elemente numere reale. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Indiferent ce valoare ia parametrul $a \in \mathbb{R}$, nu există matrice din $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ care să verifice (1).
B Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, atunci ecuaţia (1) are cel puţin o soluţie.
C Ecuaţia (1) are cel puţin o soluţie pentru orice $a \in \mathbb{R}$.
D Dacă $\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, atunci ecuaţia (1) nu are nicio soluţie.

Soluţie. Matricea X care verifică (1), dacă există, este matrice coloană de forma

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Rezultă imediat că varianta de răspuns $\boxed{\text{A}}$ este adevărată. Pentru ca X din (2) să fie o soluţie a ecuaţiei (1) este necesar şi suficient ca $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ să fie o soluţie a sistemului de 3 ecuaţii liniare cu 4 necunoscute

$$\begin{cases} 2x_1 + 3ax_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases}. \tag{3}$$

Matricele

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ şi } \overline{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

sunt matricea sistemului (3), respectiv matricea extinsă a sistemului (3), iar Teorema Kronecker-Capelli ne spune că sistemul (3) este compatibil dacă şi numai dacă $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \overline{A}$. Cum minorul $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, ,,decupat" din prima şi ultima coloană a lui A, este nenul, $\operatorname{rang} A \geq 2$. Putem borda acest minor în două moduri pentru a obţine un minor de ordinul 3 al lui A. Avem

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \overset{c_1+2c_3}{\underset{c_2+c_3}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & a+2 & 2 \\ 7 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -7(5-a-2) = 7(a-3).$$

Dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, atunci $\operatorname{rang} A = 3 = \operatorname{rang} \overline{A}$ şi astfel afirmaţia $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.
Dacă $a = 3$, pentru a stabili rangul lui A mai trebuie calculat minorul de ordinul 3

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \cdot 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{l_1-2l_3}{\underset{l_2-l_3}{=}} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \overset{l_1=7l_2}{=} 0.$$

Rezultă $\operatorname{rang} A = 2$ şi pentru a afla rangul matricii $\overline{A}$ trebuie calculat minorul său de ordinul 3 (care este, în acest caz, singurul minor caracteristic corespunzător minorului principal $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ al sistemului (3))

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_1-c_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Acest minor fiind nenul, $\operatorname{rang} \overline{A} = 3 \neq 2 = \operatorname{rang} A$. Aşadar, sistemul (3) şi, implicit, ecuaţia (1) au soluţii dacă şi numai dacă $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ iar $\boxed{\text{C}}$ este falsă.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \overset{l_1-2l_3}{\underset{l_2-l_3}{\Leftrightarrow}} \begin{vmatrix} 0 & 3a-2 & -7 \\ 0 & 1 & a-4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{ \frac{5}{3}, 3 \right\}.$$

Cum pentru $a = \dfrac{5}{3}$ ecuaţia (1) are soluţie, sistemul (3) fiind compatibil, afirmaţia $\boxed{\text{D}}$ este falsă.

$\square$

Răspunsuri:
$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

17. Se notează cu ℓ valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^{\operatorname{tg} x}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $\ell=\infty$. $\boxed{\text{B}}$ $\ell<1$. $\boxed{\text{C}}$ $\ell\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. $\boxed{\text{D}}$ $\ell\in(2,\infty)$.

Soluţie. Avem

$$\ell=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\left(1+(\sin x+\cos x-1)\right)^{\frac{1}{\sin x+\cos x-1}}\right]^{(\sin x+\cos x-1)\operatorname{tg} x}=e^{L},$$

unde

$$L=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x}(\sin x+\cos x-1)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x-1}{\cos x}=1,$$

cu ajutorul regulii lui L'Hôpital. Drept urmare, avem $\ell=e$. $\square$

Răspunsuri:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

18. Fie v valoarea minimă a expresiei $E(x,y)=x^2+2y^2$, $x\in\mathbb{R}$, $y\in\mathbb{R}$, unde x şi y verifică ecuaţia

$$\begin{vmatrix} x & y & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1/2 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Atunci

$\boxed{\text{A}}$ $v>0$. $\boxed{\text{B}}$ $v=1$. $\boxed{\text{C}}$ $v<1$. $\boxed{\text{D}}$ $v=-\dfrac{1}{3}$.

Soluţie. Din ecuaţia dată obţinem $x=2y+1$. Expresia dată se poate scrie ca $6y^2+4y+1$, $y\in\mathbb{R}$, care îşi atinge valoarea minimă pentru $y=-\dfrac{1}{3}$. Obţinem $v=\dfrac{1}{3}$. $\square$

Răspunsuri:
$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

19. Specificaţi care dintre următoarele condiţii implică faptul că dreptele $(d_1): ax+by+c=0$, $(d_2): bx+cy+a=0$ şi $(d_3): cx+ay+b=0$ sunt concurente, a,b,c fiind numere reale nenule:

$\boxed{\text{A}}$ $a+b+c=0$. $\boxed{\text{B}}$ $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$.

$\boxed{\text{C}}$ $a^3+b^3+c^3=3abc$. $\boxed{\text{D}}$ $a^2+b^2+c^2=2(ab+bc+ca)$.

Soluţie. Condiţia de concurenţă este echivalentă cu condiţia ca sistemul format de cele trei ecuaţii cu două necunoscute să fie compatibil, adică:

$$\Delta\equiv\begin{vmatrix} a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}=0.$$

Dacă adăugăm coloanele 2 şi 3 la prima coloană şi scoatem factorul comun $(a+b+c)$, ecuaţia de mai sus se poate scrie

$$(a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c\\ 1 & c & a\\ 1 & a & b\end{vmatrix}=0$$

sau

$$(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)=0.$$

Astfel, determinantul se anulează dacă unul dintre factori se anulează, ceea ce înseamnă că primele două afirmații sunt adevărate. Menţionăm că a doua afirmaţie se poate realiza doar dacă $a=b=c$.
Pe de altă parte, se poate verifica imediat, prin calcul direct, că determinantul este egal cu

$$\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3,$$

deci şi cea de-a treia implicaţie este adevărată. Dacă $\boxed{\textbf{A}}$ sau $\boxed{\textbf{B}}$ au loc, atunci relaţia din $\boxed{\textbf{D}}$ se poate realiza numai pentru $a=b=c=0$, dar numerele fiind nenule putem afirma că $\boxed{\textbf{D}}$ este falsă. □

Răspunsuri:
$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

20. Fie $f\colon \mathbb{R} \to (-\infty, 0)$ o funcţie care admite primitive şi fie F o primitivă a lui f. Valoarea parametrului $m \in \mathbb{R}$ pentru care

$$F(4m^2-12m+5) \geq F(3m^2-6m-4)$$

este:

$\boxed{\text{A}}$ $m=1$. $\boxed{\text{B}}$ $m=2$. $\boxed{\text{C}}$ $m=3$. $\boxed{\text{D}}$ $m=4$.

Soluţie. Deoarece F este o primitivă a lui f, deducem că F este derivabilă şi $F'(x)=f(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Cum $f(x)<0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, rezultă că F este strict descrescătoare pe $\mathbb{R}$. Atunci avem

$$\begin{aligned}
F(4m^2-12m+5) &\geq F(3m^2-6m-4)\\
4m^2-12m+5 &\leq 3m^2-6m-4\\
m^2-6m+9 &\leq 0\\
(m-3)^2 &\leq 0.
\end{aligned}$$

Însă, pentru $m \in \mathbb{R}$ avem $(m-3)^2 \geq 0$. În consecinţă $(m-3)^2=0$, de unde $m=3$. □

Răspunsuri:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

21. Fie funcţia $f:\mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ definită prin $f(x)=\cos x + i\sin x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$. $\boxed{\text{B}}$ f este injectivă.

$\boxed{\text{C}}$ f este surjectivă. $\boxed{\text{D}}$ f este un izomorfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$.

Soluţie. Funcţia f este un morfism de grupuri între grupurile $(\mathbb{R},+)$ şi $(\mathbb{C}^*,\cdot)$ dacă şi numai dacă $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ pentru orice $x,y \in \mathbb{R}$. Fie $x,y \in \mathbb{R}$. Avem:

$$\begin{aligned}
f(x+y) &= \cos(x+y) + i\sin(x+y)\\
&= (\cos x\cos y - \sin x\sin y) + i(\sin x\cos y + \cos x\sin y)\\
&= (\cos x + i\sin x)\cdot(\cos y + i\sin y) = f(x)\cdot f(y).
\end{aligned}$$

Astfel $\boxed{\textbf{A}}$ este adevărată.

Funcţia f nu este injectivă, deoarece, de exemplu, avem $f(0)=f(2\pi)$.

Pentru orice $x \in \mathbb{R}$, avem $|f(x)|=\sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}=1$. Deci orice element din $\mathbb{C}^*$ cu modulul diferit de 1, de exemplu 2, nu aparţine imaginii lui f. Deci funcţia f nu este surjectivă.

Morfismul de grupuri f este un izomorfism dacă şi numai dacă f este bijectiv. Pe baza $\boxed{\textbf{B}}$ sau $\boxed{\textbf{C}}$, afirmaţia $\boxed{\textbf{D}}$ este falsă.

□

Răspunsuri:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

22. Dacă S este mulţimea soluţiilor reale ale inecuaţiei $2\cos^2 x \geq \cos x + 1$, atunci

$\boxed{\text{A}}$ $2020\pi \in S$. $\boxed{\text{B}}$ $2021\pi \in S$. $\boxed{\text{C}}$ $\left[\frac{2018\pi}{3}, \frac{2020\pi}{3}\right] \subset S$. $\boxed{\text{D}}$ $20 \in S$.

Soluţie. Cu notaţia $\cos x = t \in [-1, 1]$ inecuaţia $2\cos^2 x \geq \cos x + 1$ devine $2t^2 - t - 1 \geq 0$, cu soluţia $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, \infty)$, de unde $\cos x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \{1\}$, adică

$$S = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right] \right) \bigcup \{ 2l\pi | \, l \in \mathbb{Z} \} .$$

Verificăm fiecare variantă de răspuns în parte:

$\boxed{\text{A}}$ $2020\pi = 1010 \cdot 2\pi \in S$;

$\boxed{\text{B}}$ $2021\pi = 1010 \cdot 2\pi + \pi \in \left[\frac{2\pi}{3} + 2020\pi, \frac{4\pi}{3} + 2020\pi\right] \subset S$;

$\boxed{\text{C}}$ $\left[\frac{2018\pi}{3}, \frac{2020\pi}{3}\right] = \left[\frac{2\pi}{3} + 336 \cdot 2\pi, \frac{4\pi}{3} + 336 \cdot 2\pi\right] \subset S$;

$\boxed{\text{D}}$ $20 \in \left(6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$. Într-adevăr $20 < 6\pi + \frac{2\pi}{3}$ este echivalentă cu $3 < \pi$ şi $6\pi < 20$ este echivalentă cu $\pi < 3,33....$ Ambele fiind adevărate, numărul 20 este în intervalul $\left(6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3}\right)$. Dar $\left(6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \cap S = \varnothing$, deci $\boxed{\text{D}}$ este falsă. □

Răspunsuri:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

23. Se notează cu ℓ valoarea limitei $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t\sqrt{t}} \displaystyle\int_0^t \left(\sqrt{x} + \sin\left(x^2\right)\right) \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $\ell = 0$. $\boxed{\text{B}}$ $\ell = \dfrac{2}{3}$. $\boxed{\text{C}}$ $\ell = \infty$. $\boxed{\text{D}}$ $\ell = \pi$.

Soluţie. Aplicând regula lui L'Hôpital, obţinem

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} \int_0^t \left(\sqrt{x} + \sin\left(x^2\right)\right) \mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt{t} + \sin\left(t^2\right)}{\frac{3}{2}\sqrt{t}} = \frac{2}{3} .$$

□

Răspunsuri:

$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

24. Să presupunem că există numere complexe a, b, c, d diferite de zero, astfel încât $z \in \mathbb{C}$ satisface ecuaţiile $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ și $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$. În acest caz, toate valorile posibile (complexe) ale lui z sunt:

$\boxed{\text{A}}$ $\{i, -i\}$. $\boxed{\text{B}}$ $\{1, -1\}$. $\boxed{\text{C}}$ $\{1, i, -1\}$. $\boxed{\text{D}}$ $\{1, i, -1, -i\}$.

Soluţie. După înmulţirea primei ecuaţii cu z obţinem $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz = 0$. Din această scădem a doua ecuaţie pentru a obţine $az^4 - a = 0$. Deoarece $a \neq 0$, trebuie să avem $z^4 = 1$. Rădăcinile unităţii de ordinul patru sunt următoarele: $1, i, -1, -i$. Putem obţine toate acestea cu excepția 1 dacă alegem $a = b = c = d = 1$. În acest caz ambele ecuații devin $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$. Pentru $z = 1$ trebuie să avem $a + b + c + d = 0$, si găsim foarte uşor astfel de a, b, c și $d = -a - b - c$. Deci toate cele patru valori pe care le-am găsit sunt valori posibile ale lui z. □

Răspunsuri:
A **falsă**; **B** **falsă**; **C** **falsă**; **D** **adevărată**.

25. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin

$$f(x) = |x - 2k|, \quad \text{pentru orice } x \in (2k-1, 2k+1] \text{ şi orice } k \in \mathbb{Z}.$$

Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Funcţia f nu este continuă pe $\mathbb{R}$. B Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

C Funcţia f este derivabilă pe $\mathbb{R}$. D Funcţia f nu este continuă în punctele mulţimii $\{2k-1 : k \in \mathbb{Z}\}$.

Soluţie. Toate cele patru răspunsuri rezultă imediat dintr-o schiţă a graficului lui f.

Alternativ, dacă $x_0 \in (2k-1, 2k+1)$, $k \in \mathbb{Z}$, avem $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} |x - 2k| = |x_0 - 2k| = f(x_0)$, deci funcţia este continuă pe $\cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k-1, 2k+1)$. Pentru $x_0 = 2k-1$, $k \in \mathbb{Z}$, avem

$$\lim_{x\uparrow x_0} f(x) = \lim_{x\uparrow x_0} |x - 2(k-1)| = \lim_{x\downarrow x_0} f(x) = \lim_{x\downarrow x_0} |x - 2k| = 1 = f(x_0),$$

deci funcţia este continuă pe $\mathbb{R}$. Astfel, A şi D sunt false.

În $x_0 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ avem $f'_s(x_0) = -1$, $f'_d(x_0) = 1$, deci funcţia nu este derivabilă pe mulţimea $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$. În $x_0 = 2k-1$, $k \in \mathbb{Z}$, avem $f'_s(x_0) = 1$, $f'_d(x_0) = -1$, deci funcţia nu este derivabilă pe mulţimea $\{2k-1 : k \in \mathbb{Z}\}$. Deci, funcţia nu este derivabilă pe $\mathbb{Z}$ şi pentru orice $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ avem

$$f'(x_0) = \begin{cases} -1, & \text{dacă } x_0 \in (2k-1, 2k), \\ 1, & \text{dacă } x_0 \in (2k, 2k+1),\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

În concluzie, B este adevărată şi C este falsă. □

Răspunsuri:
A **falsă**; **B** **adevărată**; **C** **falsă**; **D** **falsă**.

26. Fie $I = \lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $I = \infty$. B $I = \frac{\pi}{8}$. C $I = \frac{\pi}{4}$. D $I < \frac{1}{2}$.

Soluţie. Din

$$\int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2 + 1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(x^2+1)\Big|_0^t$$

rezultă că $\lim\limits_{t\to\infty} \displaystyle\int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}$. □

Răspunsuri:
A **falsă**; **B** **adevărată**; **C** **falsă**; **D** **adevărată**.

27. Fie $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcţia definită prin $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$ şi fie n numărul punctelor de extrem local ale lui f. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.
afirmaţii.

A $n = 0$. B $n = 1$. C $n = 2$. D $n = 3$.

Soluţie. Calculăm derivata funcţiei f:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{\sqrt[3]{(x-1)(x+1)}},$$

care este definită pe mulţimea $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Facem tabelul de variaţie al funcţiei f.

x		-1		0		1	
$2x-1$	$- - - -$	$-$	$- - - -$	0	$+ + + +$	$+$	$+ + + +$
$\sqrt[3]{x^2-1}$	$+ + + +$	0	$- - - -$	$-$	$- - - -$	0	$+ + + +$
$f'(x)$	$- - - -$	$\vert$	$+ + + +$	0	$- - - -$	$\vert$	$+ + + +$
$f(x)$	$\searrow\searrow\searrow$		$\nearrow\nearrow\nearrow$		$\searrow\searrow\searrow$		$\nearrow\nearrow\nearrow$

Din tabel reiese că punctele de extrem local ale funcţiei f sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ şi $x_3 = 1$. Deci funcţia f are 3 puncte de extrem local. □

Răspunsuri:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.

28. În triunghiul ABC mediana din vârful A al triunghiului este egală cu latura BC. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $5\sin^2 A - \cos 2B - \cos 2C = -2$. $\boxed{\text{B}}$ $5\sin^2 A + \cos 2B + \cos 2C = 2$.

$\boxed{\text{C}}$ $3\sin^2 A - 4\sin B \sin C \cos A = 0$. $\boxed{\text{D}}$ $4\sin^2 A - 3\sin B \sin C \cos A = 0$.

Soluţie. Din teorema sinusurilor avem $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$, $c = 2R\sin C$.

Folosind teorema medianei, obţinem: $m_a = a \Leftrightarrow m_a^2 = a^2 \Leftrightarrow \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4} = a^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 2b^2 - 2c^2 = 0 \Leftrightarrow 5\sin^2 A - 2\sin^2 B - 2\sin^2 C = 0 \Leftrightarrow 5\sin^2 A + (\cos 2B - 1) + (\cos 2C - 1) = 0 \Leftrightarrow 5\sin^2 A + \cos 2B + \cos 2C = 2$, deci $\boxed{\text{B}}$ este adevărată.

Dacă şi $\boxed{\text{A}}$ ar fi adevărată, atunci adunând primele două relaţii obţinem:
$10\sin^2 A = 0 \Leftrightarrow \sin^2 A = 0 \Leftrightarrow \sin A = 0$, imposibil în triunghi. Deci $\boxed{\text{A}}$ este falsă.

Din teorema medianei şi din teorema cosinusului avem:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow a^2 = \dfrac{5a^2}{2} - 2bc\cos A \Leftrightarrow 4bc\cos A = 3a^2 \Leftrightarrow 16R^2 \sin B \sin C \cos A = 12R^2\sin^2 A \Leftrightarrow 3\sin^2 A - 4\sin B\sin C\cos A = 0$, deci $\boxed{\text{C}}$ este adevărată.

Dacă presupunem că şi $\boxed{\text{D}}$ este adevărată atunci avem din $\boxed{\text{C}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ că:
$\dfrac{4}{3}\sin B\sin C\cos A = \dfrac{3}{4}\sin B\sin C\cos A (= \sin^2 A)$
Deci $\sin B\sin C\cos A = 0$, de unde putem avea cazurile:
$\sin B = 0 \Rightarrow B = 0$, imposibil în triunghi;
$\sin C = 0 \Rightarrow C = 0$, imposibil în triunghi;
$\cos A = 0 \Rightarrow m(\widehat{A}) = 90^o$, nu este posibil pentru că în triunghiul dreptunghic în A, mediana din A este jumătate din ipotenuza BC, adică $m_a = \dfrac{a}{2}$, contradicţie cu ipoteza $m_a = a$. □

Răspunsuri:
$\boxed{\textbf{A}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{B}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

29. Un segment MN paralel cu bazele unui trapez, cu capetele segmentului aflate pe cele două laturi neparalele împarte aria trapezului în două părţi egale. Dacă lungimea bazelor este a şi b, $a > b$, atunci pentru lungimea l a segmentului MN avem:

$\boxed{\text{A}}$ $l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. $\boxed{\text{B}}$ $l = \sqrt{ab}$. $\boxed{\text{C}}$ $l > \frac{a+b}{2}$. $\boxed{\text{D}}$ $l = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Soluţie. Fie P intersecţia laturilor neparalele AD şi BC, $AB = a, CD = b$. Din asemănarea triunghiurilor PAB, PMN şi PDC rezultă pentru arii relaţiile

$$A_a = A_{PAB} = \lambda a^2, A_l = A_{PMN} = \lambda l^2, A_b = A_{PDC} = \lambda b^2, \text{cu } \lambda > 0.$$

Din ipoteza problemei rezultă că cele trei arii formează o progresie aritmetică, adică

$$2\lambda l^2 = \lambda a^2 + \lambda b^2,$$

adică $l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Altă soluţie. Pe lânga notaţiile pentru baza mare $AB = a$, pentru baza mică $CD = b$, fie înălţimile trapezelor $ABMN$, $MNDC$: x respectiv y.

$$\mathcal{A}(ABMN) = \mathcal{A}(MNCD) = \frac{\mathcal{A}(ABCD)}{2} \Longleftrightarrow \frac{(a+l)x}{2} = \frac{(b+l)y}{2} = \frac{(a+b)(x+y)}{4}.$$

Din prima ecuaţie avem: $x = \frac{(b+l)y}{a+l}$. Înlocuind aceasta în a doua ecuaţie şi efectuând calculele, obţinem că $l^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$.

$\boxed{\text{A}}$ conform calculelor de mai sus este adevărată.

$\boxed{\text{B}}$ $\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \iff a = b$, dar $a > b$, deci $l \neq \sqrt{ab}$;

$\boxed{\text{C}}$ $l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2}$ este adevărat pentru $a > b$;

$\boxed{\text{D}}$ $l = \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, pentru $a > b$, deci $l \neq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$.

Din inegalităţile mediilor

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

valabile petru $a, b > 0, a \neq b$ rezultă că afirmaţiile de la puntele $\boxed{\text{B}}$ şi $\boxed{\text{D}}$ sunt false, iar cea de la punctul $\boxed{\text{C}}$ este adevărată. □

Răspunsuri:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{D}}$ **falsă**.

30. Notăm cu A mulţimea numerelor naturale n care au ultima cifră 6 şi au proprietatea că dacă mutăm această cifră în faţa numărului, obţinem un număr de 4 ori mai mare. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Dacă $n \in A$, atunci $3 \mid n$. $\boxed{\text{B}}$ Există $n \in A$ astfel încât $12 \mid n$.

$\boxed{\text{C}}$ Există $n \in A$ care are 8 cifre. $\boxed{\text{D}}$ Există $n \in A$ care are toate cifrele diferite două câte două.

Soluţie. Pentru un $n \in A$, notăm y numărul cifrelor sale. Dacă $x = (n-6)/10$, atunci obţinem egalitatea $4(10x+6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x$, adică $13x = 2(10^{y-1} - 4)$. Numărul $10^{y-1} - 4$ are forma $99\ldots96$, deci e divizibil cu 3. Din $(3, 13) = 1$ rezultă $3 \mid x$, deci şi $3 \mid n$. Observăm că x trebuie să fie par. Deci n se termină în $06, 26, 46, 66$ sau 86 şi rezultă că $4 \nmid n$. Presupunem că $y = 8$, deci $13 \mid 10^7 - 4$, ceea ce este fals. Se constată că ecuaţia în x şi y are soluţia (particulară) $y = 6$ şi $x = 15384$. De aici rezultă că $n = 153846 \in A$.

□

Răspunsuri:

$\boxed{\textbf{A}}$ **adevărată**; $\boxed{\textbf{B}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{C}}$ **falsă**; $\boxed{\textbf{D}}$ **adevărată**.