Formális nyelvek és fordítóprogramok
Szemináriumi feladatok

Bodó Zalán

Tartalomjegyzék

1. Generatív grammatikák

1. feladat (1-1/18, Csörnyei–Kása). *Adjunk meg egy nyelvtant, amely az* $L = \{uu^{-1} \mid u \in \{a,b\}*\}$ *nyelvet generálja, és határozzuk meg a típusát.*

2. feladat (1-3/18, Csörnyei–Kása). *Adjunk meg egy-egy nyelvtant a következő nyelvek generálására:*

$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n b^m c^p \mid n \geq 1, m \geq 1, p \geq 1\} \\ L_2 &= \{a^{2n} \mid n \geq 1\} \\ L_3 &= \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\} \\ L_4 &= \{a^n b^m \mid n \geq m \geq 1\} \end{aligned}$$

3. feladat (1-4/18, Csörnyei–Kása). *Adjunk meg egy nyelvtant az* $L = \{u \in \{0,1\}* \mid n_0(u) = n_1(u)\}$ *nyelv generálására, ahol* $n_0(u)$ *az* u *szóban szereplő 0-k,* $n_1(u)$ *pedig az 1-ek számát jelenti.*

4. feladat (1-5/18, Csörnyei–Kása). *Adjunk meg egy nyelvtant, amely a természetes számokat generálja.*

5. feladat. *Adjunk meg egy nyelvtant, amely a „szép" természetes számokat generálja. A „szép" alatt azt értjük, hogy egy természetes szám csak abban az esetben kezdődhet 0-val, ha maga a szám nulla; ebben az esetben egyetlen nullából áll.*

6. feladat. *Adjunk meg egy grammatikát, amely a valós számokat generálja.*

7. feladat. *Adjunk meg egy grammatikát, amely a „szép" valós számokat generálja. Egy „szép" valós szám alatt azt értjük, hogy a szám – hasonlóan a „szép" természetes számokhoz – nem kezdődhet nullával, csakis abban az esetben, ha a szám egész része nulla. Ugyanakkor a tizedes rész csak abban az esetben végződhet nullával, ha a tizedes rész nulla.*

8. feladat (1-8/19, Csörnyei–Kása). *Mutassuk meg, hogy egy r-betűs ábécé feletti véges nyelv, amelyben minden szó legfeljebb n hosszúságú, legfeljebb $\frac{r^{n+1}-1}{r-1}$ szót tartalmazhat.*

9. feladat. *Milyen nyelvet generál az alábbi átírási szabályhalmazzal rendelkező grammatika:*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aA \mid a \\ A &\rightarrow aAb \mid b \mid bS \mid \varepsilon \end{aligned}$$

10. feladat. *Milyen nyelvet generál az alábbi grammatika:*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aA \mid a \\ A &\rightarrow Sb \end{aligned}$$

11. feladat. *Milyen nyelvet generál az alábbi grammatika:*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSa \mid A \\ A &\rightarrow aAb \mid \varepsilon \end{aligned}$$

12. feladat. *Írjunk egy grammatikát email-címek generálásához, ahol az email-címeket a következőképpen definiáljuk:*[1]

lokális-rész@domain

A lokális részre vonatkozó feltételek:

- *latin betűket és számjegyeket tartalmazhat*
- *szerepelhetnek benne a következő speciális karakterek:* `#`, `-`, `_`, `~`, `!`, `$`, `&`, `` ` ``, `(`, `)`, `*`, `+`, `,`, `;`, `=`, `:`
- *szerepelhet benne a* `.` *karakter is azzal a feltétellel, hogy az nem lehet az első vagy utolsó karakter, illetve nem jöhet több pont egymás után*

A domain-re vonatkozó feltetételek:

- *tartalmazhat latin betűket és számjegyeket, illetve a − karaktert, de egy* komponens *nem kezdődhet vagy végződhet ezzel*
- *legalább egy darab* `.` *karakter meg kell jelenjen, de nem kezdődhet és végződhet ezzel*

13. feladat (1-2/18, Csörnyei–Kása). *Adott a $G = (N, T, P, S)$ kiterjesztett környezetfüggetlen nyelvtan, ahol $N = \{S, A, C, D\}$, $T = \{a, b, c, d, e\}$, $P = \{S \rightarrow abCADe, C \rightarrow cC, C \rightarrow \varepsilon, D \rightarrow dD, D \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow \varepsilon, A \rightarrow dDcCA\}$.*
Adjunk meg egy vele ekvivalens környezetfüggetlen nyelvtant.

14. feladat (1-6/18, Csörnyei–Kása). *Adott a $G = (N, T, P, S)$ kiterjesztett nyelvtan, ahol $N = S, A, B, C$, $T = a$, P pedig a következő helyettesítési szabályokat tartalmazza: $S \rightarrow BAB, BA \rightarrow BC, CA \rightarrow AAC, CB \rightarrow AAB, A \rightarrow a, B \rightarrow \varepsilon$.*
Milyen típusú ez a nyelvtan? ~~Adjunk meg egy vele ekvivalens, ugyanolyan típusú nem kiterjesztett nyelvtant.~~ Határozzuk meg a G nyelvtan által generált nyelvet.

15. feladat. *Adott a következő grammatika:*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \mid bSa \mid A \\ A &\rightarrow Ac \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Határozzuk meg a generált nyelvet.

[1] Az itt megadott definíció nem teljes, mivel az túlságosan bonyolult, hosszú lenne.

16. feladat. *Adott a következő nyelv:* $L = \{a^n bc^{n-1} \mid n \geq 2\}$. *Adjunk meg egy* G *grammatikát, amely ezt a nyelvet generálja.*

17. feladat. *Adott a következő grammatika:*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABC \\ A &\rightarrow aA \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \mid bA \\ C &\rightarrow Cc \mid \varepsilon \end{aligned}$$

(a) Határozzuk meg a generált nyelvet. (b) Adjunk meg egy vele ekvivalens, ugyanolyan típusú nem kiterjesztett nyelvtant.

18. feladat. *Adott a következő grammatika:*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AS \mid AA \\ A &\rightarrow aAb \mid \varepsilon \end{aligned}$$

(a) Határozzuk meg a generált nyelvet. (b) Adjunk meg egy vele ekvivalens, ugyanolyan típusú nem kiterjesztett nyelvtant.

19. feladat. *Adjunk meg egy grammatikát az* $L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ *nyelv generálásához.*

ÚTMUTATÁS. Először érdemes lenne tekinteni az $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ nyelvet, és ehhez felírni egy környezetfüggő vagy 0-típusú grammatikát – habár tudjuk, könnyedén felírható környezetfüggetlen grammatika is. Az elgondolás a következő lenne: pakoljunk be egymás után ab párosokat, majd az a-kat mozgassuk a sorozat elejére: így kapjuk meg az $a^n b^n$ sorozatot.

Ehhez használhatjuk az alábbi szabályhalmazt:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aBS \mid ab \\ Ba &\rightarrow aB \\ Bb &\rightarrow bb \end{aligned}$$

Az első két szabállyal generáljuk az $(aB)^{n-1}ab$ sorozatokat. A harmadik szabály az a és B szimbólumok felcserélését valósítja meg, azaz az a-kat a sorozat elejére mozgatja. Amint egy B egy b mellé ért, elvégezhetjük a bb-re való átírást – ez mindig a sorozat végén történhet csak meg (a sorozat végének értjük azt is, amikor már csak terminális b-k sorozata található a Bb után.)

Ehhez hasonlóan felírhatjuk az alábbi – kissé *elbonyolított* – grammatikát:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSB \mid ab \\ B &\rightarrow b \end{aligned}$$

Ezeket felhasználva, hasonlóképpen felírható egy grammatika az $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ nyelvhez is:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSBC \mid aBC \\ CB &\rightarrow BC \\ aB &\rightarrow ab \\ bB &\rightarrow bb \\ bC &\rightarrow bc \\ cC &\rightarrow cc \end{aligned}$$

20. feladat. *Adjunk meg egy grammatikát az* $L = \{0^{2n} 1^n 0^n \mid n \geq 1\}$ *nyelv generálásához.*

2. Véges automaták és reguláris nyelvek

21. feladat (2-2/59, Csörnyei–Kása). *Adjunk meg egy-egy ~~determinisztikus~~ véges automatát, amely*

a. a páros számú 0-t és páros számú 1-et tartalmazó szavakból álló – azaz a $\{0^{2n}1^{2m} \mid n, m \geq 0\}$ nyelvet ismeri fel,

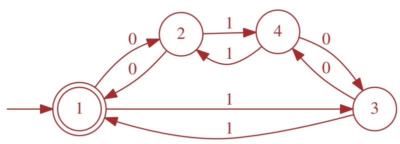
b. a páros számú 0-t és páratlan számú 1-et tartalmazó szavakból álló nyelvet ismeri fel,

c. a páratlan számú 0-t és páros számú 1-et tartalmazó szavakból álló nyelvet ismeri fel,

d. a páratlan számú 0-t és páratlan számú 1-et tartalmazó szavakból álló nyelvet ismeri fel.

22. feladat. *Adjunk meg egy olyan véges automatát, amely az olyan 0 és 1-esekből álló sorozatokat ismeri fel, melyekben páros számú szerepel mindkettőből, azonban ezek sorrendje tetszőleges. Vagyis a $\{w \in \{0,1\}^* \mid n_0(w) = 2k, n_1(w) = 2m, k, m \geq 0\}$ nyelvhez kerünk egy automatát.*

ÚTMUTATÁS. *Mivel ez egy kicsit nehezebb feladatnak minősül, megadunk egy megoldást. Be lehet-e egyszerűen látni, hogy ez az automata tényleg az adott nyelvet fogja felismerni?*



23. feladat (2-3/59, Csörnyei–Kása). *Adjunk meg egy-egy determinisztikus véges automatát a következő nyelvek felismerésére.*

$$
\begin{aligned}
L_1 &= \{a^n b^m \mid n \geq 1, m \geq 0\},\\
L_2 &= \{a^n b^m \mid n \geq 1, m \geq 1\},\\
L_3 &= \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 0\}\\
L_4 &= \{a^n b^m \mid n \geq 0, m \geq 1\}.
\end{aligned}
$$

24. feladat (2-4/59, Csörnyei–Kása). *Adjunk meg egy nemdeterminisztikus véges automatát, amely a legalább két 0-át és tetszőleges számú 1-et tartalmazó szavakat ismeri fel. Adjunk meg egy vele ekvivalens determinisztikus véges automatát.*

25. feladat. *Írjunk fel egy DVA-t a 2-vel osztható bináris számok felismerésére.*

26. feladat. *Írjunk fel egy DVA-t a 3-mal osztható bináris számok felismerésére.*

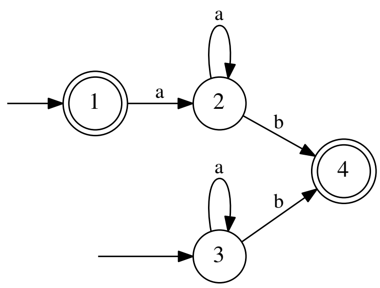
27. feladat. *Írjunk fel egy DVA-t az 5-tel osztható bináris számok felismerésére.*

ÚTMUTATÁS. A 26. és 27. feladatok esetében semmiképp se keressünk szabályokat a 3-mal, illetve 5-tel osztható bináris számok alakjára. A feladat valójában az lenne, hogy adjuk meg egy eljárást, melynek segítségével tetszőleges számmal osztható számok felismerésére szerkeszthető (determinisztikus) automata. (Valójában a számrendszer is tetszőleges, a binárist csak amiatt használjuk, hogy minél kevesebb átmenetünk legyen.)

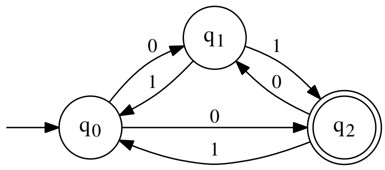
A számot balról jobbra „olvassuk”, ezért a 10-es számrendszerbe való szorzásos átalakításhoz hasonlóan járunk el.[2] Az állapotok a maradékosztályokat fogják jelölni, és a következő bit, azaz számjegy megmondja, hogy melyik maradékosztályba lépünk át.

Például a hárommal osztható bináris számok esetén a következő állapotai lesznek az automatának: $3\mathcal{M}$, $3\mathcal{M}+1$, $3\mathcal{M}+2$. A kezdőllapot és egyben végállapot a $3\mathcal{M}$ lesz. 0 szimbólum/számjegy esetén a $2 \cdot 3\mathcal{M}+0$ állapotba, azaz a $3\mathcal{M}$-be lépünk át, 1 szimbólumra pedig a $2 \cdot 3\mathcal{M}+1$, azaz a $3\mathcal{M}+1$ állapotba.

28. feladat. *Alakítsuk át az alábbi nemdeterminisztikus automatát determinisztikussá:*

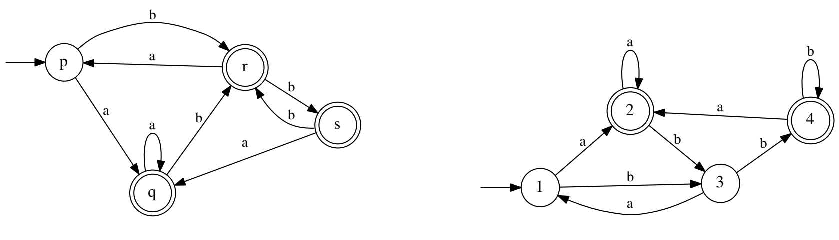


29. feladat. *Alakítsuk át az alábbi nemdeterminisztikus automatát determinisztikussá:*

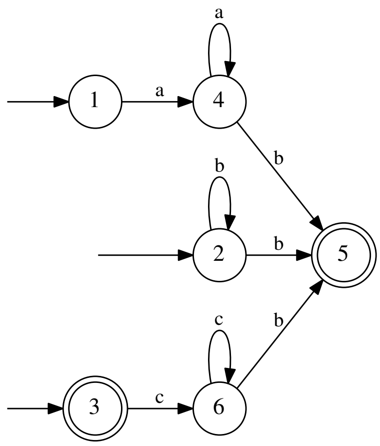


30. feladat. *Alakítsuk át az alábbi nemdeterminisztikus automatát determinisztikussá:*

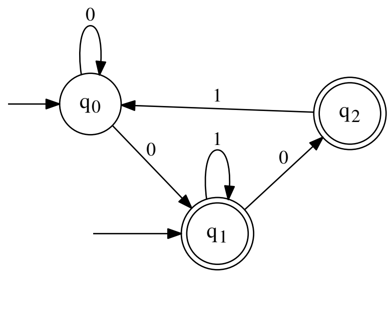
[2]Hagyományos átalakítás: $(1011)_2 = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 = (11)_{10}$. Szorzásos, balról jobbra történő átalakítás: $(1011)_2 = ((1 \cdot 2 + 0) \cdot 2 + 1) \cdot 2 + 1 = (11)_{10}$.



1. ábra. Minimalizálandó véges automaták a 34. feladathoz.



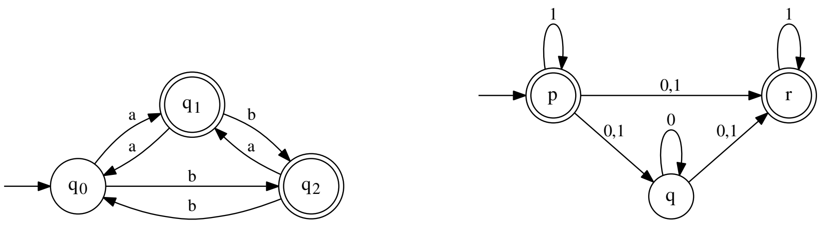
31. feladat. *Alakítsuk át az alábbi nemdeterminisztikus automatát determinisztikussá:*



32. feladat. *Adjunk meg egy véges automatát, amely a* $\{0, 1, 00, 1^n \mid n \geq 2\}$ *nyelvet ismeri fel. Ha az automata nemdeterminisztikus, alakítsuk determinisztikussá.*

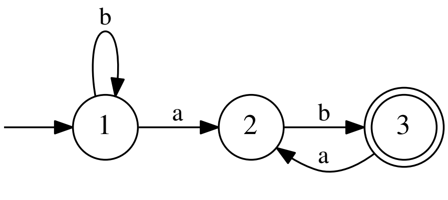
33. feladat. *Tudunk-e véges automatát szerkeszteni az* $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ *nyelv felismeréséhez? Indokoljuk meg válaszunkat.*

34. feladat (2-5/59, Csörnyei–Kása)**.** *Minimalizáljuk az 1. ábrán látható automatákat.*



(a) (b)

2. ábra. Véges automaták a 35. és 36. feladatokhoz.



3. ábra. Véges automata a 38. feladathoz.

35. feladat (2-6/59, Csörnyei–Kása). *Mutassuk meg, hogy a 2.(a) ábrán látható automata minimális.*

36. feladat (2-7/60, Csörnyei–Kása). *Alakítsuk át a 2.(b) ábrán látható véges automatát determinisztikussá, majd minimalizáljuk.*

37. feladat. *A 34., 35. és 36. feladatoknál ellenőrzésképpen vizsgáljuk meg az eredeti és a minimalizált automata ekvivalenciáját (ha szükséges, azaz, hogyha a kezdeti automata nem minimális).*

38. feladat. *Minimalizáljuk a 3. ábrán látható automatát:*

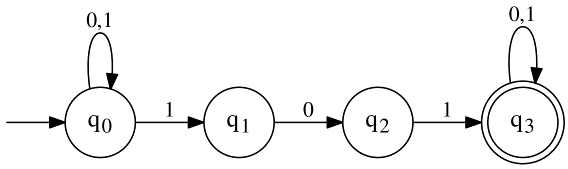
(i) a kiegészített (= teljessé alakított) automatával dolgozva;

(ii) az eredeti automatával dolgozva.

39. feladat (2-8/60, Csörnyei–Kása). *Értelmezzük az A_1 véges automatát, amely felismeri a $0(10)^n$ alakú szavakat ($n \geq 0$), az A_2-t, amely pedig az $1(01)^n$ ($n \geq 0$) alakúakat. Adjuk meg az $A_1 \cup A_2$ egyesített véges automatát, majd küszöböljük ki az ϵ-lépéseket.*

40. feladat (2-9/60, Csörnyei–Kása). *Rendeljünk a 4. ábrán látható véges automatához egy reguláris kifejezést.*

41. feladat. *Módosítsuk az előző feladatban szereplő automatát úgy, hogy most a q_1-es állapot is legyen egyben kezdő- és végállapot.*



4. ábra. Véges automata a 40. feladathoz.

42. feladat. *Rendeljünk a 29. feladatban szereplő véges automatához egy reguláris kifejezést a formális egyenletek módszerével.*

43. feladat. *Rendeljünk a 31. feladatban szereplő véges automatához egy reguláris kifejezést a formális egyenletek módszerével.*

44. feladat (2-10/60, Csörnyei–Kása)**.** *Rendeljünk az $ab{*}ba{*} + b + ba{*}a$ reguláris kifejezéshez egy véges automatát.*

45. feladat (2-11/60–61, Csörnyei–Kása)**.** *Rendeljünk a következő reguláris kifejezések mindegyikéhez egy ε-lépéses véges automatát:*

$$1{*} + 1{*}0(1{*}0){*}11{*}, \quad (1 + 00{*}1){*}, \quad \varepsilon + (0 + 1){*}1$$

Az így kapott automatákhoz rendeljünk egy-egy ekvivalens nemdeterminisztikus véges automatát, majd pedig egy-egy ekvivalens determinisztikus véges automatát. Mutassuk meg, hogy ezek a determinisztikus véges automaták ekvivalensek egymással.

46. feladat (2-12/61, Csörnyei–Kása)**.** *A pumpáló lemmát felhasználva bizonyítsuk be, hogy a következő nyelvek egyike sem reguláris:*

$$L_1 = \{a^n c b^n \mid n \geq 0\}, \quad L_2 = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 0\}, \quad L_3 = \{a^p \mid p \text{ prím}\}.$$

47. feladat (2-13/61, Csörnyei–Kása)**.** *Bizonyítsuk be, hogy ha L reguláris nyelv, akkor az $\{u^{-1} \mid u \in L\}$ nyelv is reguláris.*

48. feladat (I-1/84, Csörnyei–Kása)**.** *A révésznek át kell szállítania a folyó túlsó partjára egy kecskét, egy káposztát és egy farkast egy olyan csónakkal, amelyben rajta kívül csak egyetlen egyet vihet a kecske, a káposzta és a farkas közül. A farkas nem maradhat a kecskével egyik parton sem, hasonlóan a kecske sem a káposztával. Oldjuk meg a révész problémáját véges automata segítségével. Hány megoldás van?*

49. feladat. *Adjunk meg egy reguláris grammatikát a következő nyelvhez: $\{a^n b^m \mid n+m = 2k+1, n, m, k \geq 0\}$.*

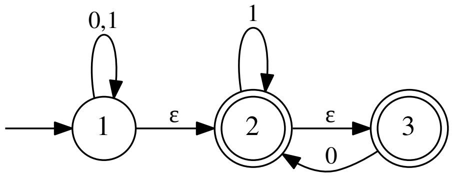
> **ÚTMUTATÁS**. Ha nem sikerül egyből egy reguláris grammatikát felírnunk, akkor első lépésben felírhatunk egy véges automatát, majd azt átalakíthatjuk reguláris nyelvtanná.

50. feladat. *ε-mentesítsük az 5. ábrán látható automatát.*

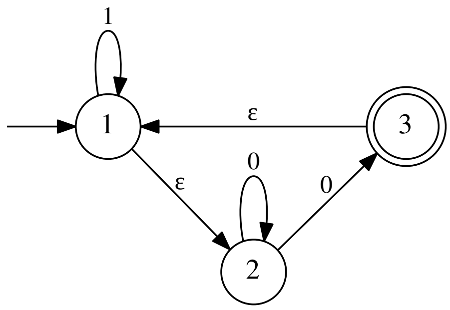
51. feladat. *ε-mentesítsük a 6. ábrán látható automatát.*

52. feladat. *Bizonyítsuk be, hogy az alábbi két reguláris kifejezés ekvivalens egymással:*

$$(x + y){*} \equiv (x{*}y{*}){*}$$



5. ábra. ε-lépéses automata az 50. feladathoz.



6. ábra. ε-lépéses automata az 51. feladathoz.

3. Veremautomaták és környezetfüggetlen nyelvek

53. feladat (3-1/83, Csörnyei–Kása). *Adjunk meg egy-egy veremautomatát a következő nyelvek felismerésére:*

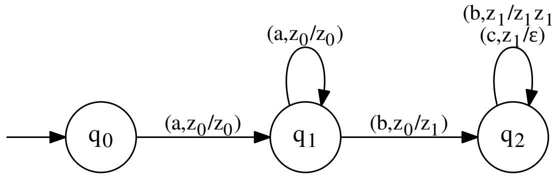
$$\begin{aligned} L_1 &= \{a^n c b^n \mid n \geq 0\}, \\ L_2 &= \left\{a^n b^{2n} \mid n \geq 1\right\}, \\ L_3 &= \left\{a^{2n} b^n \mid n \geq 0\right\} \cup \left\{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\right\}. \end{aligned}$$

54. feladat. *Oldjuk meg az 53. feladatot úgy, hogy mindegyik nyelvhez írjunk fel két veremautomatát: egyet, amely üres veremmel, illetve egy másikat, amely végállapottal ismeri fel az illető nyelvet.*

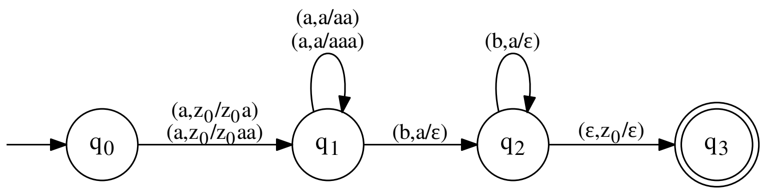
55. feladat. *Határozzuk meg a 7. ábrán látható veremautomata által felismert nyelvet.*

56. feladat. *Írjunk fel egy veremautomatát, amely az $L = \{ww^{-1} \mid w \in \{0,1\}*\}$ nyelvet ismeri fel.*

57. feladat. *Adjunk meg egy veremautomatát, amely az $L = \{a^n b^k c^{n+k} \mid n, k \geq 0\}$ nyelvet ismeri fel. Mit kell változtatnunk ezen az automatán, ha a kitevőkre vonatkozó feltételt megváltoztatjuk a következőképpen: $n \geq 0$, $k \geq 1$?*



7. ábra. Veremautomata az 55. feladathoz.



8. ábra. Veremautomata az 58. feladathoz.

58. feladat. *Határozzuk meg a 8. ábrán látható veremautomata által felismert nyelvet.*

59. feladat. *(a) Tekintsük azt a nyelvet, amely* jól formált *kerek zárójeles kifejezéseket tartalmaz. A jól formált azt jelent, hogy minden nyitó kerek zárójelnek vagy egy záró párja. A szavak csak az a, (és) szimbólumokat tartalmazzák. A kifejezések alakjára vonatkozó megkötések:*

1. *a kifejezés mindenképpen zárójellel kell kezdődjön és zárójellel kell végződjön;*
2. *a kifejezés lehet 1 db. zárójeles kifejezés vagy lehet több egymást követő zárójeles kifejezés;*
3. *két a szimbólum nem állhat egymás után;*
4. *egy zárójel nem lehet üres, vagyis lekevesebb egy a szimbólumot tartalmaznia kell.*

Példák: (a), $(a)(a(a)a)$, $((a)((a)))$
Ellenpéldák: a, (aa), $(a())$

(b) Tekintsük azt a nyelvet, amely az (a) pontban leírt nyelv kiterjeszése oly módon, hogy minden zárójeles kifejezést egy] szimbólum zár le, azzal a feltétellel, hogy a] pontosan egyszer szerepel minden szó végén, és az előtte álló kerek zárójeles kifejezés nem lehet jól formált, azaz néhány nyitó zárójelnek hiányzik a záró párja. A zárójelek ebben az esetben sem lehetnek üresek.
Példák: $(a]$, $((((a)a]$, $(a(a)a]$
Ellenpéldák: $(]$, $(a(]$, $(a)]$

Adjunk meg egy veremautomatát, amely a (b) pontban leírt nyelvet ismeri fel.

60. feladat. *Adjunk meg egy veremautomatát, amely az* $\{a^m b^{m+n} c^n \mid m, n \geq 0\}$ *nyelvet ismeri fel.*

61. feladat. *Adjunk meg egy–egy veremautomatát, melyek az alábbi nyelveket ismerik fel:*

(a) $L_1 = \left\{a^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} b^n \mid n \geq 1\right\}$

(b) $L_1 = \left\{a^n b^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \mid n \geq 0\right\}$

(c) $L_3 = L_1*$

62. feladat. *Adjunk meg egy veremautomatát a következő nyelv felismeréséhez:* $\left\{w \mid w \in \{a, b\}*, w = w^{-1}\right\}$.

63. feladat. *Adjunk meg egy veremautomatát a következő nyelvhez:*[3] $\{w \in \{a, b\}* \mid w \neq xx, x \in \{a, b\}*\}$.

ÚTMUTATÁS. A $\{w \in \{a, b\}* \mid w \neq xx, x \in \{a, b\}*\}$ nyelv felírható úgy mint a páratlan hosszúságú, az $\{a, b\}*$ felett értelmezett szavak halmaza egyesítve a páros hosszúságú, nem xx alakú szavak halmaza. A páratlan hosszúságú szavakhoz egy véges automata is egyszerűen felírható, ezért ezzel most nem foglalkozunk. A páros hosszúságú szavak halmaza felírható a következőképpen:

$$\begin{aligned}
&\{w \mid \exists x_1 y z_1 x_2 t z_2 = w, \text{ úgy, hogy } x_1, x_2, z_1, z_2 \in \{a, b\}*, \\
&|x_1| = |x_2|, |z_1| = |z_2|, y, t \in \{a, b\}\} = \\
&\{w \mid \exists x_1 y z_1 x_2 t z_2 = w, \text{ úgy, hogy } x_1, x_2, z_1, z_2 \in \{a, b\}*, \\
&|x_1| + |z_2| = |z_1 x_2|\} = \\
&\left\{w \mid \exists x^m y x^{m+n} t x^n = w, \text{ úgy, hogy } x \in \{a, b\}*\right\}
\end{aligned}$$

Az utolsó definíciót használva már könnyebben felírható egy veremautomata a páros hosszúságú szavakhoz.

64. feladat. *Tekintsük a következő grammatikát:*

$$\begin{aligned}
S &\rightarrow Ab \mid aaB \\
A &\rightarrow a \mid Aa \\
B &\rightarrow b
\end{aligned}$$

(a) Határozzuk meg a grammatika által generált nyelvet.

(b) Egyértelmű-e a grammatika? Indokoljuk meg válaszunkat.

(c) Ha nem egyértelmű, adjunk meg egy ekvivalens egyértelmű grammatikát.

65. feladat. *Adott az alábbi grammatika:*

$$S \rightarrow S + S \mid 0 \mid 1$$

(a) Egyértelmű-e a grammatika? Indokoljuk a választ.

(b) Ha nem egyértelmű, akkor adjunk meg egy ekvivalens egyértelmű nyelvtant.

66. feladat. *Adott a következő grammatika:*

$$S \rightarrow S + S \mid S * S \mid (S) \mid 0 \mid 1$$

(a) Egyértelmű-e a grammatika? Indokoljuk a választ.

[3] Megjegyezzük, hogy habár a $\{w \in \{a, b\}* \mid w = xx, x \in \{a, b\}*\}$ nyelv nem környezetfüggetlen, ennek komplementere viszont az.

(b) Ha nem egyértelmű, akkor adjunk meg egy ekvivalens egyértelmű nyelvtant.

ÚTMUTATÁS. Mivel nem létezik módszer a grammatikák egyértelműségének eldöntésére, és hasonlóképp arra sem, hogy egyértelműsíthető-e a grammatika, illetve nincs algoritmus egy nyelvtan egyérteműsítésére, ezért minden nyelvtan esetén valamilyen módon be kell látnunk, hogy az egyértelmű-e vagy sem, ami nem egyszerű feladat.

Az előző grammatika által generált nyelvhez egy egyértemű grammatika lenne a következő:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A + S \mid A * S \mid A \\ A & \rightarrow & 0 \mid 1 \mid (S) \end{array}$$

67. feladat. *Adott a következő grammatika:*

$$S \rightarrow 1S0S \mid 0S1S \mid 0 \mid 1$$

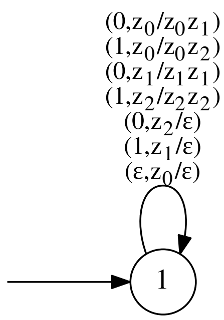
(a) Határozzuk meg a grammatika által generált nyelvet.

(b) Egyértelmű-e a grammatika? Indokoljuk meg válaszunkat.

(c) Ha nem egyértelmű, adjunk meg egy ekvivalens egyértelmű nyelvtant.

ÚTMUTATÁS. A grammatika által generált nyelv: $\{w \mid w \in \{0,1\}*, n_0(w) = n_1(w)\}$.

Sok esetben egyszerűbb felírni egy determinisztikus (!) veremautomatát, majd ahhoz meghatározni – a tanult algoritmussal – egy környezetfüggetlen nyelvtant. Ebben az esetben is ez tűnik az egyszerűbbnek. A legegyszerűbb ilyen automata valószínűleg a következő:



Erre pedig a következő grammatikát kapjuk:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & \varepsilon \mid 0BS \mid 1AS \\ A & \rightarrow & 0 \mid 1AA \\ B & \rightarrow & 1 \mid 0BB \end{array}$$

68. feladat. *Adott a 9. ábrán látható veremautomata, melynek kezdeti veremszimbóluma z_0. Alkalmazva a tanult algoritmust, rendeljünk a veremautomatához egy környezetfüggetlen nyelvtant.*

69. feladat (Pénzváltó veremautomata)**.** *Adjunk meg egy veremautomatát a következő nyelvhez:*

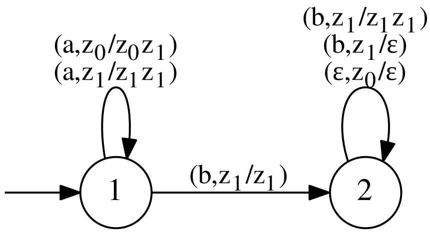
$$\{x = y \mid x \in \{1,2\}*, y \in \{5\}*, n_1(x) + 2n_2(x) = 5n_5(y)\},$$

ahol $n_a(b)$ az a szimbólumok számát jelöli b-ben.

70. feladat. *Adjunk meg egy veremautomatát a következő nyelvhez:*

$$\{x = y \mid x \in \{1,5\}*, y \in \{10\}*, n_1(x) + 5n_5(x) = 10n_{10}(y)\},$$

ahol $n_a(b)$ az a szimbólumok számát jelöli b-ben.



9. ábra. A 68. feladathoz tartozó veremautomata.

4. Szintaktikai elemzések

71. feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy alábbi nyelvtan $LL(1)$ nyelvtan-e.*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid bA \\ A &\rightarrow aA \mid \varepsilon \end{aligned}$$

72. feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy alábbi nyelvtan $LL(1)$ nyelvtan-e.*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aS \mid aA \\ A &\rightarrow bA \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Ha nem $LL(1)$, akkor $LL(2)$?
Átalakítható-e $LL(1)$-gyé?

73. feladat. *Vizsgáljuk meg, hogy alábbi nyelvtan $LL(1)$ nyelvtan-e.*

$$\begin{aligned} S &\rightarrow A \mid B \\ A &\rightarrow aAb \mid ab \\ B &\rightarrow aBc \mid ac \end{aligned}$$

Ha nem $LL(1)$, akkor $LL(2)$? $LL(k)$?
A nyelv $LL(k)$?

74. feladat (6-1/148, Csörnyei–Kása)**.** *Határozzuk meg, hogy a következő nyelvtanok közül melyek $LL(1)$ nyelvtanok. A nyelvtanoknak csak a helyettesítési szabályait adjuk meg.*

1.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABc \\ A &\rightarrow a \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Ab \\ A &\rightarrow a \mid B \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow ABBA \\ A &\rightarrow a \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

Alakítsuk át $LL(1)$-es grammatikává!

4.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSe \mid A \\ A &\rightarrow bAe \mid B \\ B &\rightarrow cBe \mid d \end{aligned}$$

75. feladat (6-2/148, Csörnyei–Kása)**.** *Bizonyítsuk be, hogy a következő nyelvtanok $LL(1)$ nyelvtanok. A nyelvtanoknak csak a helyettesítési szabályait adjuk meg.*

1.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow Bb \mid Cd \\ B &\rightarrow aB \mid \varepsilon \\ C &\rightarrow cC \mid \varepsilon \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSA \mid \varepsilon \\ A &\rightarrow c \mid bS \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} S &\rightarrow AB \\ A &\rightarrow a \mid \varepsilon \\ B &\rightarrow b \mid \varepsilon \end{aligned}$$

76. feladat (6-9/150, Csörnyei–Kása)**.** *A fenti példákban szereplő $LL(1)$ nyelvtanokhoz készítsük el az elemző táblázatokat.*

77. feladat. *Adott az alábbi szabályhalmazzal rendelkező grammatika:*

$$S \rightarrow aSb \mid a$$

(a) Határozzuk meg a grammatika által generált nyelvet.

(b) $LL(1)$-es a grammatika?

(c) $LL(2)$-es a grammatika?

(d) Próbáljunk meg felírni egy $LL(1)$ grammatikát ehhez a nyelvhez.

78. feladat. *Adott a következő szabályhalmazzal rendelkező grammatika:*

$$E \rightarrow E + E \mid 0 \mid 1$$

Határozzunk meg egy ezzel ekvivalens $LL(1)$ grammatikát.

79. feladat. *Adott a következő grammatika:*

$$E \rightarrow 0 \mid 1 \mid E+E \mid E*E \mid (E)$$

Határozzunk meg egy ezzel ekvivalens $LL(1)$ grammatikát.

80. feladat. *Adott a következő grammatika:*

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & C \mid CS \\ C & \rightarrow & 0 \mid 1 \mid I \\ I & \rightarrow & if\ F\ then\ C \\ & & \mid if\ F\ then\ C\ else\ C \\ F & \rightarrow & 0 \mid 1 \end{array}$$

Határozzunk meg egy ezzel ekvivalens $LL(1)$ grammatikát.

81. feladat. *Adott a következő szabályhalmazzal rendelkező grammatika:*

$$\begin{array}{rcl} A & \rightarrow & aX \mid aBX \\ X & \rightarrow & bX \mid b \\ B & \rightarrow & ab \end{array}$$

Határozzunk meg egy ezzel ekvivalens $LL(1)$ grammatikát.

82. feladat. *Adott a következő szabályhalmazzal rendelkező grammatika:*

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & X \\ X & \rightarrow & Yb \mid aa \\ Y & \rightarrow & a \mid bYa \end{array}$$

Határozzunk meg egy ezzel ekvivalens $LL(1)$ grammatikát.

83. feladat. *Adott a következő szabályhalmazzal rendelkező grammatika:*

$$S \rightarrow 0+S \mid 1+S \mid 0 \mid 1$$

(a) $LL(1)$-es a grammatika?

(b) $LL(2)$-es a grammatika?

(c) Erős $LL(2)$-es a grammatika?

(d) Írjuk fel az (erős $LL(2)$) elemző táblázatot.

84. feladat. *A 74. feladat 1. nyelvtanához írjuk fel az $LR(1)$ elemző táblázatot.*

85. feladat (Csörnyei–Kása, 6-6/149, 6-11/150)**.** *Az alábbi szabályhalmazzal rendelkező grammatikákhoz készítsük el az $LR(1)$ elemző táblázatokat:*

1.

$$\begin{array}{rcl} S' & \rightarrow & S \\ S & \rightarrow & aSS \mid b \end{array}$$

2.

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ S &\rightarrow SSa \mid b \end{aligned}$$

86. feladat. *Tekintsük az alábbi szabályhalmazzal rendelkező grammatikát:*

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ S &\rightarrow 1A \\ A &\rightarrow \varepsilon \mid +1A \mid -1A \end{aligned}$$

(a) $LL(1)$ *grammatika-e? Ha igen, akkor készítsük el az elemző táblázatot, majd elemezzük az* `1+1-1` *mondatot.*

(b) $LR(1)$ *grammatika-e? Ha igen, akkor készítsük el az elemző táblázatot (vagy automatát), majd elemezzük az* `1+1-1` *mondatot.*

(c) $LALR(1)$ *grammatika-e? Indokoljuk meg válaszainkat!*

87. feladat. *Adott a következő szabályhalmazzal rendelkező grammatika, amely az if-then-else problémát (*dangling else*) hivatott szemléltetni:*[4]

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ S &\rightarrow iSeS \mid iS \mid a \end{aligned}$$

Számítsuk ki az $LR(1)$*-elemek kanonikus halmazait (*$H_0, H_1, \ldots$*), majd írjuk fel az elemző táblázatot. Vizsgáljuk meg, hol és miért következik be konfliktus, illetve határozzuk meg a konfliktus típusát.*

88. feladat. *Adott a következő grammatika:*

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ S &\rightarrow Xb \mid X \\ X &\rightarrow aXb \mid a \mid \varepsilon \end{aligned}$$

(a) *Mi a generált nyelv?*

(b) $LL(1)$ *típusú-e a grammatika? Ha igen, írjuk fel az elemző táblázatot.*

(c) $LR(1)$ *típusú-e a grammatika? Ha igen, írjuk fel az elemző táblázatot.*

(d) $LALR(1)$ *típusú-e a grammatika?*

89. feladat. *Adott a következő grammatika:*

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ S &\rightarrow aSA \mid b \\ A &\rightarrow b \mid c \end{aligned}$$

(a) *Mi a generált nyelv?*

(b) $LL(1)$ *típusú-e a grammatika? Ha igen, írjuk fel az elemző táblázatot.*

(c) $LR(1)$ *típusú-e a grammatika? Ha igen, írjuk fel az elemző táblázatot.*

(d) $LALR(1)$ *típusú-e a grammatika?*

[4] A grammatika nemterminálisainak halmaza $N = \{S', S\}$, a terminálisok pedig $T = \{i, e, a\}$. Az i az `if kifejezes then` sorozatot jelöli, az e az `else` kulcsszót, az a terminális pedig valamilyen más utasítást.