

FELVÉTELI, 2021  
Szeptemberi vizsgaidőszak  
MATEMATIKA írásbeli vizsga

1. Tekintjük az  $x^2 + ax + 3 = 0$  egyenletet, amelynek  $x_1$  és  $x_2$  gyökei pozitívak és az  $x_1^2, x_2, 1$  számok mértani haladványt alkotnak (ebben a sorrendben). Ekkor az  $a \in \mathbb{R}$  lehetséges értéke

- A  $2\sqrt{3}$ ;                       B  $-2\sqrt{3}$ ;                       C  $\sqrt{3}$ ;                       D  $-\sqrt{3}$ .

2. Az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat általános tagja  $x_n = \frac{1}{4^n} C_{2n}^n$ . Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat szigorúan növekvő.                       B Az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat szigorúan csökkenő.  
 C Az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat korlátos.                       D Az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat konvergens.

3. A  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}} \right)^{\sqrt{x}}$  határérték:

- A 1;                       B  $e^2$ ;                       C  $\frac{1}{e^2}$ ;                       D 0.

4. A  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{e^x + e^{-x} - 2}$  határérték:

- A 1;                       B 2;                       C  $\frac{1}{2}$ ;                       D 0.

5. Tekintjük az  $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$  és  $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$  vektorokat, ahol az  $\vec{i}$  és  $\vec{j}$  egységvektorok merőlegesek egymásra. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az  $a = -1$  és  $b = -6$  értékekre az  $\vec{u}$  és  $\vec{v}$  vektorok kollineárisak.  
 B Az  $\vec{u}$  és  $\vec{v}$  vektorok csak akkor egyenlő hosszúak, ha  $a = 2$  és  $b = 3$ .  
 C Végtelen sok  $a, b$  valós szám létezik, amelyekre az  $\vec{u}$  és  $\vec{v}$  vektorok egyenlő hosszúak.  
 D Az  $\vec{u}$  és  $\vec{v}$  vektorok merőlegesek egymásra, ha  $2a = 3b$ .

6. Legyen  $ABCDEF$  egy szabályos hatszög. Ha  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  és  $\overrightarrow{AE} = \vec{v}$ , akkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \vec{v}$ .                       B  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ .                       C  $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$ .                       D  $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ .

7. Ha a  $\frac{2 \lg(x+3)}{\lg(5x+11)} = 1$  egyenlet megoldásainak halmaza  $S$ , akkor

- A  $S \subseteq [-2, 0]$ ;                       B  $S \subseteq [-2, 1]$ ;                       C  $S \subseteq [0, 1]$ ;                       D  $S \subseteq [-2, -1]$ .

8. Az  $\mathbb{R}$  halmazon tekintett

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$$

egyenlet megoldásainak halmaza:

- A  $S = [3, 12]$ ;                       B  $S = [1, \infty)$ ;                       C  $S = [5, 10]$ ;                       D  $S = \{4, 11\}$ .

9. Legyen  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$ . Az  $\mathcal{M}$  halmazt az  $xOy$  sík  $n$  különböző, az  $O$  ponttal nem egybeeső pontja alkotja. Azoknak a háromszögeknek a száma, amelyeknek két csúcsa az  $\mathcal{M}$  halmazban található és a harmadik csúcsa az  $O$  pont:

- A  $A_n^2$ ;                       B  $2^n$ ;                       C  $C_{n+1}^3$ ;                       D legfeljebb  $C_n^2$ .

10. Tekintjük az

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x + 2y + (a+1)z = 1 \end{cases}$$

egyenletrendszert, ahol  $a$  egy valós paraméter. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az  $a$  paraméternek több olyan értéke létezik, amelyekre az egyenletrendszer determinánsa 0.  
 B Az  $a$  paraméternek egyetlen olyan értéke létezik, amelyre az egyenletrendszer kompatibilis.  
 C Az  $a$  paraméternek több olyan értéke létezik, amelyekre az egyenletrendszer kompatibilis.  
 D Ha az egyenletrendszer kompatibilis, akkor egyetlen megoldása van.

11. Ha  $\sin x = a$  és  $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ , akkor:

- A  $\sin 2x = 2a$ ;                       B  $\sin 2x = 2a\sqrt{1-a^2}$ ;  
 C  $\sin 2x = -2a\sqrt{1-a^2}$ ;                       D  $\cos 2x = 1 - 2a^2$ .

12. Ha  $A(-2, -1)$ ,  $B(2, 1)$  és  $C(-1, 2)$  pontok egy Descartes-féle koordináta-rendszerben, akkor az  $ABC$  háromszög

- A tompaszögű;                       B egyenlő szárú;                       C derékszögű;                       D egyenlő oldalú.

13. Egy Descartes-féle koordináta-rendszerben tekintjük a

$$d_1 : (m-1)x + (3m-7)y - 5 = 0 \text{ és } d_2 : (m-2)x + (2m-5)y = 0$$

egyeneseket, ahol  $m$  egy valós paraméter. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Az egyenesek párhuzamosak  $m = 3$  esetén.  
 B Az  $m$  paraméternek van egy olyan értéke, amelyre az egyenesek egybeesnek.  
 C Az egyenesek az  $m$  paraméter egyetlen értékére merőlegesek.  
 D Az egyenesek az  $m$  paraméter egyetlen értékére sem merőlegesek.

14. Egy Descartes-féle  $xOy$  koordináta-rendszerben tekintjük az  $A(0, 1)$  és  $H(3, 2)$  pontokat, ahol  $H$  az  $ABC$  háromszög ortocentruma. Ekkor a  $BC$  egyenes irányítányezője:

- A 3;                       B -3;                       C  $\frac{1}{3}$ ;                       D  $-\frac{1}{3}$ .

15. Az  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény az  $f(x) = (x+2)e^{1/x}$  képlettel értelmezett. Az  $f$  grafikonjához a  $+\infty$ -ben húzott ferde aszimptota egyenlete:

- A  $y = x$ ;                       B  $y = x + 1$ ;                       C  $y = x + 2$ ;                       D  $y = x + 3$ .

16. Legyen  $a \in \mathbb{R}$  és  $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  az  $f(x) = \frac{x+a}{\sqrt{1-x^2}}$  képlettel értelmezett függvény. Az  $a$  értéke, amelyre a 0 abszcisszájú pontban az  $f$  grafikonjához húzott érintő átmegy a  $(-2, 5)$  ponton:

- A 9;                       B 7;                       C -5;                       D 5.

17. Az  $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{3 - \cos 2x} dx$  integrál értéke:

A  $\ln 2$ ;

B  $\frac{1}{4} \ln 2$ ;

C  $\frac{1}{2} \ln 2$ ;

D  $\frac{1}{2}$ .

18. Az  $\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$  integrál értéke:

A 4;

B  $4e$ ;

C  $8e - 4$ ;

D  $2e + 2$ .

19. A  $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$  test felett az

$$\begin{cases} x + \widehat{2}y = \widehat{3} \\ \widehat{2}x + \widehat{4}y = \widehat{2} \end{cases}$$

egyenletrendszernek

A nincs megoldása;

B egyetlen megoldása van;

C pontosan öt különböző megoldása van;

D pontosan tíz különböző megoldása van.

20. Tekintjük az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$  függvényt, ahol  $[x]$  az  $x$  valós szám egész részét jelöli. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Az  $f$  függvény grafikonja legalább két pontban metszi az  $Oy$  tengelyt.

B Az  $f$  függvény grafikonja nem metszi az  $Ox$  tengelyt.

C Az  $f$  függvény grafikonja végtelen sok pontban metszi az  $Ox$  tengelyt.

D Az  $f$  függvény grafikonja nem metszi az  $Oy$  tengelyt.

21. Az  $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  halmazon tekintjük az  $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$  mátrixegyenletet. Ekkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Az egyenletnek egyetlen megoldása van.

B Az egyenletnek pontosan két megoldása van.

C Az egyenletnek több, mint két megoldása van.

D Az egyenlet összes megoldásának összege  $O_2$ .

22. Az  $A(0,2)$ ,  $B(2,1)$  pontok az  $ABCD$  paralelogramma csúcsai és  $G(2,0)$  az  $ABD$  háromszög súlypontja. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

A Az  $ABD$  háromszög területe 3.

B Az  $ABD$  háromszög területe 6.

C Az  $ABCD$  paralelogramma területe 6.

D Az  $ABCD$  paralelogramma területe 12.

23. Az  $a$  és  $b$  valós számok teljesítik a  $(\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2 = 2 \cos^2 \frac{a-b}{2}$  egyenlőséget. Ekkor az alábbi állítások közül melyek igazak?

A  $a - b \in \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

B  $a - b \in \{(2k+1)\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

C  $a - b \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

D  $a - b \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

24. Az  $ABC$  háromszögben a szokásos jelöléseket használva  $b = 5$ ,  $c = 7$  és  $m(\widehat{B}) = 45^\circ$ . Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Egyetlen  $ABC$  háromszög létezik ezekkel az adatokkal.  
 B Két  $ABC$  háromszög létezik ezekkel az adatokkal.  
 C  $\sin A \in \left\{ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\}$ .  
 D  $a \in \{2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}$ .

25. Az  $m$  valós paraméterek halmaza, amelyekre az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln(1 + x^2) - mx$  függvény növekvő az  $\mathbb{R}$  halmazon:

- A  $(0, \infty)$ ;  B  $(-\infty, -1]$ ;  C  $[-1, 1]$ ;  D  $[-1, \infty)$ .

26. Egy  $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$  mátrix esetén jelölje  $\text{tr}(X) = x + t$  a főátló elemeinek összegét. Az  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$  mátrix esetén a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{tr}(A^n)}{\det(A^n)}$  határérték:

- A 0;  B 2;  C 1;  D  $+\infty$ .

27. Legyen  $a$  egy valós paraméter és az  $\mathbb{R}$  halmazon tekintjük a

$$x * y = xy + ax + ay + 1$$

műveletet. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A Ha a  $*$  műveletnek van semleges eleme, akkor az  $a$  paraméter egyértelműen meghatározott.  
 B Több olyan  $a$  paraméter létezik, amelyre a  $*$  műveletnek van semleges eleme.  
 C Ha  $e$  a  $*$  művelet semleges eleme, akkor  $e = \frac{1}{a}$ .  
 D Ha  $e$  a  $*$  művelet semleges eleme, akkor  $e = -\frac{1}{a}$ .

28. Az  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvényt az  $f(x) = e^x + e^{-x} - x^2$  képlettel értelmezzük. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A  $f'(0) = f''(0) = 0$ .  
 B A 0 nem helyi szélsőérték pontja az  $f$  függvénynek.  
 C Az  $f'$  függvény szigorúan monoton.  
 D A 0 globális szélsőérték pontja az  $f''$  függvénynek.

29. Minden  $n \in \mathbb{N}^*$  esetén legyen  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ . Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A  $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .  B  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ .  C  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = e$ .  D  $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = 1$ .

30. Az  $\alpha$  oldalhosszúságú  $\mathcal{P}_\alpha$  négyzet átlói egy Descartes-féle koordináta-rendszer koordinátatengelyein található ( $\alpha \in (0, \infty)$ ). Legyen  $N_\alpha$  a négyzet belsejében található egész koordinátájú pontok száma. Az alábbi állítások közül melyek igazak?

- A  $\alpha = 3$  esetén  $N_3 = 5$ .  
 B  $\alpha = 3$  esetén  $N_3 = 13$ .  
 C Létezik olyan  $\alpha$ , amelyre  $N_\alpha = 41$ .  
 D Létezik olyan  $\alpha$ , amelyre  $N_\alpha = 67$ .

## Helyes válaszok

FELVÉTELI, 2021  
Szeptember  
Írásbeli MATEMATIKÁBÓL

1.  B
2.  B,  C,  D
3.  C
4.  A
5.  A,  C
6.  B
7.  B,  C
8.  C
9.  D
10.  C
11.  B,  D
12.  B,  C
13.  A,  D
14.  B
15.  D
16.  B
17.  C
18.  A
19.  A
20.  C
21.  B,  D
22.  A,  C
23.  B
24.  B,  C,  D
25.  B
26.  C
27.  B,  D
28.  A,  C,  D
29.  A,  B,  C
30.  B,  C