Formális nyelvek és fordítóprogramok

11–12. Alulról-felfelé haladó elemzés. $LR(1)$ és $LALR(1)$ elemzések

Bodó Zalán

Babeș–Bolyai Tudományegyetem
Matematika és Informatika Kar

$LR(k)$ elemzésben használatos fogalmak

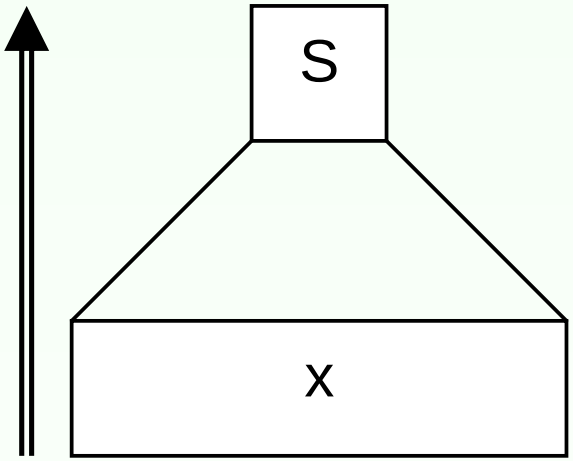
$LR(1)$ kanonikus halmazok

Az $LR(1)$ elemző

Az $LALR(1)$ elemző

$LR(k)$ elemzésben használatos fogalmak

$LR(k)$ és $LR(1)$ elemzések: **alulról-felfelé** haladó elemzés: a terminálisokból (a programból) kiindulva próbáljuk felépíteni a szintaxisfát, azaz eljutni az S szimbólumhoz **úgy**, hogy mindig megkeressük a mondatforma **nyelét** (= legbaloldalibb egyszerű részmondat) és azt helyettesítjük a szabály bal oldalával.



Def. Legjobboldalibb helyettesítés

Adott βAx mondatforma, $\beta \in (N \cup T)^*$, $x \in T^*$, és $A \to \alpha$ szabály esetén a $\beta\alpha x$-t legjobboldalibb helyettesítésnek nevezzük.

Def. Legjobboldalibb levezetés

Ha egy levezetésben minden helyettesítés **legjobboldalibb**, akkor a levezetést **legjobboldalibb levezetésnek** nevezzük és az alábbi módon jelöljük:

$$S \underset{\text{legjobb}}{\overset{*}{\Rightarrow}} x$$

legjobboldalibb levezetés = alulról-felfelé haladó elemzés inverze

1. Példa

Tekintsük a következő grammatikát:

$$S \quad \rightarrow \quad S + S \mid S - S \mid (S) \mid 0 \mid 1$$

és a $w = 1 - (0 - 1)$ szimbólumsorozatot.
Adjuk meg w legjobboldalibb levezetését. A nyél segítségével ez visszafelé a következő módon írható fel:
$\underline{1} - (0 - 1) \Leftarrow S - (\underline{0} - 1) \Leftarrow S - (S - \underline{1}) \Leftarrow S - (\underline{S - S}) \Leftarrow S - \underline{(S)} \Leftarrow \underline{S - S} \Leftarrow S$
A nyelet aláhúzással jelöltük.

$LR(k)$ nyelvtanok

- # jelölje a szimbólumsorozat végét
- $S' \to S$ új szabály bevitele $\Rightarrow$ kiegészített nyelvtan:

$$G' = (N \cup \{S'\}, T, P \cup \{S' \to S\}, S')$$

Def. $LR(k)$ nyelvtan

Egy kiegészített nyelvtan $LR(k)$ nyelvtan ($k \geq 0$), ha

$$\begin{aligned} S' &\overset{*}{\Rightarrow} \alpha A w \Rightarrow \alpha\beta w \\ S' &\overset{*}{\Rightarrow} \gamma B x \Rightarrow \gamma\delta x = \alpha\beta y \end{aligned}$$

levezetésekre

$$FIRST_k(w) = FIRST_k(y)$$

esetén $\alpha = \gamma, \quad A = B, \quad x = y.$

Informálisan: $LR(k)$ nyelvtan, ha az $\alpha\beta w$ mondatformában a w első szimbólumától kezdve előreolvasha k db. szimbólumot, egyértelműen meghatározható, hogy β a nyél, vagyis a redukálást az $A \to \beta$ szabállyal kell végezni.

Def. Nyél (ismétlés)

Egy mondatforma legbaloldalibb egyszerű részmondatát a mondatforma **nyelének** nevezzük.

2. Példa

Tekintsük az alábbi G_1 grammatikát:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ S &\rightarrow aS \mid bA \mid b \\ A &\rightarrow bA \mid b \end{aligned}$$

$(L(G_1) = \{a^m b^n \mid m \geq 0, n \geq 1\})$
Ez $LR(1)$ grammatika; a nyél mindig a mondatforma végén fog megjelenni; egy szimbólum előreolvasásával eldönthető, hogy *léptetés* vagy *redukció* műveletet kell végrehajtani.
Vagyis, ha egy $a^i b^j$ mondatot elemzünk, akkor mindaddig *léptetnünk* kell, amíg az előreolvasási szimbólum # nem lesz.

3. Példa

Tekintsük az alábbi G_2 grammatikát:

$$\begin{array}{rcl} S' & \rightarrow & S \\ S & \rightarrow & S - S \mid a \end{array}$$

$(L(G_2) = a - a - \ldots - a)$
Ez nem $LR(k)$ grammatika, mert pl. az $S - S - S$ kifejezést nem tudjuk egyértelműen redukálni. Ha az elemzéssel az $S - S. - S$ pontban tartunk, nem tudjuk eldönteni, hogy redukáljunk az $S \rightarrow S - S$ szabály szerint, vagy léptessünk.

Tétel

Minden $LR(k)$ nyelvtanhoz létezik vele ekvivalens $LR(1)$ nyelvtan.

- $\Rightarrow$ elegendő csak az $LR(1)$ nyelvekkel foglalkozni
- nem adunk algoritmust, amely tetszőleges $LR(k)$-t $LR(1)$-gyé alakít; nekünk kell $LR(1)$ grammatikát találnunk *adott problémára*
- adunk egy elemző módszert az $LR(1)$ grammatikákhoz; ezzel azt is el tudjuk hatékonyan dönteni, hogy adott grammatika $LR(1)$ grammatika-e (a definíció *nehezen* használható fel e célra)

$LR(1)$ kanonikus halmazok

Def. Járható prefix

Legyen az $\alpha\beta x$, $(\alpha, \beta \in (N \cup T)^*$, $x \in T^*)$ mondatforma nyele β. Ekkor az $\alpha\beta$ szimbólumsorozat prefixeit az $\alpha\beta x$ **járható prefix**einek nevezzük.

4. Példa

Tekintsük az alábbi grammatikát:

$$\begin{aligned} S' &\rightarrow S \\ S &\rightarrow S + S \mid S - S \mid (S) \mid 0 \mid 1 \end{aligned}$$

Legyen továbbá $S - (0 + 1)$ egy mondatforma. A mondatforma nyele a 0, a járható prefixek pedig: ε, S, $S-$, $S - ($, $S - (0$.

- nyél keresése = leghosszabb járható prefix keresése
- ez az alapötlete az $LR(1)$-elemzésnek
- a leghosszabb járható prefix megtalálásához egy automatát fogunk rendelni

Def. $LR(1)$-elem

Egy

$$[A \to \alpha.\beta, a]$$

elemet egy grammatika $LR(1)$-**elem**ének nevezünk, ha $A \to \alpha.\beta$ a grammatika egy helyettesítési szabálya, $a \in T \cup \{\#\}$.
Az $A \to \alpha.\beta$ az $LR(1)$-elem magja, a pedig az $LR(1)$-elem előreolvasási szimbóluma.

- az elemzésben az előreolvasási szimbólumnak csak akkor lesz szerepe, ha az $LR(1)$-elem redukciót ír elő, azaz alakja $[A \to \alpha., a]$; ekkor redukciót csak abban az esetben lehet végrehajtani, ha az α-t, azaz a mondat nyelét a követi

Def.

Egy grammatika $[A \to \alpha.\beta, a]$ $LR(1)$-eleme **érvényes** a $\gamma\alpha$ járható prefixre nézve, ha

$$S' \overset{*}{\Rightarrow} \gamma A x \Rightarrow \gamma\alpha\beta x,$$

$\gamma \in (N \cup T)^*$, $x \in T^*$, és az a az x első szimbóluma, vagy $x = \varepsilon$ esetén $a = \#$.

5. Példa

Legyen a következő grammatika:

$$\begin{array}{rcl} S' & \rightarrow & S \\ S & \rightarrow & aSb \mid A \\ A & \rightarrow & aA \mid \varepsilon \end{array}$$

Tekintsük továbbá két mondatforma levezetését:

$$\begin{array}{rcl} S' & \Rightarrow & S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \\ S' & \Rightarrow & S \Rightarrow aAb \Rightarrow aaAb \end{array}$$

Az első esetben a mondatforma nyele aSb, ezért aa egy járható prefix; erre a járható prefixre nézve érvényes az $[S \rightarrow a.Sb, b]$ $LR(1)$-elem.

A második esetben a mondatforma nyele aA, ezért aa ez esetben is egy járható prefix; erre a járható prefixre nézve érvényes az $[A \rightarrow a.A, b]$ $LR(1)$-elem.

Fontos: Ha a $\gamma\alpha$ járható prefixre nézve az $[A \to \alpha.B\beta, a]$ egy érvényes $LR(1)$-elem, és $\exists\ B \to \delta$ helyettesítési szabály a grammatikában, akkor ugyanerre a járható prefixre nézve a $[B \to .\delta, b]$ is egy érvényes $LR(1)$-elem lesz, ahol $b \in FIRST(\beta a)$.

Meg kell határoznunk a grammatika $LR(1)$-elemhalmazát; ehhez definiáljuk a *closure* és *read* függvényeket:

ALG 1 *closure*(H)

1: a H halmaz minden eleme legyen eleme a *closure*(H) halmaznak is;
2: ha $[A \to \alpha.B\beta, a] \in$ *closure*(H) és $B \to \gamma$ a grammatika egy szabálya, akkor legyen $[B \to .\gamma, b] \in$ *closure*(H), $\forall b \in FIRST(\beta a)$-ra;
3: a *closure*(H) halmazt az előző lépéssel addig kell bővíteni, amíg az lehetséges.

ALG 2 $read(H, X)$, $X \in (N \cup T)$

1: ha $[A \to \alpha.X\beta, a] \in H$, akkor a $closure([A \to \alpha X.\beta, a])$ minden eleme legyen a $read(H, X)$ eleme;
2: a $read(H, X)$ halmazt az előző lépéssel addig kell bővíteni, amíg az lehetséges.

Megjegyzések:

1. Ha H a γ járható prefixre érvényes $LR(1)$-elemeket tartalmazza, akkor a $read(H, X)$ a γX-re érvényes elemeket fogja tartalmazni.
2. A rövidebb jelölés érdekében, ha van két $LR(1)$-elem, melyek magjai azonosak és csak az előreolvasási szimbólumban különböznek, akkor azokat összevonjuk a következő módon:

$$[A \to \alpha.X\beta, a/b]$$

6. Példa

Tekintsük a következő grammatikát (5. Példa):

$$\begin{array}{rcl} S' & \rightarrow & S \\ S & \rightarrow & aSb \mid A \\ A & \rightarrow & aA \mid \varepsilon \end{array}$$

A grammatika egy $LR(1)$-eleme az $[S' \rightarrow .S, \#]$.
Ekkor legyen $H_0 = closure([S' \rightarrow .S, \#])$, vagyis

$$\begin{array}{rcl} H_0 & = & \{[S' \rightarrow .S, \#], [S \rightarrow .aSb, \#], [S \rightarrow .A, \#], [A \rightarrow .aA, \#], \\ & & [A \rightarrow ., \#]\} \end{array}$$

Ezután számítsuk ki a $read(H_0, a)$ halmazt:

$$\begin{array}{rcl} read(H_0, a) & = & closure(\{[S \rightarrow a.Sb, \#], [A \rightarrow a.A, \#]\}) = \\ & & \{[S \rightarrow a.Sb, \#], [S \rightarrow .aSb, b], [S \rightarrow .A, b], \\ & & [A \rightarrow .aA, b/\#], [A \rightarrow ., b/\#], [A \rightarrow a.A, \#]\} \end{array}$$

- megépítjük egy grammatika $LR(1)$-elemeinek kanonikus halmazát: $H_0, H_1, \ldots, H_m$
- ezek fogják az automata állapotait jelölni
- az automata végállapotai a nyél megtalálását jelentik

ALG 3 $LR(1)$-elemek kanonikus halmazainak meghatározása

1: $H_0 = closure([S' \to .S, \#])$
2: Minden lehetséges X szimbólumra, $X \in (N \cup T)$, képezzük a $read(H_0, X)$ halmazt; ha ez nem üreshalmaz és nem egyezik meg egy előbbi halmazzal, akkor legyen ez egy új, eggyel nagyobb indexű kanonikus halmaz;
3: Ismételjük meg az előző műveletet az új kanonikus halmazokra; végezzük ezt addig, amíg a kanonikus halmazok halmaza tovább már nem bővíthető.

Az így létrehozott $H_0, H_1, \ldots, H_m$ halmazokat **a grammatika** $LR(1)$-**kanonikus halmazai**nak nevezzük.

7. Példa

Tekintsük az alábbi grammatikát, és határozzuk meg annak $LR(1)$-kanonikus halmazait:

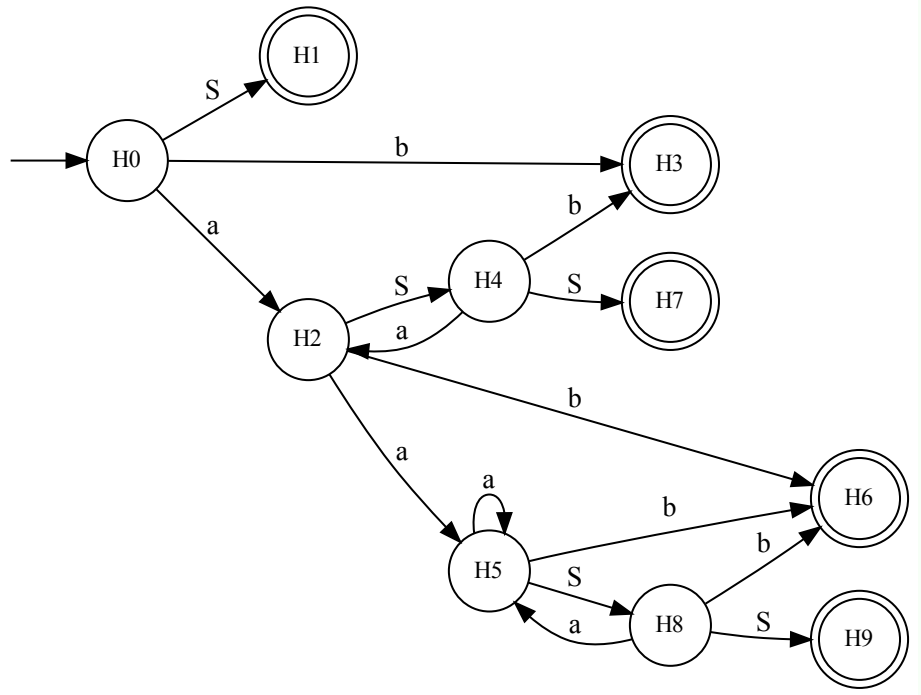
$$\begin{array}{rcl} S' & \rightarrow & S \\ S & \rightarrow & aSS \mid b \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
H_0 & = & closure([S' \rightarrow .S, \#]) = \{[S' \rightarrow .S, \#], [S \rightarrow .aSS, \#], [S \rightarrow .b, \#]\} \\
H_1 & = & read(H_0, S) = closure([S' \rightarrow S., \#]) = \{[S' \rightarrow S., \#]\} \\
H_2 & = & read(H_0, a) = closure([S \rightarrow a.SS, \#]) = \\
 & = & \{[S \rightarrow a.SS, \#], [S \rightarrow .aSS, a/b], [S \rightarrow .b, a/b]\} \\
H_3 & = & read(H_0, b) = closure([S \rightarrow b., \#]) = \{[S \rightarrow b., \#]\} \\
H_4 & = & read(H_2, S) = closure([S \rightarrow aS.S, \#]) = \\
 & = & \{[S \rightarrow aS.S, \#], [S \rightarrow .aSS, \#], [S \rightarrow .b, \#]\} \\
H_5 & = & read(H_2, a) = closure([S \rightarrow a.SS, a/b]) = \\
 & = & \{[S \rightarrow a.SS, a/b], [S \rightarrow .aSS, a/b], [S \rightarrow .b, a/b]\} \\
H_6 & = & read(H_2, b) = closure([S \rightarrow b., a/b]) = \{[S \rightarrow b., a/b]\} \\
H_7 & = & read(H_4, S) = closure([S \rightarrow aSS., \#]) = \{[S \rightarrow aSS., \#]\} \\
 & & read(H_4, a) = closure([S \rightarrow a.SS, \#]) = H_2 \\
 & & read(H_4, b) = closure([S \rightarrow b., \#]) = H_3
\end{array}$$

▷

$$
\begin{aligned}
H_8 &= read(H_5, S) = closure([S \to aS.S, a/b]) = \\
&= \{[S \to aS.S, a/b], [S \to .aSS, a/b], [S \to .b, a/b]\} \\
& \quad read(H_5, a) = closure([S \to a.SS, a/b]) = H_5 \\
& \quad read(H_5, b) = closure([S \to b., a/b]) = H_6 \\
H_9 &= read(H_8, S) = closure([S \to aSS., a/b]) = \{[S \to aSS., a/b]\} \\
& \quad read(H_8, a) = closure([S \to a.SS, a/b]) = H_5 \\
& \quad read(H_8, b) = closure([S \to b., a/b]) = H_6
\end{aligned}
$$

Az eredő automata (a végállapotok a redukciót előíró kanonikus halmazok):



Az $LR(1)$ elemző

Tétel

Egy γ járható prefixre érvényes $LR(1)$-elemek halmaza az a H_k kanonikus elemhalmaz, amelyik az elemző véges determinisztikus automatájának ahhoz a H_k állapotához tartozik, amelyikbe az automata a kezdőállapotból a γ hatására kerül.

- $LR(1)$ **elemző táblázat** = a tételben szereplő DVA leírása
- két részből áll:
  1. **action** táblázat
     - megmondja, hogy adott terminális szimbólum esetén léptetést vagy redukciót kell-e végrehajtani: *sj* – léptetés, az elemző a *j* állapotba kerül; *ri* – redukció, *i* az alkalmazott helyettesítési szabály sorszáma
  2. **goto** táblázat
     - megmondja, hogy adott nemterminális szimbólum hatására az elemző milyen állapotba megy át
     - redukció esetén használjuk: egy szimbólumsorozatot egy szabály szerint redukálunk, majd a szabály bal oldalán levő szimbólum hatására adott állapotba lépünk

Az *action* táblázat

- a táblázat sorait az $LR(1)$-kanonikus halmazoknak megfelelő állapotokkal indexeljük
- az *action* táblázat oszlopait a terminális szimbólumokkal és a # jellel indexeljük

Kitöltés:

- ha $[A \to \alpha.a\beta, b] \in H_i$ és $read(H_i, a) = H_j$, akkor $action[i, a] = sj$
- ha $[A \to \alpha., a] \in H_i$ és $A \neq S'$, akkor $action[i, a] = r\ell$, ahol $A \to \alpha$ az ℓ-edik szabály
- ha $[S' \to S., \#] \in H_i$, akkor $action[i, \#] =$ elfogad

Az üresen hagyott helyeket a *hiba* üzenettel töltjük ki.

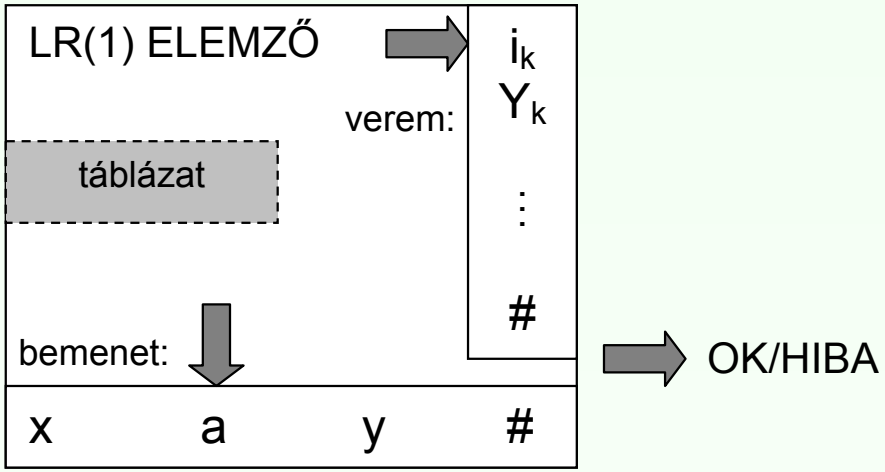
A *goto* táblázat

- az *action* táblázat mellé írjuk
- a *goto* táblázat oszlopait a nemterminális szimbólumokkal indexeljük

Kitöltés:

- ha $read(H_i, A) = H_j$, akkor $goto[i, A] = j$

Az üresen hagyott helyeket a *hiba* üzenettel töltjük ki.



Az $LR(1)$ elemző szerkezete.

Tétel

A G' kiegészített nyelvtan akkor és csak akkor $LR(1)$ grammatika, ha a nyelvtanhoz készített **kanonikus elemző táblázatok** kitöltése *konfliktusmentes*.

Konfliktus = kitöltéskor a táblázat egy mezőjébe egynél több (léptetés vagy redukció) művelet kerül.

Elemzés

- az elemző egy állapota: $(\#\text{verem tartalma}, \text{elemzendő sorozat}\#)$
- kezdőállapot: $(\#0, w\#)$
- ha az elemző aktuális állapota $(\#0 \ldots Y_k i_k, ay\#)$, akkor
  - ha $action[i_k, a] = s\ell$, akkor

$$(\#0 \ldots Y_k i_k, ay\#) \Rightarrow (\#0 \ldots Y_k i_k a i_\ell, y\#)$$

  - ha $action[i_k, a] = r\ell$, akkor redukálunk az ℓ-edik $A \to \alpha$ szabály alapján: először töröljük a verem $2|\alpha|$ elemét, ezután a *goto* táblázat alapján meghatározzuk, hogy az A hatására melyik állapotba lépünk, s ezen állapot számát írjuk a verembe az A után; formálisan:

$$(\#0 \ldots Y_{k-r} i_{k-r} Y_{k-r+1} i_{k-r+1} \ldots Y_k i_k, y\#) \Rightarrow$$
$$(\#0 \ldots Y_{k-r} i_{k-r} A i_\ell, y\#),$$

    ahol $|\alpha| = r$ és $goto[i_{k-r}, A] = i_\ell$
  - ha $action[i_k, a] =$ elfogad, akkor az elemezett szöveg **szintaktikailag helyes**
  - ha $action[i_k, a] =$ hiba, akkor **szintaktikai hiba** történt

8. Példa

Tekintsük a 7. Példa grammatikáját és a már meghatározott $LR(1)$-kanonikus halmazokat:

$$0 : S' \to S$$
$$1 : S \to aSS$$
$$2 : S \to b$$

$$\begin{aligned}
H_0 &= \{[S' \to .S, \#], [S \to .aSS, \#], [S \to .b, \#]\} \\
H_1 &= \{[S' \to S., \#]\} \\
H_2 &= \{[S \to a.SS, \#], [S \to .aSS, a/b], [S \to .b, a/b]\} \\
H_3 &= \{[S \to b., \#]\} \\
H_4 &= \{[S \to aS.S, \#], [S \to .aSS, \#], [S \to .b, \#]\} \\
H_5 &= \{[S \to a.SS, a/b], [S \to .aSS, a/b], [S \to .b, a/b]\} \\
H_6 &= \{[S \to b., a/b]\} \\
H_7 &= \{[S \to aSS., \#]\} \\
H_8 &= \{[S \to aS.S, a/b], [S \to .aSS, a/b], [S \to .b, a/b]\} \\
H_9 &= \{[S \to aSS., a/b]\}
\end{aligned}$$

▷

	action			*goto*
	a	b	$\#$	S
0	$s2$	$s3$		1
1			elfogad	
2	$s5$	$s6$		4
3			$r2$	
4	$s2$	$s3$		7
5	$s5$	$s6$		8
6	$r2$	$r2$		
7			$r1$	
8	$s5$	$s6$		9
9	$r1$	$r1$		

Elemezzük az *aabbabb* szöveget.

$$(\#0, aabbabb\#) \overset{s2}{\Rightarrow} (\#0a2, abbabb) \overset{s5}{\Rightarrow} (\#0a2a5, bbabb\#) \overset{s6}{\Rightarrow}$$
$$(\#0a2a5\underline{b6}, babb\#) \overset{r2}{\Rightarrow} (\#0a2a5S8, babb\#) \overset{s6}{\Rightarrow}$$
$$(\#0a2a5S8\underline{b6}, abb\#) \overset{r2}{\Rightarrow} (\#0a2\underline{a5S8S9}, abb\#) \overset{r1}{\Rightarrow}$$
$$(\#0a2S4, abb\#) \overset{s2}{\Rightarrow} (\#0a2S4a2, bb\#) \overset{s6}{\Rightarrow} (\#0a2S4a2\underline{b6}, b\#) \overset{r2}{\Rightarrow}$$
$$(\#0a2S4a2S4, b\#) \overset{s3}{\Rightarrow} (\#0a2S4a2S4\underline{b3}, \#) \overset{r2}{\Rightarrow}$$
$$(\#0a2S4\underline{a2S4S7}, \#) \overset{r1}{\Rightarrow} (\#0\underline{a2S4S7}, \#) \overset{r1}{\Rightarrow} (\#0S1, \#) \Rightarrow$$
elfogad

Az $LALR(1)$ elemző

- cél: az elemző állapotainak csökkentése, amivel természetesen növekszik az elemző hatékonysága
- ezt úgy kell megoldani, hogy az elemezhető nyelvek halmazának mérete *lényegesen ne csökkenjen*
- **észrevétel**: az $LR(1)$-kanonikus halmazok között vannak olyanok, ahol a magok megegyeznek, csak az előreolvasási szimbólum különbözik $\rightarrow$ egyesítsük ezeket a halmazokat:

$$\text{ha } H_i \text{ és } H_j \text{ egyesíthetők, akkor legyen } K_{i,j} = H_i \cup H_j$$

- az így kapott halmazokat **egyesített** $LR(1)$ **kanonikus halmazok**nak nevezzük
- az elemzőt $LALR(1)$ **elemző**nek nevezzük

Konfliktusok

- a *read* függvény nem okoz problémát, mert az csak a magoktól függ, vagyis nem függ az előreolvasási szimbólumtól; azaz ha

$$K = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$$

és

$$read(H_1, X) = H'_1, read(H_2, X) = H'_2, \ldots, read(H_k, X) = H'_k$$

és

$$K' = H'_1 \cup H'_2 \cup \ldots \cup H'_k,$$

akkor

$$read(K, X) = K'$$

- problémák származhatnak viszont bizonyos $LR(1)$-elemek egy halmazba kerüléséből:
  1. **léptetés-léptetés konfliktusok** nem jelenhetnek meg, mivel ha
     $$[A \to \alpha.a\beta, b] \in H_i \text{ és } [B \to \gamma.a\delta, c] \in H_j,$$
     akkor az összevonás után az a szimbólumra továbbra is léptetést írunk elő
  2. **léptetés-redukálás konfliktusok** sem jelenhetnek meg, mivel ez abban az esetben történhetne meg, ha
     $$[A \to \alpha.a\beta, b] \in H_i \text{ és } [B \to \gamma., a] \in H_j,$$
     de ez nem történhet meg, mivel ez azt jelentené, hogy mindkét halmazban szereplnie kell ugyanilyen maggal rendelkező $LR(1)$-elemnek, azaz H_j-ben lennie kell egy $[A \to \alpha.a\beta, c]$ elemnek, ami *nem lehetséges*, mert akkor nem lenne a grammatikánk $LR(1)$-es
  3. **redukálás-redukálás konfliktusok** felléphetnek; pl.:
     $$\begin{aligned} H_i &= \{[A \to c., d], [B \to c., e]\} \\ H_j &= \{[A \to c., e], [B \to c., d]\} \end{aligned}$$
     ekkor ha a bemenő szimbólum d vagy e akkor a mondat c nyele megtalálható, viszont nem eldönthető, hogy az $A \to c$ vagy a $B \to c$ szerinti reduckiót kell elvégezni

9. Példa

Tekintsük a 8. példában szereplő $LR(1)$ kanonikus halmazokat. Észrevehető, hogy a következő halmazok egyesíthetők:

$$H_2 \cup H_5$$
$$H_3 \cup H_6$$
$$H_4 \cup H_8$$
$$H_7 \cup H_9$$

A fennmaradó H_0 és H_1 halmazokat változatlanul hagyjuk.

$$\begin{aligned}
H_0 &= \{[S' \to .S, \#], [S \to .aSS, \#], [S \to .b, \#]\} \\
H_1 &= \{[S' \to S., \#]\} \\
H_{2,5} &= \{[S \to a.SS, \#/a/b], [S \to .aSS, a/b], [S \to .b, a/b]\} \\
H_{3,6} &= \{[S \to b., \#/a/b]\} \\
H_{4,8} &= \{[S \to aS.S, \#/a/b], [S \to .aSS, \#/a/b], [S \to .b, \#/a/b]\} \\
H_{7,9} &= \{[S \to aSS., \#/a/b]\}
\end{aligned}$$

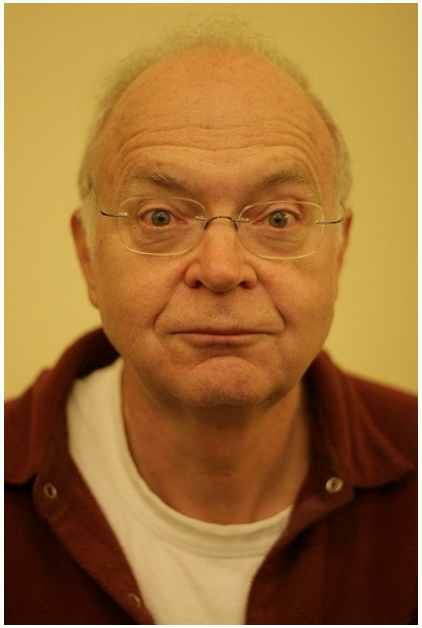
▷

$$read(H_0, S) = H_1, \quad read(H_0, a) = H_{2,5}$$
$$read(H_0, b) = H_{3,6}, \quad read(H_{2,5}, S) = H_{4,8}$$
$$read(H_{2,5}, a) = H_{4,8}, \quad read(H_{2,5}, b) = H_{3,6}$$
$$read(H_{4,8}, S) = H_{7,9}, \quad read(H_{4,8}, a) = H_{2,5}$$
$$read(H_{4,8}, b) = H_{3,6}$$

	action			*goto*
	a	b	$\#$	S
0	$s2,5$	$s3,6$		1
1			elfogad	
$2,5$	$s2,5$	$s3,6$		$4,8$
$3,6$	$r2$	$r2$	$r2$	
$4,8$	$s2,5$	$s3,6$		$7,9$
$7,9$	$r1$	$r1$	$r1$	

Elemezzük az *aabbabb* szöveget.

Donald Knuth



Donald Ervin Knuth (1938–), amerikai informatikus, a híres „A számítógép-programozás művészete" (*The Art of Computer Programming*, TAOCP) mű szerzője. A TEX, a METAFONT megalkotója. Ő definiálta az $LR(k)$ grammatikát 1965-ben (*On the Translation of Languages from Left to Right*).

Leghíresebb művei:
Donald E. Knuth. *The Art of Computer Programming*, Volumes 1–4, Addison-Wesley Professional
Donald E. Knuth. *The TEXbook*, Reading, Massachusetts, Addison-Wesley, 1984.