

MEGOLDÁSOK
BBTE Matek-Infó Verseny 2021
MATEMATIKA írásbeli próba

1. Legyen $(a_n)_{n \geq 0}$ egy nem nulla számokból álló mértani haladvány, amelynek állandó hányadosa $r \in \mathbb{R}$.
Ha az

$$E = \frac{4a_4}{a_2} + \frac{4a_8}{a_7} + \frac{a_5 \cdot a_7}{a_6^2}$$

kifejezés a lehető legkisebb értéket veszi fel, akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ **A** $r = \frac{1}{2}$.

☐ **B** $\left| \frac{a_{12}}{a_9} \right| < \frac{1}{4}$.

☐ **C** $a_5 a_2 + 2a_1 a_5 + a_0 a_5 > 0$.

☐ **D** $a_n a_{n+1} < 0$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

Bizonyítás. A mértani haladvány tulajdonságai alapján

$$E = 4r^2 + 4r + 1 = (2r + 1)^2.$$

Ez a kifejezés a minimumát $r = -\frac{1}{2}$ esetén veszi fel, tehát az ☐ **A** állítás hamis. Továbbá kapjuk, hogy $\left| \frac{a_{12}}{a_9} \right| = |r^3| = \frac{1}{8}$, így a ☐ **B** állítás igaz.

$$a_5 a_2 + 2a_1 a_5 + a_0 a_5 = a_5(a_2 + 2a_1 + a_0) = a_0 r^5(a_0 r^2 + 2a_0 r + a_0) = a_0^2 r^5(r^2 + 2r + 1) = a_0^2 \cdot \frac{-1}{32} \cdot \frac{1}{4} < 0,$$

ami ellentmond a ☐ **C** állításnak.

Végül $a_n a_{n+1} = a_n^2 \cdot r = -\frac{1}{2} a_n^2 < 0$, minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, amely alapján a ☐ **D** állítás igaz. □

Válaszok:

☐ **A** hamis;

☐ **B** igaz;

☐ **C** hamis;

☐ **D** igaz.

2. Legyenek d_1 és d_2 az $x - 3y + 1 = 0$, illetve $3x + y + 2 = 0$ egyenletű egyenesek, a egy valós szám és P a $(0, a)$ koordinátájú pont. A P pont a d_1 és d_2 egyenesektől egyenlő távolságra van, ha az a szám értéke

☐ **A** $-\frac{1}{4}$.

☐ **B** 0 .

☐ **C** $\frac{1}{4}$.

☐ **D** $\frac{3}{2}$.

Bizonyítás. A $P(0, a)$ pont távolsága a d_1 egyenestől:

$$d(P, d_1) = \frac{|-3a + 1|}{\sqrt{10}},$$

A $P(0, a)$ pont távolsága a d_2 egyenestől:

$$d(P, d_2) = \frac{|a + 2|}{\sqrt{10}}.$$

Ez a két távolság pontosan akkor egyenlő, ha $a \in \{-\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\}$. □

Válaszok:

☐ **A** igaz; ☐ **B** hamis; ☐ **C** hamis; ☐ **D** igaz.

3. A $V_x^6 - 24x^4C_x - 11V_x^4 = 0$ egyenlet megoldásainak halmaza

☐ **A** $\{1\}$. ☐ **B** $\{9\}$. ☐ **C** $\{5\}$. ☐ **D** $\{1, 9\}$.

Bizonyítás. A variáció és kombinációra vonatkozó feltételek alapján $x \in \mathbb{N}, x \geq 6$. Behelyettesítve a variáció és kombináció képleteit, majd egyszerűsítve az $x^2 - 10x + 9 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, amelynek gyökei 1 és 9. Mivel $x \in \mathbb{N}, x \geq 6$, ezért csak $x = 9$ a megoldás. $\square$

Válaszok:

☐ **A** hamis; ☐ **B** igaz; ☐ **C** hamis; ☐ **D** hamis.

4. Tetszőleges $x > 0$ szám esetén a

$$\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^{2021}$$

binom kifejtésének az x^6 -t tartalmazó tagjában a binomiális együttható

☐ **A** C_{2021}^{1435} . ☐ **B** C_{2021}^{586} . ☐ **C** C_{2021}^{587} . ☐ **D** C_{2021}^{1434} .

Bizonyítás. $T_{k+1} = C_{2021}^k (\sqrt{x})^{2021-k} (-1)^k \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^k = (-1)^k C_{2021}^k x^{\frac{2021-k}{2} - \frac{k}{5}}$.

A $\frac{2021-k}{2} - \frac{k}{5} = 6$ egyenlet átírható $7k = 5 \cdot 2009$ alakba, ahonnan kapjuk, hogy $k = 1435$. Tehát a keresett binomiális együttható C_{2021}^{1435} , amely egyenlő a C_{2021}^{586} binomiális együtthatóval. $\square$

Válaszok:

☐ **A** igaz; ☐ **B** igaz; ☐ **C** hamis; ☐ **D** hamis.

5. Legyenek M, N, P, Q egy $ABCD$ négyszög AB, BC, CD, DA oldalainak felezőpontjai. Ekkor

☐ **A** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$. ☐ **B** $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$.
☐ **C** $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. ☐ **D** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$.

Bizonyítás. Ahhoz, hogy ellenőrizzük a vektoriális egyenleteket, megpróbáljuk átalakítani a bal oldali tagokat úgy, hogy megjelenjenek a jobboldalon szereplő vektorok.

Az ☐ **A** pontban szereplő $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$ egyenlőség esetén a baloldalt átírva kapjuk, hogy

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} + 2\overrightarrow{AC},$$

tehát az ☐ **A** állítás hamis.

A ☐ **B** pontban szereplő $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{0}$ egyenlőség esetén a baloldal a következőképpen írható át:

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \overrightarrow{0}.$$

Tehát a ☐ **B** állítás igaz.

A ☐ **C** pontban szereplő $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ összefüggés esetén

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC},$$

tehát a ☐ **C** állítás igaz.

Végül a ☐ **D** pontban szereplő $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CA}$ egyenlőség esetén a baloldal a következőképpen alakítható át:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}.$$

Ez alapján a ☐ **D** állítás hamis. $\square$

Válaszok:

☐ **A** hamis;

☐ **B** igaz;

☐ **C** igaz;

☐ **D** hamis.

6. Az $(a_n)_{n \geq 1}$ számsorozat általános tagja

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right).$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ **A** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$.

☐ **B** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$.

☐ **C** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \ln 2$.

☐ **D** $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.

Bizonyítás. Az $a_n = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n^n}$, ezért

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)(n+2) \cdots (2n)}{n^n} \cdot \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2) \cdots (2n)(2n+1)(2n+2)} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{n+1}{2(2n+1)}.$$

Ez alapján $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e}{4} < 1$, tehát $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$, következésképpen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. □

Válaszok:

☐ **A** hamis;

☐ **B** igaz;

☐ **C** hamis;

☐ **D** igaz.

7. Ha $\log_{12} 27 = a$, akkor $\log_6 16$ értéke

☐ **A** 4.

☐ **B** $\frac{4(3-a)}{3+a}$.

☐ **C** $\frac{4+a}{4-a}$.

☐ **D** $\frac{4(3+a)}{3-a}$.

Bizonyítás. A logaritmusok tulajdonsága alapján írhatjuk, hogy

$$\log_6 16 = 4 \log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1 + \log_2 3}.$$

A következő átalakítást végezzük:

$$a = \log_{12} 27 = 3 \log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1 + 2 \log_3 2} = \frac{3 \log_2 3}{2 + \log_2 3},$$

ahonnan kapjuk, hogy

$$\log_2 3 = \frac{2a}{3-a}.$$

Ezt visszahelyettesítve az első összefüggésbe adódik, hogy

$$\log_6 16 = \frac{4}{1 + \log_2 3} = \frac{4}{1 + \frac{2a}{3-a}} = \frac{4(3-a)}{3+a}.$$

□

Válaszok:

☐ **A** hamis;

☐ **B** igaz;

☐ **C** hamis;

☐ **D** hamis.

8. A $(-1, 1)$ intervallumon értelmezzük a következő „ $*$ ” műveletet: $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, minden $x, y \in (-1, 1)$ esetén. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ **A** A semleges elem a „ $*$ ” műveletre nézve $\frac{1}{2}$.

☐ **B** $\frac{1}{3} * (\frac{1}{3} * \frac{1}{3}) = \frac{5}{9}$.

☐ **C** A „ $*$ ” művelet asszociatív.

☐ **D** A $\frac{1}{3}$ inverze a „ $*$ ” műveletre nézve $\frac{1}{9}$.

Bizonyítás. Könnyen ellenőrizhető, hogy $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$, minden $x, y \in (-1, 1)$ esetén. Kiszámoljuk, hogy $(x * y) * z = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+yz+zx} = x * (y * z)$, ezért a „ $*$ ” művelet asszociatív, így a **C** állítás igaz. Ezen képlet alapján kapjuk, hogy $\frac{1}{3} * (\frac{1}{3} * \frac{1}{3}) = \frac{7}{9}$, tehát a **B** állítás hamis. A „ $*$ ” művelet semleges eleme teljesíti az $x * e = x$ összefüggést, minden $x \in (-1, 1)$ esetén. Ez alapján kapjuk, hogy a semleges elem 0, tehát az **A** állítás hamis. Az $x \in (-1, 1)$ elem x' inverzét kiszámolhatjuk az $x * x' = 0$ egyenletből és kapjuk, hogy $x' = -x$, tehát a **D** állítás hamis. $\square$

Válaszok:

A hamis;

B hamis;

C igaz;

D hamis.

9. Értelmezzük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt az

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + a, & x \in (-\infty, 0], \\ bx^3, & x \in (0, \infty), \end{cases}$$

szabály által, ahol $a, b \in \mathbb{R}$ paraméterek. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Ha $a = 0$ és $b \in \mathbb{R}$, akkor az f függvény folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon.

B Ha $a = 1$ és $b = -1$, akkor az f függvény szigorúan csökkenő az $\mathbb{R}$ halmazon.

C Ha $a = 1$ és $b = -1$, akkor az f függvény nem folytonos a 0-ban.

D $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, bármely $a, b \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás. Ha $a = 0$ és $b \in \mathbb{R}$, akkor az f függvény folytonos a $(-\infty, 0)$ és $(0, \infty)$ intervallumokon, továbbá

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^4 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} bx^3 = 0 = f(0).$$

Tehát ebben az esetben az f függvény folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon.

Ha $a = 1$ és $b = -1$, akkor az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény képlete

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & x \in (-\infty, 0], \\ -x^3, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Az f függvény szigorúan csökkenő a $(-\infty, 0]$ és $(0, \infty)$ intervallumokon. Bármely $x_1 \in (-\infty, 0]$ és $x_2 \in (0, \infty)$ esetén $x_1 < x_2$, továbbá $f(x_1) = x_1^4 + 1 \geq 1 > 0 \geq f(x_2) = -x_2^3$. Ezek alapján az f függvény szigorúan csökkenő az $\mathbb{R}$ halmazon.

Ha $a = 1$ és $b = -1$, akkor $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^4 + 1 = f(0) = 1 \neq \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -x^3 = 0$. Tehát az f függvény nem folytonos a 0-ban.

Bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ és bármely $b \in (-\infty, 0)$ esetén $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$. Így minden $a \in \mathbb{R}$ és $b \in (-\infty, 0)$ esetén kapjuk, hogy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$. $\square$

Válaszok:

A igaz;

B igaz;

C igaz;

D hamis.

10. Ha $\cos x = -\frac{1}{7}$ és $\cos y = -\frac{13}{14}$, ahol $x, y \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$, akkor az $x - y$ különbség lehet

A $-\frac{\pi}{3}$.

B $\frac{\pi}{6}$.

C $\frac{\pi}{3}$.

D $\frac{2\pi}{3}$.

Bizonyítás. Tudva, hogy x és y a III. negyedben vannak, ezért a különbségük a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumba esik, tehát $\boxed{B}$ hamis. Mivel $\sin x = -\sqrt{1 - \frac{1}{49}} = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$ és $\sin y = -\sqrt{1 - \frac{169}{196}} = -\frac{3\sqrt{3}}{14}$, így

$$\cos(x - y) = \frac{1}{7} \cdot \frac{13}{14} + \frac{4\sqrt{3}}{7} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{14} = \frac{1}{2} \Rightarrow x - y \in \left\{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right\}.$$

De

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y = \left(-\frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \cdot \left(-\frac{13}{14}\right) - \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \left(-\frac{3\sqrt{3}}{14}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ahonnan $x - y = \frac{\pi}{3}$, mivel $x - y$ a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban van, amely intervallumon a szinuszos függvény bijektív. Tehát az $\boxed{A}$, $\boxed{B}$ és $\boxed{D}$ állítások hamisak, míg a $\boxed{C}$ állítás igaz. $\square$

Válaszok:

$\boxed{A}$ hamis; $\boxed{B}$ hamis; $\boxed{C}$ igaz; $\boxed{D}$ hamis.

11. Minden $n \in \mathbb{N}^*$ esetén értelmezzük az $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (2 - x)^n$, $x \in \mathbb{R}$ függvényeket. Ekkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{A}$ $0 < f_n(x) < 1$, minden $n \in \mathbb{N}^*$ és minden $x \in [1, 2]$ esetén.

$\boxed{B}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$, minden $x \in [1, 2]$ esetén.

$\boxed{C}$ Az $(f_n(4))_{n \geq 1}$ sorozatnak létezik egy növekvő részsorozata.

$\boxed{D}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(4) = \infty$.

Bizonyítás. Az $\boxed{A}$ állítás hamis, mert $f_n(1) = 1$, vagy mert $f_n(2) = 0$. A $\boxed{B}$ állítás hamis, mert $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(1) = 1$. A $\boxed{C}$ állítás igaz, mert az $(f_{2k}(4))_{k \geq 1}$ részsorozat növekvő, mivel $f_{2k}(4) = (-2)^{2k} = 4^k$ és a $(4^k)_{k \geq 1}$ sorozat növekvő. A $\boxed{D}$ állítás hamis, mert a $(f_{2k}(4))_{k \geq 1}$ részsorozat határértéke $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k}(4) = \infty$, ellenben a $(f_{2k+1}(4))_{k \geq 1}$ részsorozat határértéke $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{2k+1}(4) = -\infty$. $\square$

Válaszok:

$\boxed{A}$ hamis; $\boxed{B}$ hamis; $\boxed{C}$ igaz; $\boxed{D}$ hamis.

12. Legyen ABC egy olyan nem elfajult háromszög, hogy a BC szakasz hossza $\sqrt{3}$, a $\hat{B}$ mértéke 60° és az ABC háromszög köré írt kör sugara 1. Ekkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

$\boxed{A}$ Az ABC háromszög területe $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. $\boxed{B}$ Az ABC háromszög kerülete $3\sqrt{3}$.

$\boxed{C}$ Az ABC háromszög egyenlő oldalú. $\boxed{D}$ Az ABC háromszög beírt körének sugara $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Bizonyítás. A szinusztétel alapján $\frac{\sqrt{3}}{\sin A} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{c}{\sin C} = 2$, tehát $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Mivel a háromszög nem elfajult, ezért $m(\hat{A}) \neq 120^\circ$, így $m(\hat{A}) = 60^\circ$. A harmadik szögre kapjuk, hogy $m(\hat{C}) = 60^\circ$, tehát a háromszög egyenlő oldalú és $b = c = \sqrt{3}$. A háromszög kerülete $p = 3\sqrt{3}$, illetve a területe $T_{ABC\Delta} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. A területet kiszámolható a beírt kör r sugara és a p kerület függvényében is $\frac{3\sqrt{3}}{4} = \frac{p \cdot r}{2}$, ahonnan a háromszög beírt körének sugara $r = \frac{1}{2}$. $\square$

Válaszok:

$\boxed{A}$ hamis; $\boxed{B}$ igaz; $\boxed{C}$ igaz; $\boxed{D}$ hamis.

13. A síkban felvesszünk egy O origójú Descartes-féle koordináta-rendszert, melyben tekintjük a $d_1 : x = 1$ és $d_2 : y = 1$ egyenletű síkbeli egyeneseket. Az alábbi állítások közül melyek igazak olyan A, B, C síkbeli pontok esetén, ahol $A \in d_1$, $B \in d_2$ és O, A, B, C egy $[AB]$ átlójú négyzet csúcsai?

☐ A $C \in d$, ahol $d : x - y = 0$.

☐ B Az A és B pontok közötti távolság legalább $\sqrt{2}$.

☐ C $C \in d$, ahol $d : x + y = 2$.

☐ D Az O, A, B, C csúcsú négyzet területe legalább 1.

Bizonyítás. Mivel $A \in d_1$ és $B \in d_2$, ezért $A(1, y)$ és $B(x, 1)$, ahol $x, y \in \mathbb{R}$. Ha O, A, B, C egy AB átlójú négyzet csúcsai, akkor $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x + y = 0$ és $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Ezek alapján $A(1, -x)$, $B(x, 1)$ és $C(1 + x, 1 - x)$, ahol $x \in \mathbb{R}$. Tehát $C \in d : x + y = 2$. Az A és B pontok távolsága $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1 + x^2} \cdot \sqrt{2} \geq \sqrt{2}$. A négyzet területe $T_{OACB} = 1 + x^2 \geq 1$. $\square$

Válaszok:

☐ A hamis;

☐ B igaz;

☐ C igaz;

☐ D igaz.

14. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x}$ függvényt. A következő állítások közül melyek igazak?

☐ A Az f függvény deriválható az $x \in \mathbb{R}$ pontban $\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$.

☐ B Az f függvénynek egyetlen egy helyi szélsőérték-pontja van.

☐ C Az f függvénynek van legalább egy globális minimum pontja.

☐ D $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$.

Bizonyítás. Az f függvény deriválható a $\mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ halmazon, de nem deriválható a -2 és 0 pontokban, mert a derivált értéke nem véges ezekben a pontokban. Bármely $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$ esetén

$$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{(x+2)^2}}{3\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}} = -\frac{4x+4}{3\sqrt[3]{x^2(x+2)^2}(\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x+2)^2} + \sqrt[3]{(x+2)^4})}.$$

Innen kapjuk, hogy $f'(-1) = 0$, $f'(x) > 0$, minden $x \in (-\infty, -1) \setminus \{-2\}$ esetén, és $f'(x) < 0$, minden $x \in (-1, \infty) \setminus \{0\}$ esetén. Innen következik, hogy az f függvény szigorúan növekvő a $(-\infty, -1]$ intervallumon és szigorúan csökkenő a $[-1, \infty)$ intervallumon. Tehát az -1 pont az egyetlen helyi szélsőérték pontja az f függvénynek (ez a pont a függvény globális maximum pontja) és a függvénynek nincs globális minimum pontja.

Az f függvény szigorúan csökkenő a $(0, \infty)$ intervallumon, ezért $f(5) < f(3)$, ahonnan kapjuk, hogy $\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{7} < 2\sqrt[3]{5}$. $\square$

Válaszok:

☐ A igaz;

☐ B igaz;

☐ C hamis;

☐ D igaz.

15. A sík egy Descartes-féle koordináta-rendszerében tekintjük az $A(7, 5)$ és $B(9, 1)$ pontokat. Az AB szakasz felezőmerőlegese $d : x - 2y = 2$. Jelölje $\mathcal{C}$ azon körök halmazát, amelyek középpontja a d egyenesen van, és átmennék az A és B pontokon. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ A A $\mathcal{C}$ halmazban van olyan kör, amelynek területe π .

☐ B A $\mathcal{C}$ halmazban van olyan kör, amelynek területe 17.

☐ C A $\mathcal{C}$ halmazban van olyan kör, amely mindegyik koordinátatengelyt egy pontban metszi.

☐ D A $D(3, 3)$ pont esetén az ABD háromszög köréírt kör benne van a $\mathcal{C}$ halmazban.

Bizonyítás. Legyen C egy $M(x_M, y_M)$ középpontú kör a $\mathcal{C}$ halmazból. Mivel d az AB szakasz oldalfelező merőlegese, ezért a C kör sugara $r = d(A, M) = d(B, M)$, tehát $r = d(A, M) = \sqrt{5(y_M^2 - 6y_M + 10)}$. Ez a függvény konvex és a minimumát $y_M = 3$ esetén veszi fel. Tehát a $\mathcal{C}$ halmaz körei közül a legkisebbnek a sugara $\sqrt{5}$. Így az ☐ A állítás hamis, míg a ☐ B állítás igaz. Ha a C kör mindegyik koordinátatengelyt egy pontba metszi, akkor a középpontja M egyenlő távolságra van a tengelyektől. Mivel az A és B pontok az első negyedben vannak, ezért a körnek is az első negyedben kell lennie, vagyis a kör középpontjának koordinátái $M = M(r, r)$, ahol $r > 0$. Az M pont a d egyenesen található, ezért teljesülnie kell az $r - 2r = 2$ egyenletnek. Ennek az egyenletnek nincs $r > 0$ megoldása, ezért a ☐ C állítás hamis. Az ABD háromszög egyenlőszárú és derékszögű, ezért a köréírt körének középpontja az átfogó felezőpontja, a mi esetünkben a $O_1(6, 2)$ pont. Az O_1 pont rajta van a d egyenesen, tehát a ☐ D állítás igaz. $\square$

Válaszok:

A hamis;

B igaz;

C hamis;

D igaz.

16. Tekintjük a valós együtthatós mátrixok következő egyenletét:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Az $a \in \mathbb{R}$ paraméter értékétől függetlenül nem létezik olyan mátrix az $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ halmazban, amelyre teljesül az (1) egyenlet.

B Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, akkor az (1) egyenletnek van legalább egy megoldása.

C Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén az (1) egyenletnek van legalább egy megoldása.

D Ha $\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, akkor az (1) egyenletnek nincs megoldása.

Bizonyítás. Ha létezik olyan X mátrix, amely teljesíti az (1) egyenletet, akkor a következő alakú kell legyen

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Tehát az **A** állítás igaz. Annak szükséges és elégséges feltétele, hogy a (2) alakú X oszlop mátrix az (1) egyenlet megoldása legyen, hogy $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ megoldása legyen a

$$\begin{cases} 2x_1 + 3ax_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1 \end{cases} \quad (3)$$

3 egyenletből és 4 ismeretlenből álló lineáris egyenletrendszernek. A (3) egyenletrendszer mátrixa, illetve bővített mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 \\ 1 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ és } \bar{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

A Kronecker-Capelli-tétel alapján a (3) rendszer pontosan akkor kompatibilis, ha $\text{rang } A = \text{rang } \bar{A}$. Az A mátrix első két sorából, illetve az első és utolsó oszlopából alkotott $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$ aldetemináns nem nulla, ezért $\text{rang } A \geq 2$. Ezt az aldeteminánst kétféleképpen tudjuk szegélyezni ahhoz, hogy egy harmadrendű aldeteminánst kapjunk. Előbb

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} o_1+2o_3 \\ o_2+o_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 5 & a+2 & 2 \\ 7 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -7(5-a-2) = 7(a-3).$$

Tehát ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, akkor $\text{rang } A = 3 = \text{rang } \bar{A}$ és így a **B** állítás igaz.

Ha $a = 3$, akkor az A rangjának megállapításához ki kell számolni a következő harmadrendű aldeteminánst is

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \cdot 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_1-2s_3 \\ s_2-s_3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} s_1=7s_2 \\ s_1=7s_2 \end{matrix} 0.$$

Tehát ebben az esetben $\text{rang } A = 2$ és az $\overline{A}$ mátrix rangjának megállapításához kiszámoljuk a következő harmadrendű aldeterminánsát

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \stackrel{o_1 \leftarrow o_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Ez az aldetermináns nem nulla, ezért $\text{rang } \overline{A} = 3 \neq 2 = \text{rang } A$. Tehát a (3) egyenletrendszernek s így az (1) egyenletnek pontosan akkor van megoldása, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. Tehát a **C** állítás hamis.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \stackrel{s_1 \leftarrow s_1 - 2s_3}{\stackrel{s_2 \leftarrow s_2 - s_3}{\rightleftharpoons}} \begin{vmatrix} 0 & 3a - 2 & -7 \\ 0 & 1 & a - 4 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3a^2 - 14a + 15 = 0 \Leftrightarrow a \in \left\{ \frac{5}{3}, 3 \right\}.$$

Az $a = \frac{5}{3}$ esetben az (1) egyenletnek van megoldása, mivel az (3) egyenletrendszer kompatibilis, ezért a **D** állítás hamis. $\square$

Válaszok:

A igaz;

B igaz;

C hamis;

D hamis.

17. Jelölje ℓ a $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^{\text{tg } x}$ határértéket. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A $\ell = \infty$.

B $\ell < 1$.

C $\ell \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

D $\ell \in (2, \infty)$.

Bizonyítás. Az ℓ határértéket a következőképpen számolhatjuk ki:

$$\ell = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(1 + (\sin x + \cos x - 1) \right)^{\frac{1}{\sin x + \cos x - 1}} \right]^{(\sin x + \cos x - 1) \text{tg } x} = e^L,$$

ahol

$$L = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x} (\sin x + \cos x - 1) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x + \cos x - 1}{\cos x} = 1,$$

amelyet a L'Hôpital-szabály segítségével számoltunk ki. Ennek alapján következik, hogy $\ell = e$. $\square$

Válaszok:

A hamis;

B hamis;

C igaz;

D igaz.

18. Legyen v az $E(x, y) = x^2 + 2y^2$ kifejezés minimuma, ahol $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ teljesítik a

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

egyenletet. Ekkor

A $v > 0$.

B $v = 1$.

C $v < 1$.

D $v = -\frac{1}{3}$.

Bizonyítás. A megadott egyenlet átírható $x = 2y + 1$ alakba. Így az $E(x, y)$ kifejezés átírható a következő egyváltozós kifejezéssé $6y^2 + 4y + 1$, $y \in \mathbb{R}$, amely az $y = -\frac{1}{3}$ esetén veszi fel az $\frac{1}{3}$ minimumot. Ez a minimum egyben az $E(x, y)$ minimuma az adott feltételek mellett, tehát $v = \frac{1}{3}$. $\square$

Válaszok:

☐ **A** igaz; ☐ **B** hamis; ☐ **C** igaz; ☐ **D** hamis.

19. Ha a, b, c nem nulla valós számok, akkor az alábbi feltételek közül melyekből következik, hogy a $(d_1) : ax + by + c = 0$, $(d_2) : bx + cy + a = 0$ és $(d_3) : cx + ay + b = 0$ egyeneseknek van legalább egy közös pontja?

☐ **A** $a + b + c = 0$. ☐ **B** $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.
☐ **C** $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. ☐ **D** $a^2 + b^2 + c^2 = 2(ab + bc + ca)$.

Bizonyítás. Az egyenesek összefutása egyenértékű azzal, hogy a három kétismeretlenes egyenletből alkotott rendszer kompatibilis legyen, vagyis

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = 0.$$

Ha a determináns második és harmadik oszlopát hozzáadjuk az első oszlophoz, akkor kiemelhetünk $(a + b + c)$ -t és a fenti egyenlet átírható

$$(a + b + c) \begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & c & a \\ 1 & a & b \end{vmatrix} = 0,$$

alakba, vagyis

$$(a + b + c)(ab + bc + ca - a^2 - b^2 - c^2) = 0.$$

Ekkor a baloldalon álló szorzat akkor nulla, ha az egyik szorzótényező nulla. Ennek alapján az ☐ **A** és ☐ **B** állítások igazak. Megjegyezzük, hogy a második állítás csak akkor áll fenn, ha $a = b = c$.

Másrészt direkt számolással ellenőrizhető, hogy a determináns

$$\Delta = 3abc - a^3 - b^3 - c^3,$$

tehát a ☐ **C** állítás is igaz.

Az ☐ **A** vagy ☐ **B** állítás mellett a ☐ **D** állítás csak akkor teljesülhet, ha $a = b = c = 0$. A feltétel alapján az a, b, c számok nem nullák, ezért a ☐ **D** állítás hamis. □

Válaszok:

☐ **A** igaz; ☐ **B** igaz; ☐ **C** igaz; ☐ **D** hamis.

20. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow (-\infty, 0)$ egy primitiválható függvény, amelynek primitívje F . Az $m \in \mathbb{R}$ paraméter melyre teljesül az

$$F(4m^2 - 12m + 5) \geq F(3m^2 - 6m - 4)$$

egyenlőtlenség:

☐ **A** $m = 1$. ☐ **B** $m = 2$. ☐ **C** $m = 3$. ☐ **D** $m = 4$.

Bizonyítás. Mivel F az f függvény egy primitívje, ezért F deriválható és a deriváltja $F'(x) = f(x)$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén. Mivel $f(x) < 0$, minden $x \in \mathbb{R}$ esetén, ezért az F függvény szigorúan csökkenő az $\mathbb{R}$ halmazon és így

$$\begin{aligned} F(4m^2 - 12m + 5) \geq F(3m^2 - 6m - 4) &\Leftrightarrow \\ 4m^2 - 12m + 5 \leq 3m^2 - 6m - 4 &\Leftrightarrow \\ m^2 - 6m + 9 \leq 0 &\Leftrightarrow \\ (m - 3)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Ez utóbbi egyenlőtlenségnek az egyetlen megoldása $m = 3$. □

Válaszok:

- ☐ **A** hamis; ☐ **B** hamis; ☐ **C** igaz; ☐ **D** hamis.

21. Tekintjük az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^*$, $f(x) = \cos x + i \sin x$ függvényt. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐ **A** f egy csoportmorfizmus az $(\mathbb{R}, +)$ és $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ csoportok között. ☐ **B** f injektív.
☐ **C** f szürjektív. ☐ **D** f egy izomorfizmus az $(\mathbb{R}, +)$ és $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ csoportok között.

Bizonyítás. Az f egy csoportmorfizmus az $(\mathbb{R}, +)$ és $(\mathbb{C}^*, \cdot)$ csoportok között pontosan akkor, ha $f(x+y) = f(x) \cdot f(y)$, minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén. Legyenek $x, y \in \mathbb{R}$ és kiszámoljuk, hogy

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \cos(x+y) + i \sin(x+y) \\ &= (\cos x \cos y - \sin x \sin y) + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y) \\ &= (\cos x + i \sin x) \cdot (\cos y + i \sin y) \\ &= f(x) \cdot f(y). \end{aligned}$$

Tehát az ☐ **A** állítás igaz.

Az f függvény nem injektív, mert például $f(0) = f(2\pi)$. Tehát a ☐ **B** állítás hamis.

Minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $|f(x)| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1$. Tehát bármely 1-től különböző moduluszú, például 2 moduluszú eleme a $\mathbb{C}^*$ halmaznak nincs benne az f függvény képében, vagyis az f függvény nem szürjektív. Tehát a ☐ **C** állítás hamis.

Az f csoportmorfizmus akkor és csakis akkor izomorfizmus, ha f bijektív. Mivel f nem injektív, ezért nem is bijektív, tehát a ☐ **D** állítás hamis. $\square$

Válaszok:

- ☐ **A** igaz; ☐ **B** hamis; ☐ **C** hamis; ☐ **D** hamis.

22. Ha a $2 \cos^2 x \geq \cos x + 1$ egyenlőtlenség valós megoldásainak halmaza S , akkor

- ☐ **A** $2020\pi \in S$. ☐ **B** $2021\pi \in S$. ☐ **C** $[\frac{2018\pi}{3}, \frac{2020\pi}{3}] \subset S$. ☐ **D** $20 \in S$.

Bizonyítás. A $\cos x = t \in [-1, 1]$ jelölést bevezetve a $2 \cos^2 x \geq \cos x + 1$ egyenlőtlenségből a $2t^2 - t - 1 \geq 0$ másodfokú egyenlőtlenséghez jutunk. Ennek a megoldásai $t \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, \infty)$, ahonnan $\cos x \in [-1, -\frac{1}{2}] \cup \{1\}$, vagyis

$$S = \left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \right] \right) \cup \{2l\pi \mid l \in \mathbb{Z}\}.$$

Ellenőrizzük a megadott állítások igaz voltát:

☐ **A** $2020\pi = 1010 \cdot 2\pi \in S$, tehát igaz.

☐ **B** $2021\pi = 1010 \cdot 2\pi + \pi \in [\frac{2\pi}{3} + 2020\pi, \frac{4\pi}{3} + 2020\pi] \subset S$, tehát ez az állítás is igaz.

☐ **C** $[\frac{2018\pi}{3}, \frac{2020\pi}{3}] = [\frac{2\pi}{3} + 336 \cdot 2\pi, \frac{4\pi}{3} + 336 \cdot 2\pi] \subset S$, tehát az állítás igaz.

☐ **D** $20 \in (6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3})$. Valóban, $20 < 6\pi + \frac{2\pi}{3}$ egyenértékű a $3 < \pi$ egyenlőtlenséggel és a $6\pi < 20$ egyenlőtlenség egyenértékű a $\pi < 3,33\dots$ egyenlőtlenséggel. Mivel mindkét egyenlőtlenség igaz, ezért 20 a $(6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3})$ intervallumban található. De $(6\pi, 6\pi + \frac{2\pi}{3}) \cap S = \emptyset$, ezért a ☐ **D** állítás hamis. $\square$

Válaszok:

- ☐ **A** igaz; ☐ **B** igaz; ☐ **C** igaz; ☐ **D** hamis.

23. Jelölje ℓ a $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} \int_0^t (\sqrt{x} + \sin(x^2)) dx$ határértéket. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- ☐ **A** $\ell = 0$. ☐ **B** $\ell = \frac{2}{3}$. ☐ **C** $\ell = \infty$. ☐ **D** $\ell = \pi$.

Bizonyítás. A L'Hôpital-szabály alapján

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t\sqrt{t}} \int_0^t (\sqrt{x} + \sin(x^2)) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t} + \sin(t^2)}{\frac{3}{2}\sqrt{t}} = \frac{2}{3}.$$

□

Válaszok:

A hamis;

B igaz;

C hamis;

D hamis.

24. Feltételezzük, hogy léteznek olyan a, b, c, d nem nulla komplex számok, hogy $z \in \mathbb{C}$ teljesíti az $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$ és $bz^3 + cz^2 + dz + a = 0$ egyenleteket. Ekkor a z összes lehetséges (komplex) értékeinek halmaza:

A $\{i, -i\}$.

B $\{1, -1\}$.

C $\{1, i, -1\}$.

D $\{1, i, -1, -i\}$.

Bizonyítás. Az első egyenletet megszorozva z -vel kapjuk, hogy $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz = 0$. Ebből kivonva a második egyenletet az $az^4 - a = 0$ egyenlethez jutunk. Mivel $a \neq 0$, ezért $z^4 = 1$ kell teljesülnön. Ennek az egyenletnek a gyökei a negyedrendű egységgyökök, amelyek a következők: $1, i, -1, -i$. Az $a = b = c = d = 1$ együtthatókra mindkét megadott egyenletből a $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $i, -1, -i$. A $z = 1$ abban az esetben lesz a megadott két egyenlet gyöke, ha $a + b + c + d = 0$, amelyet a, b, c és $d = -a - b - c$ együtthatók választása esetén könnyen elérhetünk. Tehát mind a négy negyedrendű egységgyök előfordulhat, mint z értéke, így a **D** állítás igaz és a többi hamis.

Válaszok:

A hamis;

B hamis;

C hamis;

D igaz.

25. Értelmezzük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt a következő módon:

$$f(x) = |x - 2k|, \quad \text{minden } x \in (2k - 1, 2k + 1] \text{ és minden } k \in \mathbb{Z} \text{ esetén.}$$

Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Az f függvény nem folytonos az $\mathbb{R}$ halmazon.

B Az f függvény deriválható az $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ halmazon.

C Az f függvény deriválható az $\mathbb{R}$ halmazon.

D Az f függvény nem folytonos a $\{2k - 1 : k \in \mathbb{Z}\}$ halmaz pontjaiban.

Bizonyítás. Mind a négy állítás igaz vagy hamis volta könnyen eldönthető, ha felvázoljuk az f függvény grafikonját.

Másként is eldönthető, hogy a megadott állítások közül melyek igazak. Ha $x_0 \in (2k - 1, 2k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, akkor $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} |x - 2k| = |x_0 - 2k| = f(x_0)$, tehát az f függvény folytonos a $\cup_{k \in \mathbb{Z}} (2k - 1, 2k + 1)$ halmazon. Az $x_0 = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$ pontok esetén

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \uparrow x_0} |x - 2(k - 1)| = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} |x - 2k| = 1 = f(x_0),$$

így az f függvény folytonos az egész $\mathbb{R}$ halmazon. Tehát az **A** és **D** állítások hamisak.

Az $x_0 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ pontokban a bal oldali derivált $f'_b(x_0) = -1$, míg a jobb oldali derivált $f'_j(x_0) = 1$, ezért az f függvény nem deriválható a $\{2k : k \in \mathbb{Z}\}$ halmaz pontjaiban. Az $x_0 = 2k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$ pontokban a bal oldali derivált $f'_b(x_0) = 1$, míg a jobb oldali derivált $f'_j(x_0) = -1$, ezért az f függvény nem deriválható a $\{2k - 1 : k \in \mathbb{Z}\}$ halmaz pontjaiban. Tehát az f függvény nem deriválható a $\mathbb{Z}$ halmaz pontjaiban, továbbá minden $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ esetén

$$f'(x_0) = \begin{cases} -1, & \text{ha } x_0 \in (2k - 1, 2k), \\ 1, & \text{ha } x_0 \in (2k, 2k + 1), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Összegezve, a **B** állítás igaz és a **C** állítás hamis.

□

Válaszok:

☐ **A** hamis;

☐ **B** igaz;

☐ **C** hamis;

☐ **D** hamis.

26. Legyen $I = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} dx$. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ **A** $I = \infty$.

☐ **B** $I = \frac{\pi}{8}$.

☐ **C** $I = \frac{\pi}{4}$.

☐ **D** $I < \frac{1}{2}$.

Bizonyítás. Kiszámlolva a következő integrált

$$\int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} dx = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \arctg(x^2 + 1) \Big|_0^t = \frac{1}{2} \arctg(t^2 + 1) - \frac{\pi}{8},$$

következik, hogy a határérték $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{x}{x^4 + 2x^2 + 2} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \arctg(t^2 + 1) - \frac{\pi}{8} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}$. $\square$

Válaszok:

☐ **A** hamis;

☐ **B** igaz;

☐ **C** hamis;

☐ **D** igaz.

27. Tekintjük az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$ függvényt és legyen n az f függvény helyi szélsőérték pontjainak száma. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ **A** $n = 0$.

☐ **B** $n = 1$.

☐ **C** $n = 2$.

☐ **D** $n = 3$.

Bizonyítás. Kiszámloljuk a függvény deriváltját:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2x}{\sqrt[3]{(x - 1)(x + 1)}},$$

mely függvény az $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ halmazon értelmezett. Felírjuk az f függvény változási táblázatát:

x	-1			0			1												
$2x$	-	-	-	-	-	-	0	+	+	+	+								
$\sqrt[3]{x^2-1}$	+	+	+	+	0	-	-	-	-	0	+	+	+	+					
$f'(x)$	-	-	-	-		+	+	+	+	0	-	-	-	-		+	+	+	+
$f(x)$	$\searrow \searrow \searrow$			$\nearrow \nearrow \nearrow$			$\searrow \searrow \searrow$			$\nearrow \nearrow \nearrow$									

A táblázat alapján az f függvény helyi szélsőérték pontjai az $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ és $x_3 = 1$. Tehát az f függvénynek 3 helyi szélsőérték pontja van. $\square$

Válaszok:

☐ **A** hamis;

☐ **B** hamis;

☐ **C** hamis;

☐ **D** igaz.

28. Az ABC háromszög A csúcsából húzott oldalfelező hossza egyenlő a BC oldal hosszával. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ **A** $5 \sin^2 A - \cos 2B - \cos 2C = -2$.

☐ **B** $5 \sin^2 A + \cos 2B + \cos 2C = 2$.

☐ **C** $3 \sin^2 A - 4 \sin B \sin C \cos A = 0$.

☐ **D** $4 \sin^2 A - 3 \sin B \sin C \cos A = 0$.

Bizonyítás. A szinusz-tétel alapján $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$, ahol R a háromszög köré írt kör sugara és a, b, c az BC , CA , AB oldalak hossza. Ha m_a az A csúcsból húzott oldalfelező hossza, akkor az oldalfelező tétele alapján

$$\begin{aligned} m_a = a &\Leftrightarrow m_a^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = a^2 \Leftrightarrow 5a^2 - 2b^2 - 2c^2 = 0 \Leftrightarrow \\ 5 \sin^2 A - 2 \sin^2 B - 2 \sin^2 C &= 0 \Leftrightarrow 5 \sin^2 A + (\cos 2B - 1) + (\cos 2C - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ 5 \sin^2 A + \cos 2B + \cos 2C &= 2, \end{aligned}$$

tehát a **B** állítás igaz.

Ha az **A** állítás igaz, akkor az első két állítást összeadva kapjuk, hogy

$$10 \sin^2 A = 0 \Leftrightarrow \sin^2 A = 0 \Leftrightarrow \sin A = 0,$$

ami egy háromszögben nem lehetséges. Tehát az **A** állítás hamis.

Az oldalfelvező tétele és a koszinusztétel alapján

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Leftrightarrow a^2 = \frac{5a^2}{2} - 2bc \cos A \Leftrightarrow 4bc \cos A = 3a^2 \Leftrightarrow \\ 16R^2 \sin B \sin C \cos A &= 12R^2 \sin^2 A \Leftrightarrow 3 \sin^2 A - 4 \sin B \sin C \cos A = 0, \end{aligned}$$

tehát a **C** állítás igaz.

Ha feltételezzük, hogy a **D** állítás igaz, akkor a **C** egyenlőséget szorozva 3-mal, a **D** egyenlőséget szorozva 4-gyel és kivonva őket egymásból kapjuk, hogy $-7 \sin^2 A = 0$, ami egy háromszögben nem lehetséges. Tehát a **D** állítás hamis. $\square$

Válaszok:

A hamis; **B** igaz; **C** igaz; **D** hamis.

29. Az MN szakasz párhuzamos egy trapéz alapjaival, a végpontjai a trapéz nem párhuzamos oldalain vannak, és a szakasz felezi a trapéz területét. Ha az alapok hossza a és b , $a > b$, akkor az MN szakasz l hosszúsága:

$$\begin{aligned} \text{A } l &= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. & \text{B } l &= \sqrt{ab}. & \text{C } l &> \frac{a+b}{2}. & \text{D } l &= \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \end{aligned}$$

Bizonyítás. Legyen P az AD és BC nem párhuzamos oldalak metszéspontja, legyenek $AB = a$ és $CD = b$ az oldall hosszak. A PAB , PMN és PDC háromszögek hasonlósága alapján kapjuk a területekre vonatkozó következő összefüggéseket:

$$T_a = T_{PAB\Delta} = \lambda a^2, \quad T_l = T_{PMN\Delta} = \lambda l^2, \quad T_b = T_{PDC\Delta} = \lambda b^2, \quad \text{ahol } \lambda > 0.$$

A feladat feltételéből következik, hogy a három terület egy számtani sorozat tagjai, vagyis

$$2\lambda l^2 = \lambda a^2 + \lambda b^2,$$

ahonnan kapjuk, hogy $l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. Tehát az **A** állítás igaz.

A közepekre vonatkozó egyenlőtlenségek szerint minden $a, b > 0$, $a \neq b$ esetén

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Tehát a **B** és **D** állítások hamisak, míg a **C** állítás igaz.

Másik megoldás. Bevezetjük a következő jelöléseket: $AB = a$ a nagyalap hossza, $CD = b$ a kisépalap hossza, és x , illetve y az $ABMN$, illetve $MNDC$ trapézok magasságainak hossza. A területekre vonatkozó feltétel alapján

$$T_{ABMN} = T_{MNDC} = \frac{T_{ABCD}}{2} \Leftrightarrow \frac{(a+l)x}{2} = \frac{(b+l)y}{2} = \frac{(a+b)(x+y)}{4}.$$

Az első egyenlőségből $x = \frac{(b+l)y}{a+l}$, amit behelyettesítve a második egyenlőségbe kapjuk, hogy $l^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$.

A a fenti számolások alapján igaz;

B $\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow a = b$, de $a > b$, tehát $l \neq \sqrt{ab}$, így az állítás hamis;

C $l = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} > \frac{a+b}{2}$ teljesül $a > b$ esetén, így az állítás igaz;

D $l = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ fennáll minden $a > b > 0$ esetén, ezért $l \neq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$, így az állítás hamis. $\square$

Válaszok:

☐ **A** igaz;

☐ **B** hamis;

☐ **C** igaz;

☐ **D** hamis.

30. Legyen A azon n természetes számok halmaza, melyek utolsó számjegye 6 és azzal a tulajdonsággal rendelkeznek, hogy ha ezt a számjegyet a szám elejére helyezzük, akkor egy nála négyszer nagyobb számot kapunk. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

☐ **A** Ha $n \in A$, akkor $3 \mid n$.

☐ **B** Létezik $n \in A$ úgy, hogy $12 \mid n$.

☐ **C** Létezik 8 számjegyű $n \in A$ szám.

☐ **D** Létezik $n \in A$ melynek az összes számjegye különböző.

Bizonyítás. Egy $n \in A$ szám esetén jelöljük y -nal a számjegyeinek számát. Ha $x = (n - 6)/10$, akkor $4(10x + 6) = 6 \cdot 10^{y-1} + x$, ahonnan kapjuk, hogy $13x = 2(10^{y-1} - 4)$. Az $10^{y-1} - 4$ szám $99 \dots 96$ alakú, ezért osztható 3-mal. Az $(3, 13) = 1$ alapján a fenti összefüggésből következik, hogy $3 \mid x$, tehát $3 \mid n$ és az ☐ **A** állítás igaz.

Észrevehetjük, hogy az x páros kell legyen. Tehát az n szám 06, 26, 46, 66 vagy 86 számjegyekre kell végződjön, ahonnan következik, hogy $4 \nmid n$, ezért a ☐ **B** állítás hamis.

Abban az esetben, ha $y = 8$, akkor $13 \mid 10^7 - 4$, ami ellentmondáshoz vezet, ezért a ☐ **C** állítás hamis.

Végül az x és y -ra vonatkozó fenti egyenletnek egy (sajátos) megoldása $y = 6$ és $x = 15384$, ahonnan kapjuk, hogy $n = 153846 \in A$. Tehát a ☐ **D** állítás igaz. $\square$

Válaszok:

☐ **A** igaz;

☐ **B** hamis;

☐ **C** hamis;

☐ **D** igaz.