BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

AUFNAHMEPRÜFUNG 2021
September
Schriftliche Prüfung in MATHEMATIK

1. Gegeben sei die Gleichung $x^2 + ax + 3 = 0$ mit den positiven Lösungen x_1 und x_2, so dass $x_1^2, x_2, 1$ in geometrischer Folge (in dieser Reihenfolge) sind. Dann kann der Wert von $a \in \mathbb{R}$

A $2\sqrt{3}$; **B** $-2\sqrt{3}$; **C** $\sqrt{3}$; **D** $-\sqrt{3}$

sein.

2. Es sei $(x_n)_{n\geq 1}$ die Folge mit allgemeinem Glied $x_n = \frac{1}{4^n} C_{2n}^n$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist streng wachsend.
B Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist streng fallend.
C Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist beschränkt.
D Die Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent.

3. Der Wert des Grenzwertes $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}}$ ist

A 1; B e^2; C $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$; D 0.

4. Der Wert des Grenzwertes $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - 2}$ ist

A 1; B 2; C $\frac{1}{2}$; D 0.

5. Gegeben seien die Vektoren $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ und $\vec{v} = 2\vec{i} + b\vec{j}$, wobei die Einheitsvektoren $\vec{i}$ und $\vec{j}$ senkrecht aufeinander stehen, und $a, b \in \mathbb{R}^*$ sind. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Für $a = -1$ und $b = -6$ sind die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ kollinear.
B Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ haben nur dann die gleiche Länge, falls $a = 2$ und $b = 3$ sind.
C Es gibt unendlich viele reelle Zahlen a, b, für die $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die gleiche Länge haben.
D Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ stehen senkrecht aufeinander, falls $2a = 3b$ ist.

6. Gegeben sei das gleichseitige Sechseck $ABCDEF$. Man bezeichne $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ und $\overrightarrow{AE} = \vec{v}$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \vec{v}$. B $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$. C $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$. D $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$.

7. Ist S die Lösungsmenge der Gleichung $\frac{2\lg(x+3)}{\lg(5x+11)} = 1$, dann ist:

A $S \subseteq [-2, 0]$; B $S \subseteq [-2, 1]$; C $S \subseteq [0, 1]$; D $S \subseteq [-2, -1]$.

8. Gegeben sei in $\mathbb{R}$ die Gleichung

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1.$$

Die Lösungsmenge der Gleichung ist:

A $S = [3, 12]$; B $S = [1, \infty)$; C $S = [5, 10]$; D $S = \{4, 11\}$.

9. Es sei $n \in \mathbb{N},\ n \geq 3$. Gegeben sei eine Menge $\mathcal{M}$ in der xOy-Ebene, die aus n verschiedenen Punkten ungleich O besteht. Die Anzahl aller Dreiecke, die zwei Eckpunkte in der Menge $\mathcal{M}$ und O als dritten Eckpunkt haben, ist:

A A_n^2; B 2^n; C C_{n+1}^3; D höchstens C_n^2.

10. Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{cases} (a-1)x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y + 3z &= 1 \\ x + 2y + (a+1)z &= 1, \end{cases}$$

wobei a ein reeller Parameter ist. Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

A Es gibt mehrere Werte von a, für die die Determinante des Systems gleich 0 ist.
B Es gibt einen einzigen Wert von a, für den das System lösbar ist.
C Es gibt mehrere Werte von a, für die das System lösbar ist.
D Ist das System lösbar, so hat es eine einzige Lösung.

11. Ist $\sin x = a$ und $x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$, dann gilt:

A $\sin 2x = 2a$; B $\sin 2x = 2a\sqrt{1-a^2}$;

C $\sin 2x = -2a\sqrt{1-a^2}$; D $\cos 2x = 1 - 2a^2$.

12. Sind $A(-2,-1)$, $B(2,1)$ und $C(-1,2)$ Punkte in einem kartesischen Koordinatensystem, dann ist das Dreieck ABC:

A stumpfwinklig; B gleichschenklig; C rechtwinklig; D gleichseitig.

13. Gegeben seien, in einem kartesischen Koordinatensystem, die Geraden

$$d_1 : (m-1)x + (3m-7)y - 5 = 0 \text{ und } d_2 : (m-2)x + (2m-5)y = 0,$$

wobei m ein reeller Parameter ist. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Für $m = 3$ sind die Geraden parallel.
B Es gibt einen Wert des Parameters m, für den die Geraden übereinstimmen.
C Es gibt einen einzigen Wert des Parameters m, für den die Geraden senkrecht aufeinander stehen.
D Es gibt keinen Wert des Parameters m, für den die Geraden senkrecht aufeinander stehen.

14. Gegeben seien die Punkte $A(0,1)$ und $H(3,2)$ in einem kartesischen Koordinatensystem xOy, wobei H das Orthozentrum des Dreiecks ABC ist. Die Steigung der Geraden BC beträgt:

A 3; B -3; C $\frac{1}{3}$; D $-\frac{1}{3}$.

15. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ sei durch $f(x) = (x+2)e^{1/x}$ definiert. Die Gleichung der schiefen Asymptote nach $+\infty$ an den Graphen von f ist:

A $y = x$; B $y = x + 1$; C $y = x + 2$; D $y = x + 3$.

16. Es seien $a \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \dfrac{x+a}{\sqrt{1-x^2}}$. Der Wert von a, für den die Tangente an den Graphen von f im Punkt mit der Abszisse 0 den Punkt $(-2, 5)$ enthält, ist:

$\boxed{\text{A}}$ 9; $\boxed{\text{B}}$ 7; $\boxed{\text{C}}$ -5; $\boxed{\text{D}}$ 5.

17. Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin 2x}{3 - \cos 2x}\, dx$ ist:

$\boxed{\text{A}}$ $\ln 2$; $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{4} \ln 2$; $\boxed{\text{C}}$ $\dfrac{1}{2} \ln 2$; $\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{2}$.

18. Der Wert des Integrals $\displaystyle\int_1^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ ist:

$\boxed{\text{A}}$ 4; $\boxed{\text{B}}$ 4e; $\boxed{\text{C}}$ $8e - 4$; $\boxed{\text{D}}$ $2e + 2$.

19. Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + \widehat{2}y & = \widehat{3} \\ \widehat{2}x + \widehat{4}y & = \widehat{2} \end{cases}$$

hat im Körper $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$

$\boxed{\text{A}}$ keine Lösung;
$\boxed{\text{B}}$ eine einzige Lösung;
$\boxed{\text{C}}$ genau fünf verschiedene Lösungen;
$\boxed{\text{D}}$ genau zehn verschiedene Lösungen.

20. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - [x] - \dfrac{1}{2}$, wobei $[x]$ den ganzen Teil der Zahl x darstellt. Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ Der Graph der Funktion f schneidet die Oy-Achse in wenigstens 2 Punkten an.
$\boxed{\text{B}}$ Der Graph der Funktion f schneidet die Ox-Achse nicht an.
$\boxed{\text{C}}$ Der Graph der Funktion f schneidet die Ox-Achse in unendlich vielen Punkten an.
$\boxed{\text{D}}$ Der Graph der Funktion f schneidet die Oy-Achse nicht an.

21. Gegeben sei in $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ die Matrizengleichung $X^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

$\boxed{\text{A}}$ Die Gleichung ist eindeutig lösbar.
$\boxed{\text{B}}$ Die Gleichung hat genau zwei Lösungen.
$\boxed{\text{C}}$ Die Gleichung hat mehr als zwei Lösungen.
$\boxed{\text{D}}$ Die Summe aller Lösungen der Gleichung ist O_2.

22. Die Punkte $A(0, 2)$, $B(2, 1)$ sind Eckpunkte des Parallelogramms $ABCD$ und $G(2, 0)$ ist der Schwerpunkt des Dreiecks ABD. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

$\boxed{\text{A}}$ Der Flächeninhalt des Dreiecks ABD ist gleich 3.
$\boxed{\text{B}}$ Der Flächeninhalt des Dreiecks ABD ist gleich 6.
$\boxed{\text{C}}$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ ist gleich 6.
$\boxed{\text{D}}$ Der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABCD$ ist gleich 12.

23. Die reellen Zahlen a und b genügen der Gleichheit $(\cos\ a + \cos\ b)^2 + (\sin\ a + \sin\ b)^2 = 2\cos^2 \dfrac{a-b}{2}$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A $a-b \in \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$;

B $a-b \in \{(2k+1)\pi | k \in \mathbb{Z}\}$;

C $a-b \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$;

D $a-b \in \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

24. Mit den üblichen Bezeichnungen im Dreieck ABC, seien $b=5$, $c=7$ und $m(\widehat{B}) = 45°$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Es gibt ein einziges Dreieck ABC mit diesen Daten.

B Es gibt zwei Dreiecke ABC mit diesen Daten.

C $\sin A \in \left\{ \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\}$.

D $a \in \{2\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, 4\sqrt{2}\}$.

25. Die Menge gebildet aus allen Werten des reellen Parameters m, für die die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - mx$, auf $\mathbb{R}$ steigend ist, ist:

A $(0, \infty)$;

B $(-\infty, -1]$;

C $[-1, 1]$;

D $[-1, \infty)$.

26. Für eine Matrix $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ sei $\operatorname{tr}(X) = x + t$ die Summe der Elemente auf der Hauptdiagonale von X. Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ist der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\operatorname{tr}(A^n)}{\det(A^n)}$ gleich:

A 0;

B 2;

C 1;

D $+\infty$.

27. Es seien a ein reeller Parameter und

$$x * y = xy + ax + ay + 1$$

eine auf $\mathbb{R}$ definierte Operation. Welche von den folgenden Aussagen sind wahr?

A Hat $*$ ein neutrales Element, dann ist a eindeutig bestimmt.

B Es gibt mehrere Werte von a, für die $*$ ein neutrales Element hat.

C Ist e ein neutrales Element von $*$, dann ist $e = \frac{1}{a}$.

D Ist e ein neutrales Element von $*$, dann ist $e = -\frac{1}{a}$.

28. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} - x^2$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A $f'(0) = f''(0) = 0$.

B 0 ist keine lokale Extremstelle der Funktion f.

C Die Funktion f' ist streng monoton.

D 0 ist eine globale Extremstelle der Funktion f''.

29. Für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ sei $I_n = \displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \left(\ln x\right)^n \mathrm{d}x$. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A $I_{n+1} + (n+1)I_n = \mathrm{e}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.

C $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = \mathrm{e}$.

D $\lim\limits_{n\to\infty} nI_n = 1$.

30. Die Diagonalen eines Quadrates $\mathcal{P}_\alpha$ mit der Seitenlänge α liegen auf den Koordinatenachsen eines kartesischen Koordinatensystems ($\alpha \in (0, \infty)$). Es sei N_α die Anzahl der Punkte im Inneren des Quadrates $\mathcal{P}_\alpha$ mit beiden Koordinaten ganze Zahlen. Man gebe an, welche von den folgenden Aussagen wahr sind.

A Für $\alpha = 3$ ist $N_3 = 5$.

B Für $\alpha = 3$ ist $N_3 = 13$.

C Es gibt α, so dass $N_\alpha = 41$ ist.

D Es gibt α, so dass $N_\alpha = 67$ ist.

BABEŞ-BOLYAI-UNIVERSITÄT CLUJ-NAPOCA
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK UND INFORMATIK

AUFNAHMEPRÜFUNG 2021
September
Antworten

1. $\boxed{\textbf{B}}$

2. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

3. $\boxed{\textbf{C}}$

4. $\boxed{\textbf{A}}$

5. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

6. $\boxed{\textbf{B}}$

7. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

8. $\boxed{\textbf{C}}$

9. $\boxed{\textbf{D}}$

10. $\boxed{\textbf{C}}$

11. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

12. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

13. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

14. $\boxed{\textbf{B}}$

15. $\boxed{\textbf{D}}$

16. $\boxed{\textbf{B}}$

17. $\boxed{\textbf{C}}$

18. $\boxed{\textbf{A}}$

19. $\boxed{\textbf{A}}$

20. $\boxed{\textbf{C}}$

21. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

22. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

23. $\boxed{\textbf{B}}$

24. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

25. $\boxed{\textbf{B}}$

26. $\boxed{\textbf{C}}$

27. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

28. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{C}}$, $\boxed{\textbf{D}}$

29. $\boxed{\textbf{A}}$, $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$

30. $\boxed{\textbf{B}}$, $\boxed{\textbf{C}}$