UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

ADMITERE 2021
Sesiunea septembrie
Proba scrisă la MATEMATICĂ

1. Fie ecuaţia $x^2+ax+3=0$ cu soluţiile pozitive x_1 şi x_2 astfel încât $x_1^2, x_2, 1$ sunt în progresie geometrică (în această ordine). Atunci valoarea lui $a \in \mathbb{R}$ poate fi

A $2\sqrt{3}$; B $-2\sqrt{3}$; C $\sqrt{3}$; D $-\sqrt{3}$.

2. Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şirul de termen general $x_n = \dfrac{1}{4^n} C_{2n}^n$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.
B Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător.
C Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.
D Şirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

3. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$ este

A 1; B e^2; C $\dfrac{1}{e^2}$; D 0.

4. Valoarea limitei $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x}{e^x+e^{-x}-2}$ este

A 1; B 2; C $\dfrac{1}{2}$; D 0.

5. Se consideră vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ şi $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$, unde vectorii unitari $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ sunt perpendiculari. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A Pentru $a=-1$ şi $b=-6$ vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt coliniari.
B Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ au aceeeaşi lungime doar dacă $a=2$ şi $b=3$.
C Există o infinitate de numere reale a, b pentru care vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ au aceeaşi lungime.
D Vectorii $\vec{u}$ şi $\vec{v}$ sunt perpendiculari, dacă $2a=3b$.

6. Fie hexagonul regulat $ABCDEF$. Notăm $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{v}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

A $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. B $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{u} + \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$. C $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u} + \frac{3}{2}\overrightarrow{v}$. D $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{u} - \frac{1}{2}\overrightarrow{v}$.

7. Dacă S este mulţimea soluţiilor ecuaţiei $\dfrac{2\lg(x+3)}{\lg(5x+11)} = 1$, atunci:

A $S \subseteq [-2, 0]$; B $S \subseteq [-2, 1]$; C $S \subseteq [0, 1]$; D $S \subseteq [-2, -1]$.

8. Considerăm în $\mathbb{R}$ ecuaţia

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei este:

A $S = [3, 12]$; B $S = [1, \infty)$; C $S = [5, 10]$; D $S = \{4, 11\}$.

9. Fie $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. În planul xOy considerăm o mulţime $\mathcal{M}$ formată din n puncte distincte diferite de O. Numărul tuturor triunghiurilor care au două vârfuri în mulţimea $\mathcal{M}$ şi un vârf în punctul O este:

$\boxed{\text{A}}$ A_n^2; $\boxed{\text{B}}$ 2^n; $\boxed{\text{C}}$ C_{n+1}^3; $\boxed{\text{D}}$ cel mult C_n^2.

10. Considerăm sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y + (a+1)z &= 1, \end{cases}$$

unde a este parametru real. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Există mai multe valori ale lui a pentru care determinantul sistemului este 0.
$\boxed{\text{B}}$ Există o singură valoare a lui a pentru care sistemul este compatibil.
$\boxed{\text{C}}$ Există mai multe valori ale lui a pentru care sistemul este compatibil.
$\boxed{\text{D}}$ Dacă sistemul este compatibil, atunci admite o unică soluţie.

11. Dacă $\sin x = a$ şi $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, atunci:

$\boxed{\text{A}}$ $\sin 2x = 2a$; $\boxed{\text{B}}$ $\sin 2x = 2a\sqrt{1-a^2}$;

$\boxed{\text{C}}$ $\sin 2x = -2a\sqrt{1-a^2}$; $\boxed{\text{D}}$ $\cos 2x = 1 - 2a^2$.

12. Dacă $A(-2,-1)$, $B(2,1)$ și $C(-1,2)$ sunt puncte într-un sistem de coordonate carteziene, atunci triunghiul ABC este:

$\boxed{\text{A}}$ obtuzunghic; $\boxed{\text{B}}$ isoscel; $\boxed{\text{C}}$ dreptunghic; $\boxed{\text{D}}$ echilateral.

13. Într-un reper cartezian se consideră dreptele

$$d_1 : (m-1)x + (3m-7)y - 5 = 0 \text{ şi } d_2 : (m-2)x + (2m-5)y = 0,$$

unde m este un parametru real. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Dreptele sunt paralele pentru $m = 3$.
$\boxed{\text{B}}$ Există o valoare a parametrului m pentru care dreptele coincid.
$\boxed{\text{C}}$ Dreptele sunt perpendiculare pentru o singură valoare a lui m.
$\boxed{\text{D}}$ Dreptele nu sunt perpendiculare pentru nicio valoare a lui m.

14. Într-un reper cartezian xOy se consideră punctele $A(0,1)$ şi $H(3,2)$, unde H este ortocentrul triunghiului ABC. Panta dreptei BC este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ 3; $\boxed{\text{B}}$ -3; $\boxed{\text{C}}$ $\frac{1}{3}$; $\boxed{\text{D}}$ $-\frac{1}{3}$.

15. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{1/x}$. Ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul lui f este:

$\boxed{\text{A}}$ $y = x$; $\boxed{\text{B}}$ $y = x+1$; $\boxed{\text{C}}$ $y = x+2$; $\boxed{\text{D}}$ $y = x+3$.

16. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi fie funcţia $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \dfrac{x+a}{\sqrt{1-x^2}}$. Valoarea lui a pentru care tangenta la graficul lui f în punctul de abscisă 0 trece prin punctul $(-2,5)$ este:

$\boxed{\text{A}}$ 9; $\boxed{\text{B}}$ 7; $\boxed{\text{C}}$ -5; $\boxed{\text{D}}$ 5.

17. Valoarea integralei $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{3-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$ este:

[A] $\ln 2$; [B] $\frac{1}{4}\ln 2$; [C] $\frac{1}{2}\ln 2$; [D] $\frac{1}{2}$.

18. Valoarea integralei $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ este:

[A] 4; [B] 4e; [C] $8\mathrm{e}-4$; [D] $2\mathrm{e}+2$.

19. În corpul $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} x+\widehat{2}y &= \widehat{3} \\ \widehat{2}x+\widehat{4}y &= \widehat{2} \end{cases}$$

[A] nu are soluţii;
[B] are soluţie unică;
[C] are exact cinci soluţii distincte;
[D] are exact zece soluţii distincte.

20. Considerăm funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x. Stabiliţi valoarea de adevăr a următoarelor afirmaţii.

[A] Graficul funcţiei f intersectează axa Oy în cel puţin 2 puncte.
[B] Graficul funcţiei f nu intersectează axa Ox.
[C] Graficul funcţiei f intersectează axa Ox într-o infinitate de puncte.
[D] Graficul funcţiei f nu intersectează axa Oy.

21. Considerăm ecuaţia matriceală $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ în $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

[A] Ecuaţia are soluţie unică.
[B] Ecuaţia are exact două soluţii.
[C] Ecuaţia are mai mult de două soluţii.
[D] Suma tuturor soluţiilor ecuaţiei este O_2.

22. Punctele $A(0,2)$, $B(2,1)$ sunt vârfuri ale paralelogramului $ABCD$ şi $G(2,0)$ este centrul de greutate al triunghiului ABD. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

[A] Aria triunghiului ABD este egală cu 3.
[B] Aria triunghiului ABD este egală cu 6.
[C] Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu 6.
[D] Aria paralelogramului $ABCD$ este egală cu 12.

23. Numerele reale a şi b satisfac egalitatea $(\cos\ a+\cos\ b)^2+(\sin\ a+\sin\ b)^2 = 2\cos^2\frac{a-b}{2}$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

[A] $a-b\in\{2k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$; [B] $a-b\in\{(2k+1)\pi | k\in\mathbb{Z}\}$;

[C] $a-b\in\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$; [D] $a-b\in\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \,\middle|\, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

24. Folosind notaţiile obişnuite în triunghiul ABC avem $b = 5$, $c = 7$ şi $m(\widehat{B}) = 45°$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Există un singur triunghi ABC cu aceste date.
$\boxed{\text{B}}$ Există două triunghiuri ABC cu aceste date.
$\boxed{\text{C}}$ $\sin A \in \left\{\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$.
$\boxed{\text{D}}$ $a \in \{2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}$.

25. Mulţimea valorilor parametrului real m pentru care funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right) - mx$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ este:

$\boxed{\text{A}}$ $(0, \infty)$; $\boxed{\text{B}}$ $(-\infty, -1]$; $\boxed{\text{C}}$ $[-1, 1]$; $\boxed{\text{D}}$ $[-1, \infty)$.

26. Pentru o matrice $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ notăm $\operatorname{tr}(X) = x + t$, suma elementelor de pe diagonala principală a lui X. Pentru matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ limita $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{tr}(A^n)}{\det(A^n)}$ este egală cu:

$\boxed{\text{A}}$ 0; $\boxed{\text{B}}$ 2; $\boxed{\text{C}}$ 1; $\boxed{\text{D}}$ $+\infty$.

27. Fie a un parametru real şi considerăm legea de compoziţie

$$x * y = xy + ax + ay + 1$$

pe $\mathbb{R}$. Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?

$\boxed{\text{A}}$ Dacă $*$ admite element neutru, atunci a este unic determinat.
$\boxed{\text{B}}$ Există mai multe valori ale lui a pentru care $*$ admite element neutru.
$\boxed{\text{C}}$ Dacă e este element neutru pentru $*$, atunci $e = \frac{1}{a}$.
$\boxed{\text{D}}$ Dacă e este element neutru pentru $*$, atunci $e = -\frac{1}{a}$.

28. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - x^2$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $f'(0) = f''(0) = 0$.
$\boxed{\text{B}}$ 0 nu este punct de extrem local al funcţiei f.
$\boxed{\text{C}}$ Funcţia f' este strict monotonă.
$\boxed{\text{D}}$ 0 este punct de extrem global al funcţiei f''.

29. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se notează $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left(\ln x\right)^n \mathrm{d}x$. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ $I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$. $\boxed{\text{B}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. $\boxed{\text{C}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \mathrm{e}$. $\boxed{\text{D}}$ $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = 1$.

30. Diagonalele unui pătrat $\mathcal{P}_\alpha$ de latură α se află pe axele de coordonate ale unui sistem de coordonate carteziene ($\alpha \in (0, \infty)$). Fie N_α numărul de puncte din interiorul pătratului $\mathcal{P}_\alpha$ având coordonate numere întregi. Să se indice care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate.

$\boxed{\text{A}}$ Pentru $\alpha = 3$ avem $N_3 = 5$.
$\boxed{\text{B}}$ Pentru $\alpha = 3$ avem $N_3 = 13$.
$\boxed{\text{C}}$ Există α astfel încât $N_\alpha = 41$.
$\boxed{\text{D}}$ Există α astfel încât $N_\alpha = 67$.

UNIVERSITATEA BABEŞ-BOLYAI CLUJ-NAPOCA
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ŞI INFORMATICĂ

Răspunsuri corecte

ADMITERE 2021
Proba scrisă la MATEMATICĂ
Sesiunea septembrie

1. $\boxed{\textbf{B}}$

2. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

3. $\boxed{\textbf{C}}$

4. $\boxed{\textbf{A}}$

5. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

6. $\boxed{\textbf{B}}$

7. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

8. $\boxed{\textbf{C}}$

9. $\boxed{\textbf{D}}$

10. $\boxed{\textbf{C}}$

11. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

12. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

13. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

14. $\boxed{\textbf{B}}$

15. $\boxed{\textbf{D}}$

16. $\boxed{\textbf{B}}$

17. $\boxed{\textbf{C}}$

18. $\boxed{\textbf{A}}$

19. $\boxed{\textbf{A}}$

20. $\boxed{\textbf{C}}$

21. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

22. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

23. $\boxed{\textbf{B}}$

24. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

25. $\boxed{\textbf{B}}$

26. $\boxed{\textbf{C}}$

27. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

28. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

29. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

30. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$