Fraktál alapú képtömörítés

Bodó Zalán

zbodo@cs.ubbcluj.ro

BBTE

Bevezetés

- tömörítések
  - veszteségmentes (lossless) - RLE, Huffman, LZW
  - veszteséges (lossy) - kvantálás, fraktál alapú
- fraktál alapú képtömörítés
  - alapötlet, stb.
  - definíciók, tételek
  - tömörítési, megjelenítési algoritmus
  - particionálási módszerek

Veszteséges tömörítők jellemzése

- tömörítési arány
- torzulás
- kódolási és dekódolási idő

Hűségi metrikák

- MSE: $MSE(u,u') = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}(u_j - u'_j)^2$
- RMSE: $RMSE(u,u') = \sqrt{MSE(u,u')}$
- PSNR: $PSNR(u,u') = 10\log_{10}\left(\frac{\Delta_u^2}{MSE(u,u')}\right)$

Run Lenght Encoding

0	**1**	**1**	**1**	**1**	0	0	0
0	**1**	0	0	0	**1**	0	0
0	**1**	0	0	**1**	**1**	0	0
0	**1**	**1**	**1**	**1**	0	0	0
0	**1**	**1**	**1**	**1**	0	0	0
0	**1**	0	0	**1**	**1**	0	0
0	**1**	0	0	0	**1**	0	0
0	**1**	**1**	**1**	**1**	0	0	0

Σ - ábécé; $\Rightarrow (\sigma, n)$, $\sigma \in \Sigma$, $n \in \{1, 2, \ldots\}$

Huffman kódolás

- $S =$ ábécé; $p(s) = \frac{k}{|S|}$, $s \in S$ (megjelenési valószínűség; statisztika)
- fa megépítése a megjelenési statisztika függvényében; élekhez: 0, 1-et rendelünk
- **ALG:**
  - $p(\cdot)$ kiszámolása
  - $L = S$ ($L =$ lista)

- Amíg $|L|! = 0$:
  - s_1, s_2 minimális valószínűségű szimbólumok kiválasztása
  - $s_1 s_2$ beszúrása a fába; $s_1 s_2 \rightarrow^0 s_1$; $s_1 s_2 \rightarrow^1 s_2$
  - vissza L-be: $s_1 s_2$; $p(s_1 s_2) = p(s_1) + p(s_2)$
- Amíg vége

Lempel-Ziv-Welch (LZW)

ALG:

```
STRING = input karakter
Amíg van input:
    CHAR = input karakter
    Ha STRING+CHAR létezik a táblában, akkor
        STRING = STRING+CHAR
    Különben
        Kiír(STRING kódja)
        Hozzáadjuk a STRING+CHAR-t a táblához
        STRING = CHAR
    Ha vége
Amíg vége
```

Kvantálás

- valós számok egészként való ábrázolása; veszteséges művelet
- Pl: $x = 2.78452$; $w = 4$
- kvantálás: $round(x \cdot w) = 11$
- visszaalakítás: tárolt érték$/w = 11/4 = 2.75$

Fraktál alapú képtömörítés

- M.F. Barnsley, A. Jacquin: kép mint transzformáció tárolása [transzformáció paramétereinek tárolása]
- IFS: $\{X; w_n, n = 1, 2, \ldots, N\}$
- $W(\cdot) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(\cdot)$
- önhasonlóság a képekben (!!!)
- Jacquin: nem IFS, hanem PIFS: $w_i : D_i \longrightarrow R_i$, úh. $\bigcup_i R_i = I$ $[R_i \cap R_j = \emptyset]$, $D_i \subseteq I$ (I-kép)
- affin transzformációk:

$$w_i \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i & b_i & 0 \\ c_i & d_i & 0 \\ 0 & 0 & s_i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_i \\ f_i \\ o_i \end{pmatrix}$$

- s_i - kontraszt-skálázás (contrast scaling)
- o_i - fényesség-eltolás (brightness offset)

Alapötlet

- keressünk egy olyan transzformáció-halmazt (kontrakciós tr.h.), melynek fixpontja a kódolni kívánt kép lesz (Barnsley, Jacquin)

Egy kis elmélet . . .

Metrikus terek

Affin transzformációk: $w(\vec{x}) = \mathbf{A}\vec{x} + \mathrm{b}$

Fixpont: $f(x_f) = x_f$

Kontrakció:

Az $f : X \to X$ (X, d) metrikus téren értelmezett transzf. kontrakció ha $\exists s \in [0, 1)$ úh. $d(f(x), f(y)) \leq s \cdot d(x, y)$, $\forall x, y \in X$

Előreiterált: $f^{\circ m}(x)$

Hátraiterált: $f^{\circ(-n)}(x)$

IFS

Iterált függvényrendszerek (IFS):

Legyen (X, d) metrikus tér. A $w_n : X \to X$, $n = 1, 2, \ldots, N$ kontrakciós leképzések véges halmazát $\{X; w_n, n = 1, \ldots, N\}$ iterált függvényrendszernek nevezzük. Ha w_n kontrakciós együtthatója s_n, akkor az IFS ($W = \bigcup_n w_n$) kontrakciós együtthatója $s = \max\{s_n | n = 1, \ldots, N\}$.

IFS-tétel

Legyen $\{X; w_n, n = 1, \ldots, N\}$ egy s k.e.-val rendelkező IFS. Ekkor az alábbiak szerint definiált $W : \mathcal{H}(X) \to \mathcal{H}(X)$ transzformáció

$$W(B) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(B),$$

minden B-re egy $(\mathcal{H}(X), h(d))$ téren értelmezett kontrakciós leképzés, azaz

$$h(W(B), W(C)) \leq s \cdot h(B, C),\ \forall B, C \in \mathcal{H}(X)$$

Rendelkezik egy egyedi $A \in \mathcal{H}(X)$ fixponttal, amelyre $A = W(A) = \bigcup_{n=1}^{N} w_n(A)$ teljesül, és $A = \lim_{n\to\infty} W^{\circ n}(B),\ \forall B \in \mathcal{H}(X)$. Az A halmazt az IFS attraktorának nevezzük.

Kollázs tétel (Barnsley, 1985)

Legyen (X, d) egy TMT. Legyen továbbá $T \in \mathcal{H}(X)$ és $\epsilon > 0$. Válasszunk egy olyan $s \in [0, 1)$ k.e.-jú $\{X; w_n, n = 1, \ldots, N\}$ IFS-t, melyre

$$h(T, \bigcup_{n=1}^{N} w_n(T)) \leq \epsilon$$

Ekkor

$$h(T, A) \leq \frac{\epsilon}{1 - s}$$

ahol A az IFS attraktora. Ekvivalens módon

$$h(T, A) \leq (1 - s)^{-1} \cdot h(T, \bigcup_{n=1}^{N} w_n(T)), \forall T$$

Képek tömörítése

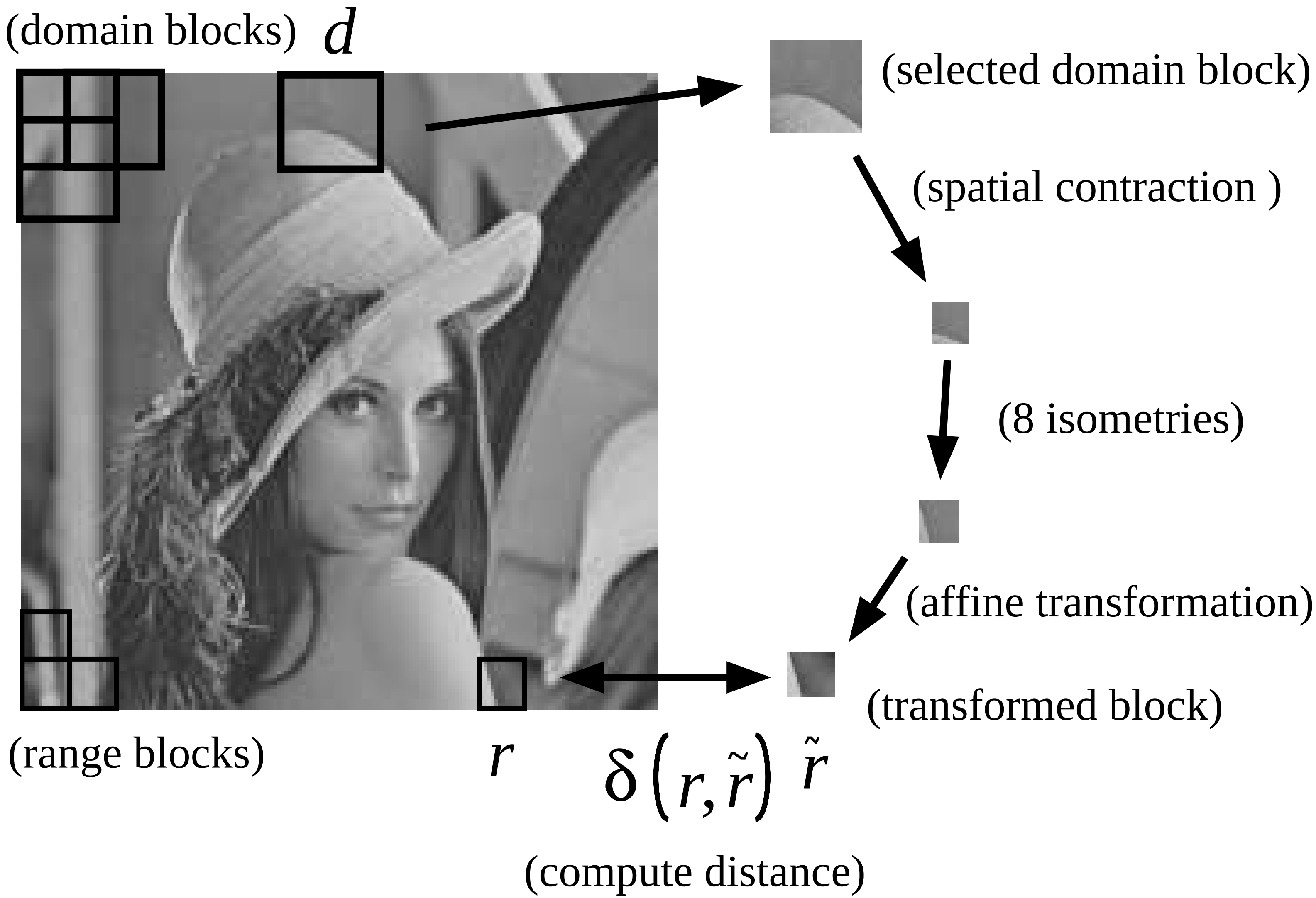
Egy T képre határozzuk meg az R_i blokkokat úh. $T = \bigcup R_i$

Hat. meg egy t tolerancia-szintet

Minden R_i-re:

- Hat. meg az a D_i domain-blokkot, melyre $d(R_i, D_i)$ minimális vagy $< t$
- Tároljuk el a w_i transzformáció és a D_i blokk paramétereit

Minden vége


(domain blocks)
d
(selected domain block)
(spatial contraction)
(8 isometries)
(affine transformation)
(transformed block)
(range blocks)
r
δ(r, r̃)
r̃
(compute distance)

Megjelenítés

Amíg nem konvergál:

Minden eltárolt D_i domain-blokkra:

Minden pontra D_i-ből:

Hat. meg a D_i-hez tartozó w_i transzformációval a pont koordinátáit és pixelintenzitását

Rajzoljuk ki a pontot

Minden vége

Minden vége

Amíg vége

Távolság, s, o

- $D_i = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $R_i = \{b_1, \ldots, b_n\}$
- $R = \sum_{i=1}^{n} [(s \cdot a_i + o) - b_i]^2 \longrightarrow \min$
- $o = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i - s \sum_{i=1}^{n} a_i \right)$
- $s = \frac{n \sum_{i=1}^{n} a_i b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} b_j}{n \sum_{i=1}^{n} a_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}$
- távolság (metrika): $\sqrt{R}$

Particionálások

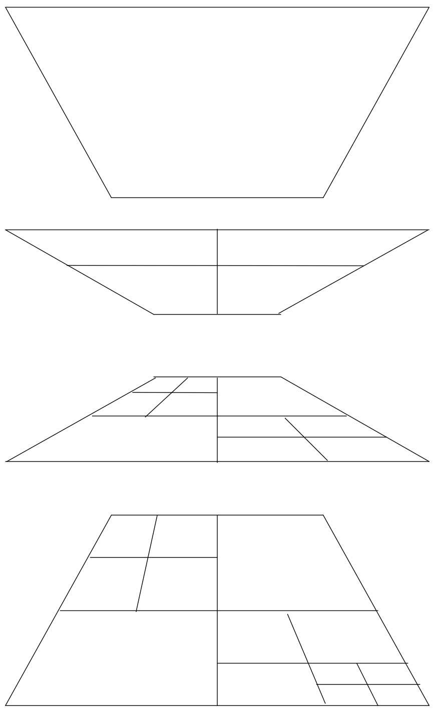
- négyzetes ($*$)
- quadtree ($*$)
- HV ($*$)
- hatszög alapú
- háromszög alapú (Delaunay, stb.)
- stb.

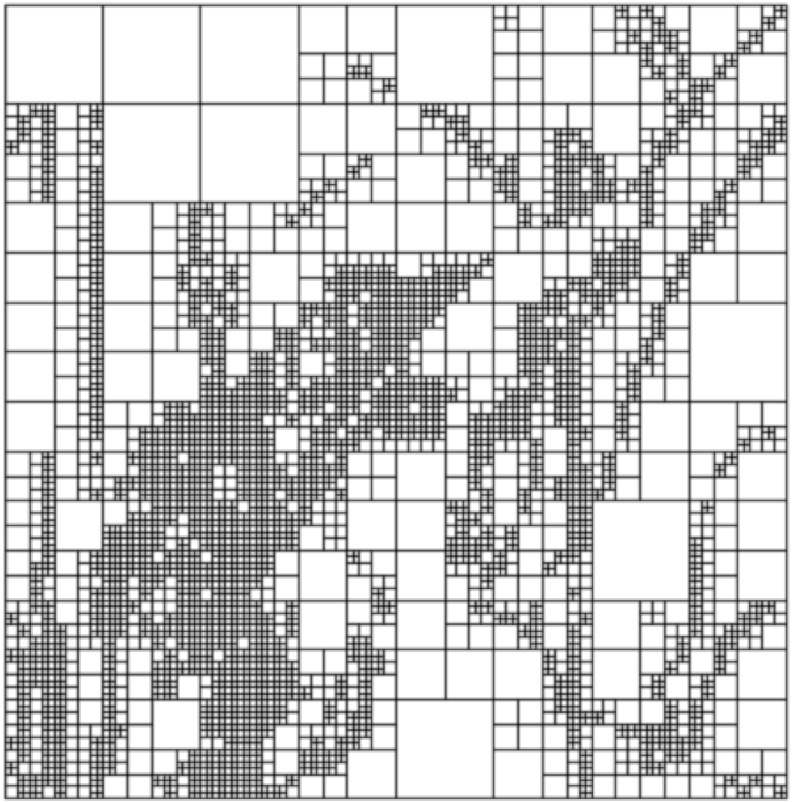
1. Négyzetes particionálás

Transzformációk (izometriák):

- azonosság
- tükrözés Oy-ra
- tükrözés Ox-re
- $180°$-os forgatás
- tükrözés $y = x$-re
- $90°$-os forgatás
- $270°$-os forgatás
- tükrözés $y = -x$-re

2. Quadtree particionálás





3. HV particionálás

$p_{ij},\ i = 0, \ldots, M-1$ (sor),

$j = 0, \ldots, N-1$ (oszlop)

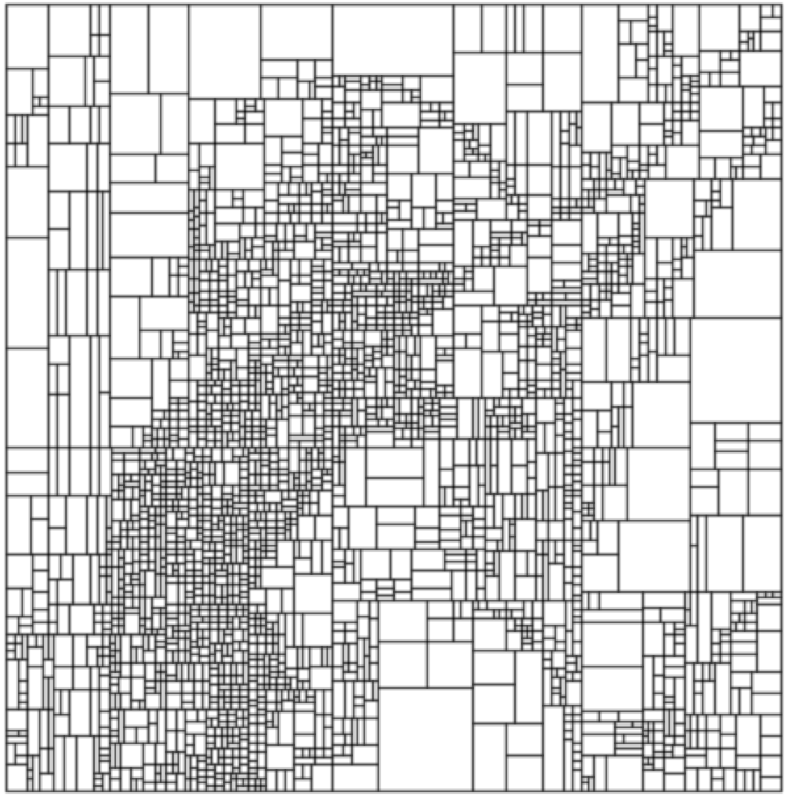
$S^i_{sor} = \sum_{j=0}^{N-1} p_{ij}$

$S^j_{osz} = \sum_{i=0}^{M-1} p_{ij}$

$h_i = \frac{\min(i, M-i-1)}{M-1}\left(S^i_{sor} - S^{i+1}_{sor}\right)$

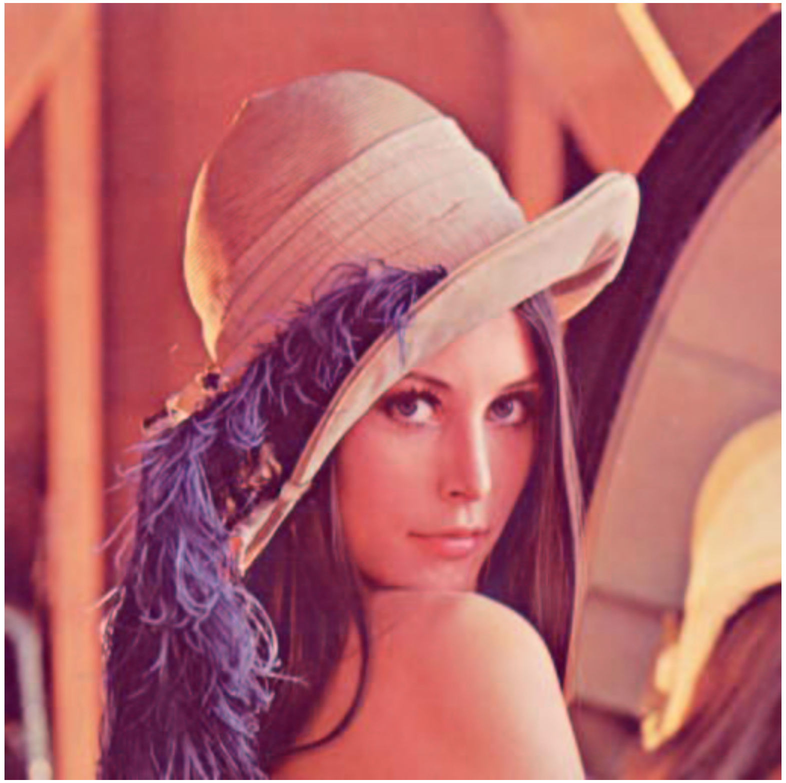
$v_j = \frac{\min(j, N-j-1)}{N-1}\left(S^j_{osz} - S^{j+1}_{osz}\right)$

$\max |h_i|, |v_j|$



Lenna

Lena Soderberg (Sjööblom)



Playboy
1972 November


IS&T's
50th Annual Conference