STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

2

1978

CLUJ-NAPOCA

ANUL XXIII **1978**

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

MATHEMATICA

2

Redacţia: 3400 CLUJ-NAPOCA, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — CONTENTS — SOMMAIRE — INHALT

Recenzii — Books — Livres parus — Buchbesprechung

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

SUBSPAŢII ÎNTR-UN SPAŢIU K_m^* (III)

Subspaţii într-un spaţiu K_m^* simetric Cartan

P. ENGHIŞ

Se consideră un spaţiu V_n scufundat într-un spaţiu K_m^* simetric Cartan. Spaţiul K_m^* fiind simetric Cartan avem:

$$\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta;\rho} = 0, \quad \varphi_\rho \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} + \varphi_\gamma \bar{R}_{\alpha\beta\delta\rho} + \varphi_\delta \bar{R}_{\alpha\beta\rho\gamma} = 0 \tag{3.1}$$

vectorul φ_ρ, aşa cum s-a amintit (partea I), poate fi ales gradient [7], iar prin punct şi virgulă este notată derivarea covariantă în raport cu metrica spaţiului K_m^*.

A. G. Walker [7] a arătat că spaţiile K_m^* simetrice Cartan au unele proprietăţi comune cu spaţiile K_m^* recurente în ceea ce priveşte tensorul de curbură, cîmpuri paralele etc. Este firesc că şi subspaţiile unui spaţiu K_m^* simetric Cartan să aibă unele proprietăţi comune cu subspaţiile unui spaţiu K_m^* recurent. Ne propunem ca pe lîngă proprietăţi şi relaţii specifice să punem în evidenţă şi unele relaţii comune ce sînt verificate, atît de subspaţiile unui spaţiu K_m^* recurent (relaţii ce au fost puse în evidenţă în partea I şi II) cît şi de subspaţiile unui spaţiu K_m^* simetric Cartan.

Să presupunem că φ_ρ nu este ortogonal la subspaţiul V_n. Derivînd covariant prima ecuaţie (1, 10) (partea I) [4] în raport cu metrica subspaţiului V_n şi ţinînd cont de (1, 8) (partea I) şi de a doua ecuaţie (1, 10) avem:

$$\begin{aligned} R_{ijkh,r} = {} & \sum_p e_p \, \Omega_{p|ijkh,r} - 4 \sum_p e_p \{ \Omega_{p[i|r|} \Omega_{|p|j][k,h]} + \Omega_{p[k|r|} \Omega_{|p|h][i,j]} \} + \\ & + 4 \sum_p e_p \sum_q e_q \{ \mu_{pq[k} \Omega_{q|h]][j} \Omega_{|p|i]r} + \mu_{qp[j} \Omega_{|q|i]][k} \Omega_{|p|h]r} \} \end{aligned} \tag{3.2}$$

unde $\Omega_{p|ijkh}$ sînt daţi de (1, 14) partea I, iar paranteza dreaptă notează antisimetrizarea. Rezultă deci:

PROPOZIŢIA 3.1. *Subspaţiile unui spaţiu K_m^* simetric Cartan verifică relaţiile* (3, 2).

Din a doua ecuaţie (3, 1) înmulţind cu y_i^α, y_j^β, y_k^γ, y_h^δ, y_r^ρ şi ţinînd seama de prima relaţie (1, 10) şi de (1, 11) rezultă:

$$\varphi_r R_{ijkh} + \varphi_k R_{ijhr} + \varphi_h R_{ijrk} = \sum_p e_p (\varphi_r \Omega_{p|ijkh} + \varphi_k \Omega_{p|ijhr} + \varphi_h \Omega_{p|ijrk}) \tag{3.3}$$

Dacă în (3, 3) se înmulţeşte contractat cu g^{ir} şi se ţine sema de (1,15) (partea I) se obţine

$$A^i_{jkh} \varphi_i = \sum_p e_p (\Omega^i_{p|jkh} - \delta^i_k \Phi_{p|jh} + \delta^i_h \Phi_{p|jk}) \varphi_i \tag{3.4}$$

unde $A^i_{jkh} = R^i_{jkh} - (\delta^i_k R_{jh} - \delta^i_h R_{jk})$ [2], iar $\Phi_{p|jh}$ sînt daţi de (1, 15) (partea I).

Înmulţind (3,4) contract cu g^{jk} se obţine

$$(R\delta^i_h - 2R^i_h)\varphi_i = \sum_p e_p\,(\Phi_{p|}\,\delta^i_h - 2\Phi^i_{p|h})\varphi_i \tag{3.5}$$

unde $\Phi_{p|} = \Omega^2_{p|} - \Omega^i_{p|h}\Omega^h_{p|i}$. Rezultă deci

PROPOZIŢIA 3.2. *Tensorul de curbură, tensorul A^i_{jkh}, tensorul lui Ricci, curbura scalară, tensorii $\Omega_{p|ijkh}$ şi contractaţii lor dintr-un subspaţiu V_n al unui spaţiu K^*_m simetric Cartan, cu vector φ_ρ neortogonal la subspaţiu, verifică relaţiile: (3.3), (3.4), (3.5).*

Observaţie. Relaţiile (3,3), (3,4), (3,5) sînt identice cu relaţiile ce le verifică subspaţiile unui spaţiu K^*_m recurent, deci propoziţia 3.2 afirmă proprietăţi comune subspaţiilor unui spaţiu K^*_m oarecare.

Dacă subspaţiul V_n scufundat în spaţiul K^*_m simetric Cartan este şi el simetric Cartan, atunci din (3,2) rezultă:

$$\sum_p e_p\,\Omega_{p|ijkh,r} = 4\sum_p e_p\,\{\Omega_{p[i|r}\,\Omega_{|p|j][k,h]} + \Omega_{p[k|r|}\,\Omega_{|p|h][i,j]}\} -$$

$$- 4\sum_p e_p \sum_q e_q\,\{\mu_{pq[h}\,\Omega_{|q|k][j}\,\Omega_{|p|i]r} + \mu_{qp[j}\,\Omega_{|q|i][h}\,\Omega_{|p|k]r}\} \tag{3.6}$$

Reciproc, dacă pentru un subspaţiu V_n a unui spaţiu K^*_m simetric Cartan, tensorul secund fundamental verifică (3.6) atunci din (3.2) rezultă că subspaţiul este simetric Cartan. Deci:

PROPOZIŢIA 3.3. *O condiţie necesară şi suficientă pentru ca un subspaţiu V_n al unui spaţiu K^*_m simetric Cartan cu vectorul φ_ρ neortogonal la subspaţiu să fie simetric Cartan, este ca tensorul secund fundamental să verifice relaţiile (3.6).*

Dacă subspaţiul V_n simetric Cartan este subspaţiu K^*_m simetric atunci din (3.3) rezultă:

$$\sum_p e_p\,(\varphi_r\,\Omega_{p|ijkh} + \varphi_k\,\Omega_{p|ijhr} + \varphi_h\,\Omega_{p|ijrk}) = 0 \tag{3.7}$$

şi reciproc, dacă într-un subspaţiu V_n simetric Cartan (3.7) are loc, subspaţiul este subspaţiu K^*_n simetric. Deci:

PROPOZIŢIA 3.4. *O condiţie necesară şi suficientă ca un subspaţiu V_n al unui spaţiu K^*_m simetric Cartan cu vector φ_ρ neortogonal la subspaţiu să fie spaţiu K^*_n simetric este ca să aibă loc relaţiile (3.6) şi (3.7).*

Observaţie. Relaţia (3.7) are loc şi într-un subspaţiu K^*_n oarecare al unui spaţiu K^*_m recurent, după cum s-a arătat în propoziţia 1.6 partea I.

Într-o lucrare anterioară [3] s-a arătat că în orice spaţiu K^*_n vectorul φ_r este soluţie a sistemului $A^i_{jkh}\,\varphi_i = 0$ şi verifică relaţiile $(R\delta^i_k - 2R^i_k)\,\varphi_i = 0$. Din aceste rezultate şi din (3.4) şi (3.5), pentru subspaţiile K^*_n simetrice ale unui spaţiu K^*_m simetric Cartan cu vector φ_ρ neortogonal la subspaţiu rezultă:

$$\sum_p e_p\,(\Omega^i_{p|jkh} - \delta^i_k\,\Phi_{p|jh} + \delta^i_h\,\Phi_{p|jk})\,\varphi_i = 0 \tag{3.8}$$

$$\sum_p e_p\,(\Phi_p\,\delta^i_h - 2\Phi^i_{p|h})\varphi_i = 0 \tag{3.9}$$

Deci:

PROPOZIŢIA 3.5. *Vectorul φ_i al unui subspaţiu K_n^* simetric Cartan dintr-un spaţiu K_m^* simetric Cartan cu vector φ_ρ neortogonal la subspaţiu este soluţie a sistemului (3.8) şi verifică (3.9).*

Observaţie: Relaţiile (3.8) şi (3.9) şi propoziţia 3.5 sînt verificate şi pentru subspaţiile K_n^* oarecare dintr-un spaţiu K_m^* recurent, după cum s-a arătat în propoziţia 1.7 partea I.

Pentru subspaţiile V_n total geodezice ale unui spaţiu K_m^* simetric Cartan, din propoziţia 3.4 rezultă:

PROPOZIŢIA 3.6. *Subspaţiile total geodezice ale unui spaţiu K_m^* simetric Cartan cu vector φ_ρ neortogonal la subspaţiu, sînt spaţii K_n^* simetrice Cartan.*

Pentru cazul în care vectorul φ_ρ al spaţiului K_m^* simetric Cartan este ortogonal la subspaţiul V_n, ca în cazul spaţiilor K_m^* recurente rezultă $\varphi_r = 0$, iar din a doua ecuaţie (3.1) prin înmulţire cu $y_{i'}^\alpha, y_{j'}^\beta, y_{k'}^\gamma, y_h^\delta$ şi însumînd în raport cu $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ rezultă

$$\varphi_\rho \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} y_{i'}^\alpha, y_{j'}^\beta, y_{k'}^\gamma, y_h^\delta = 0 \tag{3.10}$$

din care dacă se ţine seama din prima ecuaţie (1.10) (parte I) se obţine:

$$\varphi_\rho (R_{ijkh} - \sum_p e_p \Omega_{p|ijkh}) = 0$$

şi cum $\varphi_\rho \neq 0$ rezultă şi în acest caz

$$R_{ijkh} = \sum_p e_p \Omega_{p|ijkh} \tag{3.11}$$

Deci, ca şi în cazul subspaţiilor unui spaţiu K_m^* recurent avem şi în cazul subspaţiilor unui spaţiu K_m^* simetric:

PROPOZIŢIA 3.7. *Tensorul de curbură al unui subspaţiu V_n dintr-un spaţiu K_m^* simetric cu vectorul φ_ρ ortogonal la subspaţiu, este dat de (3.11) unde $\Omega_{p|ijkh}$ sînt definiţi de (1.14) (partea I).*

Din (3.11) rezultă, ca şi în prima parte, că subspaţiul V_n în acest caz va fi în acelaşi timp simetric sau recurent sau subspaţiu K_n^*, după cum tensorul sumă al celor m-n tensori $\Omega_{p|ijkh}$ definiţi de (1.14) este simetric sau recurent sau covariant constant şi verifică o relaţie analogă cu (3.7). Deci şi aci propoziţia 1.9 (prima parte) este adevărată pentru un subspaţiu al unui spaţiu K_m^* simetric Cartan.

În particular şi în acest caz, dacă subspaţiul este total geodezic, din $\Omega_{p|ij} = 0$ rezultă $R_{ijkh} = 0$ şi subspaţiul este euclidian.

Pentru subspaţiile total ombilicale ale unui spaţiu K_m^* simetric Cartan se regăsesc uşor rezultatele lui T. Myazowa [5] şi M. Prîvanovich [6], potrivit cărora subspaţiul este conform simetric. Celelalte rezultate ale autorilor mai sus amintiţi pot fi formulate pentru aceste spaţii, după cum rezultă din (2.2), (2.3), (2.4) (partea II) scrise pentru cazul subspaţiilor unui spaţiu K_m^* simetric cu φ_ρ neortogonal la subspaţiu şi din (3.11) pentru cazul cînd φ_ρ este ortogonal la subspaţiu, astfel:

PROPOZIŢIA 3.8. *Singurele subspaţii V_n total ombilicale simetrice Cartan, ale unui spaţiu K_m^* simetric Cartan, sînt cele de curbură scalară constantă.*

(Intrat în redacţie la 27 aprilie 1977)

BIBLIOGRAFIE

1. L. P. Eisenhart, *Riemannian geometry*, Princeton, 1949.
2. P. Enghiş, *Sur les espaces V_n récurrents et Ricci-récurrents*, Studia Univ. Babeş–Bolyai, ser. Math. Mec. f. 1, 1972, 3–6.
3. P. Enghiş, *Sur les espaces K_m^* de Walker*, Studia Univ. Babeş–Bolyai, Math. 1, 1977, 14–16.
4. P. Enghiş, *Subspaţii într-un spaţiu K_m^** Studia Univ. Babeş–Bolyai, Math., 2, 1977, 16–22 (I); 1, 1978, 11–15 (II).
5. I. Myazawa and Goro Chuman; *On certain subspaces of Riemannian recurrent spaces*, Tensor N.S.Nr. 2, 1972, 253–260.
6. M. Prîvanovih, *Neke teoreme o podirastorima sa nedrejenim liniama krivine recurentnih Riemannonih prostora*, Math. Vesnic, 1, 16, 1964, 81–87.
7. A. G. Walker, *On Rusés spaces of recurrent curvature*. Proc. London Math. Soc 2, 52, 1950, 36–64.

SOUS-ESPACES DANS UN ESPACE K_m^* (III)

Sous-espaces dans un espace K_m^* symétrique Cartan

(Résumé)

Dans ce travail on donne les relations (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5) qui sont vérifiées par les suos-espaces d'un espace K_m^* symétrique — Cartan, avec le vecteur φ_ρ non orthogonal au sous-espace. Par (3, 6) on donne la condition nécessaire et suffisante pour que le sous-espace soit symétrique — Cartan, ou par (3, 6) et (3, 7) pour que le sous-espace soit K_n^* symétrique-Cartan. Pour le vecteur φ_i du sous-espace K_n^* symétrique-Cartan on donne les relations (3, 8) et (3, 9). Pour le cas φ_ρ orthogonal au sous-espace on donne la relation (3, 11) vérifiée par le tenseur de courbure.

Pour le cas des sous-espaces totalement ombilicaux on précise qu'on peut retrouver facilement les résultats de T. Myazawa et M. Privanovich montrant qu'on peut les reformuler dans la proposition 3.8.

A chaque occasion on précise les propriétés qui sont valables aussi dans un espace K_m^* récurrent.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

DOUĂ METODE DE REZOLVARE A PROGRAMELOR ÎNTREGI

STANCA ROTARU

Problemele de programare liniară în numere întregi care fac obiectul prezentului studiu au următoarea structură: să se găsească vectorul $x^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ din mulţimea

$$\Omega = \{x \in R^n \mid Ax \leqslant b,\ x \geqslant 0\} \tag{1}$$

cu toate componentele x_j^*, $j = \overline{1, n}$, numere întregi, care are proprietatea că maximizează funcţia liniară

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n. \tag{2}$$

Problemele de acest tip au, în general, metode de rezolvare mai mult sau mai puţin eficiente. Avînd în vedere multiplele aplicaţii practice ale programării matematice în numere întregi, precum şi faptul că rezolvarea manuală a problemelor de acest tip presupune oarecari dificultăţi, ceea ce impune cu necesitate utilizarea calculatorului, se pune în mod evident problema găsirii unor algoritmi cît mai eficienţi: eficienţă măsurată prin timpul de lucru şi volumul de calcule necesare rezolvării la calculator a problemelor mai sus amintite.

În scopul găsirii unor astfel de algoritmi, am utilizat anumite idei din algoritmii cunoscuţi ai programării matematice în numere întregi şi, pornind de la nişte rezultate teoretice cu caracter general, găsite în [1], am elaborat doi algoritmi care s-au dovedit mai eficienţi, în sensul amintit mai sus, decît algoritmi cunoscuţi ai programării întregi.

Este vorba despre o metodă de tip „branch and bound" pentru rezolvarea programelor liniare în numere întregi şi despre un algoritm pe care l-am numit „ramifică şi exclude", algoritm care reprezintă o îmbunătăţire a metodei precedente.

Compararea eficienţei acestor doi algoritmi cu algoritmi cunoscuţi din programarea întreagă am făcut-o raportînd rezultatele obţinute la calculator cu cei doi algoritmi la rezultatele obţinute la calculator folosind pe de o parte algoritmi bazaţi pe metoda planelor secante (algoritmul ciclic al lui Gomory [4], algoritmul discret al lui Gomory [5], algoritmul lui Dantzig [3]), iar pe de altă parte metode de tip arborescent, în speţă algoritmul lui Beale şi Small [2].

Metoda de tip „branch and bound" şi algoritmul „ramifică şi exclude" se pot încadra în categoria metodelor arborescente şi ele se bazează în primul rînd pe programe liniare derivate din ignorarea integrităţii soluţiei unor probleme de programare liniară în numere întregi care se obţin impunînd variabilei bazice întregi nesatisfăcătoare x_p una din restricţiile alternative

$$x_p \leqslant n_p \tag{3}$$

respectiv

$$x_p \geqslant n_{p_0} + 1 \tag{4}$$

unde n_{p_0} reprezintă partea întreagă a valorii neîntregi a variabilei x_p.

Pentru a facilita înţelegerea celor doi algoritmi, a căror prezentare constituie scopul prezentului studiu, expunerea acestora va fi însoţită de exemple numerice rezolvate concret.

O metodă de tip „branch and bound“. În elaborarea metodei de tip „branch and bound" pentru rezolvarea problemelor de programare liniară în numere întregi, am pornit de la rezultatele teoretice prezentate de Balas Egon în [1], cu privire la rezolvarea unei probleme de optimizare cu restricţii dată sub o formă cît se poate de generală: să se găsească $s^* \in \Omega_0$ în aşa fel încît

$$z(s^*) = \max \{z(s) | s \in \Omega_0\} \tag{5}$$

unde

$$\Omega_0 = \{s_1, s_2, \ldots, s_p\} \tag{6}$$

iar

$$z : \Omega_0 \longrightarrow R \tag{7}$$

folosind principiul „branch and bound".

Acestei probleme i se poate aplica principiul „branch and bound" în condiţiile în care sînt verificate următoarele ipoteze:

(i) Există o mulţime finită $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_r\}$ care satisface condiţia:

$$T \supset \Omega_0$$

şi există o funcţie

$$v : T \longrightarrow R \tag{9}$$

aşa încît

$$v|_{\Omega_0} = z \tag{10}$$

(ii) Se poate defini o regulă de ramificare $\mathcal{B}$ astfel: dacă $T_k \subset T$, $|T_k| \geqslant 2$, atunci aplicînd regula $\mathcal{B}$ mulţimii T_k se obţine

$$\mathcal{B}(T_k) = \{T_{k1}, T_{k2}, \ldots, T_{kq}\} \tag{11}$$

aşa încît

$$\bigcup_{i=1}^{q} T_{ki} = T_k \setminus \{t_k\} \tag{12}$$

unde t_k satisface

$$v(t_k) = \max \{v(t) | t \in T_k\} = v_k \text{ (notaţie)} \tag{13}$$

DEFINIŢIA 1. *Prin ramificarea mulţimii T_k se înţelege aplicarea regulii $\mathcal{B}$ acestei mulţimi.*

DEFINIŢIA 2. *Prin mărginirea mulţimii T_k se înţelege căutarea valorii v_k.*

Teorema care indică modul de lucru în principiul „branch and bound" general, demonstrînd în acelaşi timp convergenţa algoritmului corespunzător, se poate găsi în lucrarea [1].

Metoda de tip „branch and bound" pentru rezolvarea problemelor de programare liniară în numere întregi este o adaptare a principiului general din [1] pentru aceste probleme, problemele de acest tip constituind o clasă particulară de probleme de optimizare cu restricţii. În acest caz funcţia de maximizat este o funcţie liniară:

$$z = cx \tag{14}$$

iar

$$\Omega_0 = \Omega \cap Z^n \tag{15}$$

unde Ω este domeniul soluţiilor admisibile (1).

Verificarea ipotezelor (i) — (ii) revine de această dată la următoarele:

(i') mărginirea mulţimii Ω a soluţiilor admisibile, mulţime care se ia drept mulţimea T din principiul general [1] şi care evident verifică (8). Ca extensie v pentru funcţia de maximizat $z = cx$ se ia însăşi această funcţie. Prin urmare proprietăţile (9) — (10) sînt verificate.

(ii') definirea regulii de ramificare, care în cazul de faţă se realizează utilizînd restricţiile alternative (3) — (4) impuse variabilei bazice întregi nesatisfăcătoare x_p aşa încît dacă mulţimea T_h este mulţimea căreia i se aplică această regulă, atunci ca rezultat se vor obţine două submulţimi T_{h1}, T_{h2}, ale mulţimii T_h, ale căror expresii analitice sînt constituite din restricţiile care definesc mulţimea T_h, la care se adaugă respectiv una din restricţiile alternative (3) — (4).

Avînd în vedere modul în care sînt definite cele două tipuri de restricţii alternative rezultă că, prin aplicarea regulii de ramificare $\mathcal{B}$ definită mai sus, nu se elimină eventuale soluţii întregi ale problemei propuse pentru studiu. Aşadar regula de ramificare este bine definită.

Metoda de tip „branch and bound" definită de această regulă de ramificare este iterativă.

Iteraţia 0. Se ia $\mathcal{A}^{(0)} := \{\Omega\}$; se rezolvă programul liniar

$$\max \{cx | x \in \Omega\} \tag{16}$$

(a) Dacă $\mathcal{A}^{(0)} = \emptyset$ atunci $\Omega_0 = \emptyset$; STOP

(b) Dacă $\mathcal{A}^{(0)} \neq \emptyset$ şi $x_0^* = (x_{01}^*, x_{02}^*, \ldots, x_{0n}^*)$ are toate componentele numere întregi, atunci $x^* = x_0^*$; STOP

(c) Dacă $\mathcal{A}^{(0)} \neq \emptyset$ şi $x_0^* = (x_{01}^*, x_{02}^*, \ldots, x_{0n}^*)$ are cel puţin o componentă neîntreagă, atunci algoritmul continuă cu iteraţia $h = 1$. Se ia $T_0 := \Omega(T_{h-1})$ (semnifică mulţimea de ramificat la iteraţia h).

Iteraţia h. Se ramifică mulţimea T_{h-1}.

Se determină $\mathcal{A}^{(h)} = \mathcal{A}^{(h-1)} \setminus \{T_{h-1}\} \cup \{T_{h-1,i}, i \leq 2$, submulţimi ale mulţimii T_{h-1} corespunzînd la programe liniare consistente$\}$.

Se determină $x_h^* = (x_{h1}^*, x_{h2}^*, \ldots, x_{hn}^*)$ aşa încît

$$v(x_h^*) = \max \{v(x) | x \in A^{(h)}\} \tag{17}$$

(a) Dacă $x^*_{kj} \in Z$, $\forall j \in \{1, \ldots, n\}$, atunci $x^* = x^*_k$; STOP

(b) Dacă $\exists j \in \{1, 2, \ldots, n\} : x^*_{kj} \notin Z$, fie T_k mulţimea pentru care $x^*_k \in T_k$, atunci vom avea: $h := h + 1$ şi $T_{h-1} := T_k$.

Procesul se continuă. Finitudinea procesului este consecinţa ipotezei (i') de mărginire a domeniului soluţiilor admisibile.

Procesul descris defineşte un arbore în care nodul rădăcină, nodul 1 al arborelui, reprezintă mulţimea Ω a soluţiilor admisibile, iar dacă avem un nod k care marchează o mulţime T_k şi această mulţime se ramifică, atunci celor j noduri, deja existente în arbore, li se mai adaugă nodurile $j+1$ şi $j+2$ care reprezintă respectiv mulţimile T_{k1} şi T_{k2} obţinute ramificînd mulţimea T_k. Între nodul k şi nodurile $j+1$ şi $j+2$ de mai sus se pune cîte o săgeată (de la nodul k spre nodurile $j+1$ şi $j+2$) pe care se trece, eventual, informaţia pe baza căreia s-a efectuat ramificarea.

Să urmărim acum aplicabilitatea principiului descris mai sus pe un exemplu numeric concret. Fie acesta:

$$\left\{\begin{array}{l} \max\ (-x_1 + x_2) \\ -2x_1 + \ x_2 \leqslant 6 \\ -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ \ x_1,\ x_2 \leqslant 0 \\ \ x_1,\ x_2 \in Z \end{array}\right. \tag{18}$$

Prin urmare avem:

$$\Omega = \{x \in R^2 | 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0, \quad x_1,\ x_2 \geqslant 0\} \tag{19}$$

iar

$$\Omega_0 = \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (3, 0)\}$$

ceea ce se poate vedea dacă reprezentăm grafic mulţimea Ω:

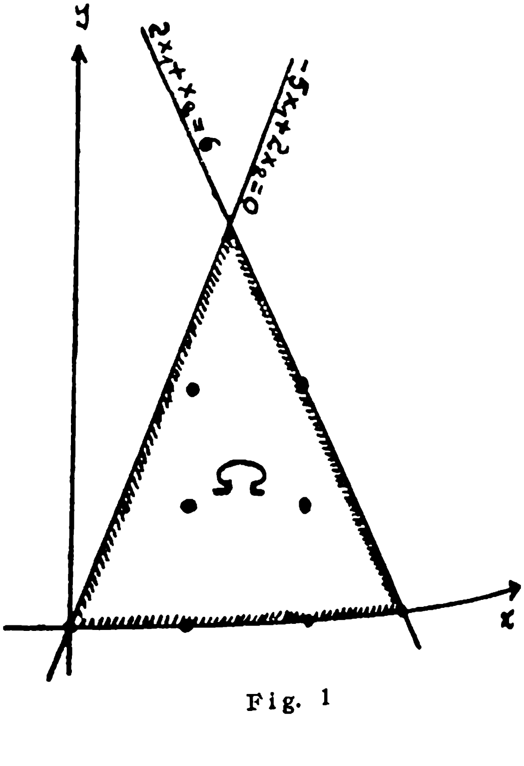

Fig. 1

Evident ipotezele (i')—(ii') sînt verificate în cazul problemei (18).

Să trecem acum la rezolvarea efectivă a problemei.

1. $h := 0$, $\mathcal{a}^{(0)} := \{T\} = \{\Omega\}$. Se rezolvă programul liniar:

$$\left\{\begin{array}{l} \max\ (-x_1 + x_2) \\ \ 2x_1 + \ x_2 \leqslant 6 \\ -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ \ x_1,\ x_2 \geqslant 0 \end{array}\right. \tag{21}$$

soluţia care se obţine prin metoda simplex a lui Zuhoviţki [7] este $x^*_0 = (x^*_{01}, x^*_{02}) = (4/3,\ 10/3)$ pentru care funcţia obiectiv ia valoarea 2. Soluţia găsită fiind neîntreagă, mulţimea T se ramifică.

2. $h := 1$, $T_0 := \Omega$. Alegem una din variabilele neîntregi ale soluţiei optime găsite. Fie aceasta variabila x_1. Impunîndu-i restricţiile alternative

$$x_1 \leqslant 1 \tag{22}$$

şi

$$x_1 \geqslant 2 \tag{23}$$

definim respectiv mulţimile:

$$T_{01} = \{x \in R^2 | 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0, \quad x_1 \leqslant 1; \quad x_1, x_2 \geqslant 0\} \tag{24}$$

şi

$$T_{02} = \{x \in R^2 | 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0, \quad x_1 \geqslant 2; \quad x_2 \geqslant 0\}, \tag{25}$$

Mărginind fiecare din cele două mulţimi, ceea ce revine la rezolvarea respectiv a următoarelor două programe liniare:

$$\begin{cases} \max(-x_1 + x_2) \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \leqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (26) \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \max(-x_1 + x_2) \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \geqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (27)$$

obţinem $(x_1, x_2) = (1, 5/2)$; $v(x) = 3/2$ pentru problema (26) şi $(x_1, x_2) = (2, 2)$; $V(x) = 0$ pentru problema (27).

Aşadar $\mathcal{Q}^{(1)} := \{T_{01}, T_{02}\}$. Se determină $\max \{v(x) | x \in \mathcal{Q}^{(1)}\} = v(1, 5/2) = 3/2$. Se observă că $x_1^* = (1, 5/2) \notin Z^2$. Prin urmare mulţimea T_{01} care conţine acest punct va fi mulţimea căreia i se va aplica regula de ramificare.

3. $h := 2$, $T_1 := T_{01}$. Singura variabilă neîntreagă a soluţiei x_1^* fiind variabila $x_2 = 5/2$, mulţimile T_{011}, T_{012} obţinute ramificînd mulţimea T_{01} vor avea respectiv expresiile:

$$T_{011} = \{x \in R^2 | 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0, \quad x_1 \leqslant 1, \ x_2 \leqslant 2; \quad x_1, x_2 \geqslant 0\} \tag{28}$$

şi

$$T_{012} = \{x \in R^2 | 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0, \quad x_1 \leqslant 1, \ x_2 \geqslant 3; \quad x_1, x_2 \geqslant 0\}. \tag{29}$$

Mărginind cele două mulţimi, ceea ce revine la rezolvarea respectiv a următoarelor două probleme de programare liniară:

$$\begin{cases} \max(-x_1 + x_2) \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \leqslant 1 \\ x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (30) \quad \text{şi} \quad \begin{cases} \max(-x_1 + x_2) \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ x_1 \leqslant 1 \\ x_2 \leqslant 3 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \quad (31)$$

se găsește soluția $(x_1, x_2) = (4/5, 2)$; $v(x) = 6/5$ pentru problema (30), problema (31) fiind inconsistentă. Prin urmare $\mathcal{A}^{(2)} := \{T_{02}, T_{011}\}$. Determinăm max $\{v(x) | x \in \mathcal{A}^{(2)}\} = v(4/5, 2) = 6/5$. Soluția $x_2^* = (4/5, 2)$ fiind încă neîntreagă și ea fiind conținută în mulțimea T_{011}, această mulțime va trebui ramificată.

4. $h := 3$, $T_2 := T_{011}$. Mulțimile T_{0111}, T_{0112} care rezultă prin ramificarea mulțimii T_{011} vor fi:

$$T_{0111} = \{x \in R^2 | 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0, \quad x_1 \leqslant 1, \quad x_2 \leqslant 2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 \geqslant 0\}. \tag{32}$$

și

$$T_{0112} = \{x \in R^2 | 2x_1 + x_2 \leqslant 6, \quad -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0, \quad x_1 \leqslant 1, \quad x_2 \leqslant 2, \quad x_1 \geqslant 1, \ x_2 \geqslant 0\}. \tag{33}$$

Mărginind cele două mulțimi se găsesc respectiv următoarele puncte—soluție: $(x_1, x_2) = (0, 0)$; $v(x) = 0$ și $(x_1, x_2) = (1, 2)$; $v(x) = 1$. Prin urmare $\mathcal{A}^{(3)} := \{T_{02}, T_{0111}, T_{0112}\}$. Calculînd max $\{v(x) | x \in \mathcal{A}^{(3)}\} = 1 = v(1, 2)$ se obține că $x_3^* = (1, 2) \in Z^2$; prin urmare aceasta este soluția optimă pentru problema (18).

Arborele care se obține ca rezultat al procesului descris mai sus este:

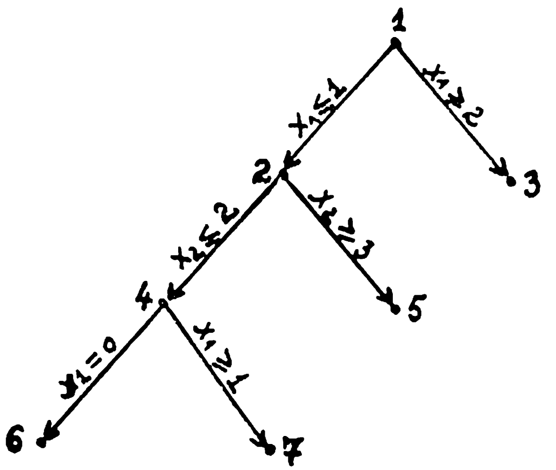

Fig. 2

Algoritmul „ramifică și exclude". În scopul îmbunătățirii metodei de tip „branch and bound", în sensul reducerii volumului de calcule și timpului de lucru la calculator, am căutat un criteriu care să definească acea ramură a arborelui—soluție pe care este posibilă atingerea celei mai bune soluții curente (ramura definită de relația (17)). În acest sens, în cadrul metodei anterioare, am utilizat „penalizările"

$$P_{\inf} = \min \{f_{p0} a_{0j} / a_{pj} | j : a_{pj} > 0\} \tag{34}$$

și

$$P_{\sup} = \min \{(1 - f_{p0}) a_{0j} / -a_{pj} | j : a_{pj} < 0\} \tag{35}$$

produse de alternativele (3) — (4), „penalizări" ale căror expresii analitice, cu toate explicațiile necesare pot fi găsite în [6]. Cu ajutorul acestor „penalizări" am definit un criteriu de înlăturare a unor ramificații inutile ale arborelui—soluție, ramificații care se păstrează pentru considerații ulterioare. Criteriul despre care este vorba a fost obținut pe baza unei observații: „penalizările" (34) — (35) reprezintă mărimea cu cît scade valoarea funcției obiectiv atunci cînd restricțiilor deja existente li se adaugă o restricție de tipul (3) respectiv (4).

În baza acestui criteriu, la fiecare iterație $h \geq 1$, se va considera pentru mărginire mulțimea care corespunde celei mai mici descreșteri a funcției obiectiv z.

Algoritmul obținut utilizînd acest criteriu este de asemenea iterativ.

Iterația o constă în aceleași operații ca în metoda de tip „branch and bound".

La *o iterație h*, oarecare, a algoritmului, de îndată ce o mulțime T_k se ramifică, se calculează descreșterile corespunzătoare mulțimilor T_{k1}, T_{k2} obținute prin ramificare. Aceste descreșteri și descreșterea corespunzătoare ramurii păstrată pentru considerații ulterioare se compară între ele; mulțimea corespunzătoare celei mai mici dintre aceste valori este mulțimea care se mărginește. Se găsește astfel x_h^* definit de relația (17). Algoritmul se continuă pentru o nouă iterație $h := h + 1$.

Avînd în vedere modul de lucru, am numit acest algoritm „ramifică și exclude".

Să urmărim aplicabilitatea algoritmului pentru același exemplu numeric (18).

1. $h := 0$

$R := 99999$ (această valoare simbolizează plus infinitul); valoarea variabilei R reprezintă descreșterea valorii funcției obiectiv pe ramura păstrată pentru concluziile ulterioare.

$S := 0$ (valoarea variabilei S reprezintă descreșterea cea mai mică a valorii funcției obiectiv pe ramura curentă).

$S_1 := 0$ (valoarea variabilei S_1 reprezintă descreșterea pe ramura alternativă).

Soluția obținută rezolvînd (21) fiind neîntreagă, mulțimea T se va ramifica.

2. $h := 1$

Se obțin mulțimile T_{01}, T_{02} (date de (24) — (25)) pentru care „penalizările" corespunzătoare sînt respectiv $P_{\inf} = 1/2$, $P_{\sup} = 2$. Prin urmare $S := 1/2$, $S_1 := 2$, $R := S_1$. Mulțimea corespunzătoare descreșterii minime este T_{01}. Așadar $S_1 := S$. Mărginind mulțimea T_{01} se obține soluție neîntreagă. Prin urmare T_{01} se va ramifica.

3. $h := 2$

„Penalizările" produse de alternativele impuse singurei variabile neîntregi $x_2 = 5/2$ sînt respectiv $P_{\inf} = 3/10$, $P_{\sup} = 99999$. Așadar $S := S + 3/10 = 4/5 < R$. Mulțimea T_{011} corespunzătoare acestei descreșteri minime se mărginește $S_1 := S$. Soluția fiind încă neîntreagă, T_{011} se ramifică.

4. $h := 3$

„Penalizările" produse de alternativele impuse variabilei $x_1 = 4/5 \notin Z$ sînt respectiv $P_{\inf} = 6/5$, $P_{\sup} = 1/5$. Prin urmare $S := S + 1/5 = 1$, $S_1 :=$

$S_1 + 6/5 = 2$. Mulţimea corespunzătoare descreşterii minime (T_{0112}) semărgineşte; $S_1 := S$. Se găseşte soluţia întreagă $x^* = (x_1^*, x_2^*) = (1, 2)$.

Aşadar numărul problemelor de programare liniară care se rezolvă este jumătate din numărul problemelor necesare în metoda precedentă pentru a rezolva aceeaşi problemă (18).

Modelarea pe calculator. Cele două metode de rezolvare a unei probleme de programare liniară în numere întregi au fost programate pentru calculatorul FELIX C-256. Programele corespunzătoare furnizează informaţiile de ramificare prin intermediul unei matrici ale cărei linii corespund nodurilor arborelui, iar coloanele în număr de şapte (pentru metoda de tip „branch and bound") respectiv opt (pentru algoritmul „ramifică şi exclude") furnizează informaţiile de ramificare corespunzătoare fiecărui nod al arborelui.

În scopul comparării eficienţei la calculator a celor doi algoritmi cu algoritmi cunoscuţi ai programării întregi, au fost întocmite programele în limbajul FORTRAN IV pentru algoritmul ciclic al lui G o m o r y [4] şi pentru algoritmul lui B e a l e şi S m a l l [2]. Pentru a putea face o comparaţie a rezultatelor relativ la volumul de calcule (în număr de iteraţii) şi la timpul de lucru la calculator, programele corespunzătoare au fost rulate, pentru aceleaşi probleme:

$$\begin{cases} \max\,(-x_1 + x_2) \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 6 \\ -5x_1 + 2x_2 \leqslant 0 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases} \qquad \begin{cases} \max\,(x_1 + x_2) \\ 14x_1 + 9x_2 \leqslant 51 \\ -6x_1 + 3x_2 \leqslant 1 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max\,(-3x_1 - 8x_2) \\ -4x_1 - 5x_2 \leqslant -2 \\ -3x_1 - 7x_2 \leqslant -2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \\ x_1, x_2 \in Z \end{cases} \qquad \begin{cases} \max\,(2x_1 + x_2) \\ x_1 - x_2 \leqslant 4 \\ 3x_1 - x_2 \leqslant 18 \\ -x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \\ x_1, x_2 \geqslant 0,\ \text{întregi} \end{cases}$$

pentru care numărul de iteraţii şi timpii unităţii centrale necesari rezolvării la calculator se dau în tabelul de mai jos:

Algoritmul	Numărul de iteraţii pentru cele patru exemple				Timp UC
Gomory	6	10	1	1	8,86 sec
Beale şi Small	3	3	1	1	11,54 sec
Branch and bound	3	3	1	1	7,60 sec
Ramifică şi exclude	3	3	1	1	6,60 sec

Concluzii. Analizînd rezultatele tabelului de mai sus, obţinute pe calculatorul FELIX C-256, se poate trage concluzia că metodele prezentate în acest articol sînt superioare, ca timp şi volum de calcule, atît raportate la metoda lui

Beale şi Small [2], cît şi raportate la algoritmul lui Gomory [4]. În plus, algoritmul „ramifică şi exclude" este mai eficient, în acest sens, faţă de metoda de tip „branch and bound", dat fiind faptul că în cazul algoritmului „ramifică şi exclude", la fiecare iteraţie, volumul calculelor se reduce considerabil, ceea ce are drept urmare sporirea eficienţei la calculator.

(Intrat în redacţie la 9 septembrie 1977)

BIBLIOGRAFIE

1. Balas Egon, *A note on the Branch and Bound Principle*, Op. Res., **16**, 2, 1968.
2. Beale, E. M. L., and Small, R. E., *Mixed Integer Programming by a Branch and Bound Technique*, IFIP Congres 1965, 2, p. 450–451.
3. Dantzig, G. B., *Note on Solving Linear Programs in Integers*, Naval Res. Logist. Quart., 1959, 6, p. 75–76.
4. Gomory, R. E., *An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs*, Recent Advances in Math. Programming, McGraw-Hill, 1962.
5. Gomory, R. E., *All Integer Programming Algorithm*, R.C. 189, IBM Corp., 1960.
6. Tomlin, J. A., *An Improved Branch and Bound method for Integer programming*, Op. Res., **19**, 4, 1971.
7. Zuhoviţki, S. I., Avdeeva, L. I., *Lineinoie i vupukloie programmirovanie*, Izd. Nauka, Moskva, 1964, p. 102–110.

TWO METHODS TO SOLVE AN INTEGER PROGRAMMING

(Summary)

In this note two new methods to solve linear integer programming are proposed: a method of the type branch and bound and another of the type branch and exclude. Both methods are iterative.

The first method of the type branch and bound is based on the work [1], and is an adaptation of the Balas Egon's principle to integer linear programming. The second method is an improvement of the same method. As the test problems showed, these two methods are more efficient than other known methods.

UN PROBLÈME DE PROGRAMMATION PARAMÉTRIQUE

MARCEL RĂDULESCU

Dans plusieurs articles a été posé le problème de programmation avec restrictions linéaires, dans laquelle la fonction économique est un produit de deux fonctions linéaires [1, 2, 3] ou de $p \geqslant 2$ fonctions linéaires [4]. À propos de ce problème on a construit des algorithmes pour trouver un point de minimum local [1, 2], ou de minimum global [3, 4].

Dans cette notte nous considérons un problème de programmation, la fonction économique étant un produit de $p \geqslant 2$ fonctions linéaires dont chaque facteur dépend linéairement d'un paramètre qui varie sur un intervalle $[u, v]$.

1. Soit

$$\Omega = \{x \in R^n \mid Ax \leqslant b\}$$

et

$$f: \Omega \to R^+, \; f(x, t) = \prod_{i \in I} [c_i^T x + \alpha_i + t(d_i^T x + \beta_i)]$$

où

$$t \in [u, v] \subset R, \; I = \{1, 2, \ldots, p\}, \; p \geqslant 2, \; \alpha_i, \; \beta_i \in R, \; i \in I$$

$$c_i^T = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{in}) \,; \; d_i^T = (d_{i1}, d_{i2}, \ldots, d_{in}) \,; \; b^T = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$$

$$c_{ij}, \; d_{ij} \in R, \quad i \in I; \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

et $A = (a_{ij})$ est une matrice d'ordre $m \times n$, $m > n$. On suppose que

$$z_i + \bar{z}_i t = c_i^T x + \alpha_i + (d_i^T x + \beta_i) t > 0, \; x \in \Omega, \; t \in [u, v], \; i \in I \tag{1}$$

Nous supposons en plus que Ω est un polyèdre nonvide et borné dans R^n. Parce que la fonction f vérifie la condition (1), il résulte qu'elle est une fonction quasi concave [4] sur Ω, pour $t \in [u, v]$. Dans ce cas, en base du théorème 2 de l'article cité, pour $t \in [u, v]$ la fonction f touche son minimum local dans un sommet du polyèdre Ω.

On considère le porblème suivant: *diviser l'intervalle* $[u, v]$ *dans les sous-intervalles* $[u_0, u_1]$, $(u_h, u_{h+1}]$, $h \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$, $u_0 = u$, $u_q = v$, *de sorte que pour* $t \in [u_0, u_1]$, $t \in (u_h, u_{h+1}]$, *la fonction* f *ait un minimum global dans le même sommet* $x^h \in \Omega$, $h \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$.

On emploie pour resoudre ce problème l'algorithme simplex. Soit le système d'inégalités qui déterminent Ω sous la forme

$$y = -Ax + b \geqslant 0 \tag{2}$$

où $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$. En tenant compte des relations (1) et (2) le tableau simplex du problème s'écrit comme suit

$$
\begin{array}{rc|ccc|c|}
 & & -x_1 & \ldots & -x_n & 1 \\
\hline
y_1 & = & a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
\vdots & & & & & \\
y_m & = & a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \\
\hline
z_1 & = & -c_{11} & \ldots & -c_{11} & \alpha_1 \\
\vdots & & & & & \\
z_p & = & -c_{p1} & \ldots & -c_{pn} & \alpha_p \\
\hline
\bar{z}_1 & = & -d_{11} & \ldots & -d_{1n} & \beta_1 \\
\vdots & & & & & \\
\bar{z}_p & = & -d_{p1} & \ldots & -d_{pn} & \beta_p \\
\hline
\end{array}
$$

On élimine les variables indépendantes x_k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ à l'aide de n pas Jordan modifiés (voir [5]) et on obtient :

$$
\begin{array}{rc|ccccc|c|}
 & & -y_1 & \ldots & -y & \ldots & -y_n & 1 \\
\hline
y_{n+1} & = & e_{n+1,1} & \ldots & e_{n+1,j} & \ldots & e_{n+1,n} & e_{n+1} \\
\vdots & & & & & & & \\
y_m & = & e_{m1} & \ldots & e_{mj} & \ldots & e_{mn} & e_m \\
\hline
z_1 & = & r_{11} & \ldots & r_{1j} & \ldots & r_{1n} & s_1 \\
\vdots & & & & & & & \\
z_p & = & r_{p1} & \ldots & r_{pj} & \ldots & r_{pn} & s_p \\
\hline
\bar{z}_1 & = & \bar{r}_{11} & \ldots & \bar{r}_{1j} & \ldots & \bar{r}_{1n} & \bar{s}_1 \\
\vdots & & & & & & & \\
\bar{z}_p & = & \bar{r}_{p1} & \ldots & \bar{r}_{pj} & \ldots & \bar{r}_{pn} & \bar{s}_p \\
\hline
\end{array}
$$

$$x_k = -\sum_{j=1}^{n} (e_{kj} y_j + e_j), \; k \in J = \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Supposons que le point $\hat{x}^0$ pour lequel

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0 \tag{3}$$

est un sommet du polyèdre Ω ; alors

$$e_{n+1}, \ldots, e_m \geqslant 0 \tag{4}$$

et

$$s_i + t\bar{s}_i > 0, \; i \in I, \; t \in [u, v], \tag{5}$$

parce que dans ce point $z_i + t\bar{z}_i = s_i + t\bar{s}_i$, $i \in I$ et de (1) il résulte (5).

Soit $\hat{x}^0$ un sommet du polyèdre Ω, on considère

$$R_0 = (r_{ij}), \; \bar{R}_0 = (\bar{r}_{ij}), \quad i \in I, \quad j \in J$$

et

$$R = R_0 + t\bar{R}_0$$

$$S = \left(\frac{1}{s_1 + t\bar{s}_1}, \ldots, \frac{1}{s_p + t\bar{s}_p}\right).$$

Soit

$$Q = SR = \left(\sum_{i \in I} \frac{r_{i1} + t\bar{r}_{i1}}{s_i + t\bar{s}_i}, \ldots, \sum_{i \in I} \frac{r_{in} + t\bar{r}_{in}}{s_i + t\bar{s}_i}\right).$$

Avec ces notations a lieu le

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour que le sommet $\hat{x}^0$ soit un point de minimum local de la fonction f est que*

$$Q \leqslant 0. \tag{6}$$

La nécessité. Soit

$$f(x, t) = g(y_1, \ldots, y_n, t) = \prod_{i \in I} \left(-\sum_{j \in I} y_j (r_{ij} + t\bar{r}_{ij}) + s_i + t\bar{s}_i\right)$$

alors

$$\frac{\partial g}{\partial y_j} = -\sum_{i \in I} (r_{ij} + t\bar{r}_{ij}) \prod_{\substack{1 \neq k \\ k \in I}} \left(-\sum_{j \in I} y_j (r_{kj} + t\bar{r}_{kj}) + s_k + t\bar{s}_k\right). \tag{7}$$

On déduit ensuite que

$$\frac{\partial g(0, t)}{\partial y_j} = -\sum_{i \in I} (r_{ij} + t\bar{r}_{ij}) \prod_{\substack{i \neq k \\ k \in I}} (s_k + t\bar{s}_k) = -f(\hat{x}^0) \sum_{i \in I} \frac{r_{ij} + t\bar{r}_{ij}}{s_i + t\bar{s}_i}$$

et donc

$$\nabla g(0, t) = -Qf(x^0, t). \tag{8}$$

Parce que $\hat{x}_0$ est un point de minimum

$$\nabla g(0, t) \geqslant 0, \tag{9}$$

et comme de (1) il résulte $f(\hat{x}^0, t) > 0$ des relations (8), (9) nous obtenons la condition (6).

La suffisance. Soit la relation (6) satisfaite. Dans ce cas, de la relation (8) il résulte (9) et donc le point $\hat{x}^0$ est un point de minimum.

2. Pour la résolution du problème enoncé, on considère $t = u$, on détermine un sommet $\hat{x}^0$ du polyèdre Ω et soit Q le vecteur correspondant. Si les conditions (6) sont vérifiées, alors $\hat{x}^0$ est un point de minimum local. Si pour $j = j_0$ la condition (6) n'est pas vérifiée, alors

$$\sum_{i \in I} \frac{r_{ij_0} + u\bar{r}_{ij_0}}{s_i + u\bar{s}_i} > 0.$$

On fait un pas Jordan modifié, avec la colonne pivot j_0, ensuite on vérifie de nouveau si les relations (6) sont satisfaites. On continue jusqu'à ce qu'on arrive à un sommet du polyèdre Ω qui est un point de minimum local.

Supposons pour simplifier que pour $t = u$ dans le point $\hat{x}^0 = x^{01}$, les conditions (6) sont satisfaites. On détermine $t_j > u$, $j \in J$, comme étant la plus petite racine de l'équation

$$\sum_{i \in I} \frac{r_{ij} + t_j \bar{r}_{ij}}{s_i + t_j \bar{s}_i} = 0. \tag{10}$$

Soit $J_{x^{01}}$ l'ensemble des indices $j \in J$ pour lesquels $t_j > u$. On considère

$$u_{01} = \min_{j \in J_{x^{10}}} \{t_j\}. \tag{11}$$

Pour $t \in [u, u_0]$ le point x^{01} est un point de minimum local de la fonction f. La valeur minimum de la fonction f est dans ce cas

$$f(x^{01}, t) = \prod_{i \in I} (z_i + t\bar{z}_i) = \prod_{i \in I} (s^{01} + ts^{01}), \quad t \in [u, u_{01}].$$

Pour $t > u_{01}$ dans le voisinage de u_{01} la condition (6) n'est pas satisfaite au moins pour un indice j, et donc x^{01} n'est pas un point de minimum.

Pour déterminer un point de minimum global si $t = u$ on va procéder comme il suit : (voir [4])

Soit

$$g_j(y_j) = g(0, \ldots, 0, y_j, 0, \ldots, 0, u) = \prod_{i \in I} (-y_j(r_{ij} + u\bar{r}_{ij}) + s_i + u\bar{s}_i), \; y_j > 0$$

et y_j^* la plus petite racine positive de l'équation

$$g_j(y_j) - g_j(0) = 0. \tag{12}$$

On considère le problème de trouver un minimum local de la fonction $f(x, u)$ sur le domaine Ω_j

$$\Omega_j = \Omega \cap \left\{ y \in R^n \sum_{j=1}^{n} \frac{y_j}{y_j^*} \geqslant 1 \right\}.$$

Remarque. Si l'équation (12) n'a pas une racine positive finie pour un indice $j = j_0$, dans la nouvelle restriction il manque le terme d'indice j_0. Si Ω_j est l'ensemble vide, la recherche d'un point de minimum global pour $t = u$ est terminée.

Pour le nouveau problème, on détermine un point de minimum local x^{02}. Soit u_{02} obtenu de la même manière que u_{01} de (11) et soit (fx^{02}, t) la plus petite valeur de la fonction pour $t \in [u, u_{02}]$. On détermine ainsi $x^{01}, x^{02}, \ldots, x^{0k_0}$; $u_{01}, u_{02}, \ldots, u_{0k_0}$; $f(x^{01}, u), f(x^{02}, u), \ldots, f(x^{0k_0}, u)$. Soit

$$f_m(x^0, u) = \min_{1 \leqslant k \leqslant k_0} \{f(x^{0k}, u)\}.$$

On considère l'ensemble des indices $I_{0m} \subset \{1, 2, \ldots, k_0\}$ de sorte que

$$f(x^{0k}, u) = f_m(x^0, u), \qquad k \in I_{0m}.$$

Pour $k \in I_{0m}$ on calcule la dérivée

$$f'(x^{0k}, t) = \sum_{i=1}^{p} \bar{s}_i^{0k} \prod_{j \neq i} (s_j^{0k} + t\bar{s}_j^{0k}).$$

Soit $x^0 = x^{0k_m}$, de sorte que

$$f'(x_0, u) = f'(x^{0k_m}, u) = \min_{k \in I_{0m}} \{f'(x^{0k}, u)\}.$$

Dans ce cas x^0 est un point de minimum global. Pour déterminer un intervalle $[u, u_1]$ tel que si $t \in [u, u_1]$ le point x^0 soit un point de minimum global, on considère la plus petite racine $t_k^* > u$, $1 \leqslant k \leqslant k_0$ $k \neq k_m$ de l'équation

$$f(x^0, t) - f(x^{0k}, t) = \prod_{i \in I} (s_i^0 + t\bar{s}_i^0) - \prod_{i \in I} (s_i^{0k} + \bar{s}_i^{0k}) = 0 \tag{13}$$

et soit $I_0^* \subset \{1, 2, \ldots, k_0\}$ l'ensemble d'indices pour lesquels $t_k^* \leqslant u_{0k}$ $k \in \{1, 2, \ldots, k_0\}$ alors

$$u_0^* = \min_{k \in I_0^*} \{t_k^*\}$$

$$u_1 = \min \{u_{0k_m}, u_0^*\}.$$

Pour $t \in [u, u_1]$ le point x^0 est un point de minimum global, et la valeur de la fonction est

$$f(x^0, t) = \prod_{i \in I} (s_i^0 + t\bar{s}_i^0).$$

On continue de déterminer, de la même manière, les intervalles $(u_h, u_{h+1}]$ de sorte que pour $t \in (u_h, u_{h+1}]$ x^h est un point de minimum global, jusqu'à ce que $u_{h+1} \geqslant v$.

3. *Exemple.* Soient les restrictions

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 7 \\ x_1 - 4x_2 &\leqslant 1 \\ -2x_1 + 2x_2 &\leqslant 1 \\ -2x_1 - x_2 &\leqslant -1 \\ - x_2 &\leqslant 0 \end{aligned} \tag{14}$$

et la fonction

$$f(x_1, x_2) = [x_1 + 2x_2 + t(2x_1 + x_2 + 1)](3x_1 + x_2 - 1)$$

où $t \in [0, 2]$.

Il faut diviser l'intervalle $[0, 2]$ dans les sousintervalles $[0, u_1]$, $(u_h, u_{h+1}]$, $h \in \{1, 2, \ldots, q\}$ et trouver les sommets correspondants x^h du polyèdre Ω

déterminé par (14) de sorte que x^k soit un point de minimum global pour la fonction f quand $t \in (u_k, u_{k+1}]$. En écrivant

$$
\begin{aligned}
y_1 &= -2x_1 - 2x_2 + 7 \geqslant 0 \\
y_2 &= -\ x_1 + 4x_2 + 1 \geqslant 0 \\
y_3 &= \ \ 2x_1 - 2x_2 + 1 \geqslant 0 \\
y_4 &= \ \ 2x_1 + \ x_2 - 1 \geqslant 0 \\
& \qquad\qquad\ \ x_2 \qquad \geqslant 0 \\
z_1 &= x_1 + 2x_2 \\
z_2 &= 3x_1 + x_2 - 1 \\
\bar{z}_1 &= 2x_1 + x_2 + 1
\end{aligned}
$$

on vérifie que

$$\bar{z}_1 + t\bar{z}_1 > 0, \ z_2 > 0$$

pour $x \in \Omega$, $t \in [0, 2]$, où Ω est déterminé par (14). Le tableau simplex pour resoudre le problème est

	$-x_1$	$-x_2$	1
$y_1 =$	2	2	7
$y_2 =$	1	-4	1
$y_3 =$	-2	2	1
$y_4 =$	-2	-1	-1
$z_1 =$	-1	-2	0
$z_2 =$	-3	-1	-1
$\bar{z}_1 =$	-2	-1	1

On élimine la variable indépendante x_1, en faisant un pas Jordan modifié avec l'élément pivot marqué, et on obtient

	$-y_2$	$-x_2$	1
$y_1 =$	-2	10	5
$y_3 =$	2	-6	3
$y_4 =$	2	-9	1
$z_1 =$	1	-6	1
$z_2 =$	3	-13	2
$\bar{z}_1 =$	2	-9	3

$$x_1 = -y_2 + 4x_2 + 1$$

Le point $y_2 = 0$, $x_2 = 0$ est un sommet du polyèdre Ω. On vérifie les conditions (6) pour $t = 0$, nous avons

$$1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2} > 0, \ -6 - \frac{13}{2} = -\frac{25}{2} < 0.$$

La première relation nous montre que ce point n'est pas un point de minimum et que (6) n'est pas satisfaite pour $j = 2$. On effectue un pas Jordan modifié avec l'élément pivot marqué et on obtient le tableau

	$-y_4$	$-x_2$	1
$y_1 =$	1	1	6
$y_2 =$	-1	3	2
$y_3 =$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$
$z_1 =$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$z_2 =$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\bar{z}_1 =$	-1	0	2

Les conditions (6) pour le point $y_4 = 0$, $x_2 = 0 \left(x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = 0\right)$ et $t = 0$ nous montrent que ce point est un point de minimum local. La plus petite valeur de la fonction f est en ce cas $\frac{1 + 4t}{4}$, $t \geqslant 0$. On calcule les racines des équations (10) et on obtient $t_1 = -\frac{2}{7} < 0$, $t_2 = \frac{1}{2} > 0$. On déduit alors que $u_{01} = \frac{1}{2}$ et donc le point $x^{01}\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$ est un point de minimum local de la fonction économique pour $t \in \left[0,\ \frac{1}{2}\right]$. Les équations (12) pour $t = 0$, ont les racines $y_4^* = -\frac{4}{3} < 0$, $x_2^* = \frac{2}{3} > 0$. On ajoute la restriction

$$y_5 = 3x_2 - 2 \geqslant 0$$

et on obtient après un pas Jordan modifié le tableau simplex

	$-y_4$	$-y_3$	1
$y_1 =$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{16}{3}$
$x_2 =$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$y_2 =$	-1	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{2}$
$y =$	-1	1	0
$z_1 =$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
$z_2 =$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$\bar{z}_1 =$	-1	0	2

En écrivant les conditions (6) pour $t = 0$ on déduit que le point $y_4 = 0$, $y_3 = 0 \left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$ est un point de minimum local. La plus petite valeur de la fonction f est en ce cas $\frac{3 + 4t}{12}$, $t \geqslant 0$. On calcule les racines des équations (10) et on obtient $t_1 = -\frac{13}{17} < 0$, $t_2 = -\frac{1}{2} < 0$, donc $u_{02} = +\infty$.

Les équations (12) pour $t = 0$, ont les racines $y_4^* = -2 < 0$, $y_3^* = 2 > 0$. On ajoute la restriction

$$y_6 = y_3 - 2 \geqslant 0$$

et après deux pas Jordan modifiés on obtient le tableau simplex

	$-y_6$	$-y_5$	1
$y_1 =$	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{10}{3}$
$x_2 =$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$y_2 =$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$
$y_3 =$	-1	0	2
$y_4 =$	-1	-1	2
$z_1 =$	$-\frac{1}{2}$	-1	$\frac{5}{2}$
$z_2 =$	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{4}{3}$	$\frac{19}{6}$
$\bar{z}_1 =$	-1	-1	4

On vérifie que le point $y_6 = 0$, $y_5 = 0 \left(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}\right)$ est un point de minimum local. La plus petite valeur de la fonction f est en ce cas $\frac{19(5 + 8t)}{12}$, $t \geqslant 0$. Les racines des équations (10) pour $t = 0$, sont négatives, donc $u_{03} = +\infty$. Les équations (12) pour $t = 0$, ont les racines y_6^*, y_5^* négatives.

En comparant les plus petites valeurs de fonction f dans les points $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$ et $\left(\frac{7}{6}, \frac{2}{3}\right)$ on déduit que le point $x^0 \left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un point de minimum global pour $t = 0$.

Les racines des équations (13) sont négatives et parce que $u_{01} = \frac{1}{2}$, $u_{03} = +\infty$, $u_{30} = +\infty$ il résulte que $u_1 = \frac{1}{2}$.

En conclusion pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$ le point $x^0\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ est un point de minimum global et la plus petite veleur de f est en ce cas $\frac{1+4t}{4}$.

Pour $t > \frac{1}{2}$ nous considérons le tableau 3, les conditions (6) ne sont pas vérifiées pour la colonne de x_2. On effectue un pas Jordan modifié avec l'élément pivot marqué et on obtient un point de minimum local pour $y_4 = 0$, $y_3 = 0 \left(x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{2}{3}\right)$, $t > \frac{1}{2}$, la plus petite valeur de la fonction f étant $\frac{3+4t}{12}$, et $u_{11} = +\infty$. Les racines des équations (12) sont $y_4^* < 0$, $y_3^* = 4$. On ajoute la nouvelle restriction

$$y_7 = y_3 - 4 \geqslant 0.$$

Après trois pas Jordan modifiés on obtient le tableau simplex

	$-y_2$	$-y_7$	1
$y_3 =$	0	-1	4
$x_2 =$	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
$y_4 =$	-1	$-\frac{3}{2}$	1
$y_1 =$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{10}{3}$
$x_1 =$	$-\frac{3}{5}$	-1	2
$x_2 =$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$
$\bar{x}_1 =$	$\frac{1}{15}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{43}{6}$

Les conditions (6) pour $y_2 = 0$, $y_7 = 0 \left(x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = \frac{2}{3}\right)$, $t > \frac{1}{2}$ sont vérifiées, donc ce point est un point de minimum local. La plus petite valeur de la fonction f est $\frac{15(12+43t)}{18}$. On obtient des équations (10) que $u_{12} = 242 > 2$. Les racines des équations (12) pour $t > \frac{1}{2}$ sont $y_2^* < 0$, $y_7^* < 0$, donc ils n'ont pas d'autres points de minimum pour $t > \frac{1}{2}$. En comparant la plus petite des valeurs de la fonction f dans les points $x_1 = \frac{1}{6}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ et $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$

on déduit que le premier point est un point de minimum global pour $t > \frac{1}{2}$.
L'équation (13)

$$\frac{5(12 + 43t)}{18} = \frac{3 + 4t}{12}$$

a la racine négative donc $u_1 = 242 > 2$.

En conclusion, pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ le point de minimum global est $x^0\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ et pour $t \in \left(\frac{1}{2}, 2\right]$ le point de minum global est $x^1\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}\right)$.

(Manuscrit reçu le 8 octobre 1977)

BIBLIOGRAPHIE

1. Anand Promila, Swarup Kanti, *Minimization of an indefinite quadratic function with linear constrants*, Ekonomocky Matematicky, Obzor **6**, 4, 1970, 381–387.
2. Candler W., Townsler R. T., *The maximization of quadratic function of variables subject to linear inegalities*, Management Science, 10, 1964, 215–223.
3. Swarup Kanti, *Programming with idefinite quadratic function with linear constrainte*, Cahier de Centre d'Études de Rech. Op. **8**, 2, 1966, 132–136.
4. I. Maruşciac, M. Rădulescu, *Programarea unui produs de funcţii liniare*, Studii şi Cercet. Matem., 6, tom **25**, 1973, 833–845.
5. Zuhovicki S. I., Avdeeva L., *Lineinoi i vupukloe programmirovanie*, Izd. Nauka, Moskva, 1964.

O PROBLEMĂ DE PROGRAMARE PARAMETRICĂ

(Rezumat)

În lucrare se consideră următoarea problemă: fiind dată funcţia $f: \Omega \to R^+$,

$$f(x, t) = \prod_{i \in I} [c_i^T x + \alpha_i + t(d_i^T x + \beta_i)]$$

unde $\Omega = \{x \in R^n \mid Ax < b\}$, $t \in [u, v] \subset R$, $I = \{1, 2, \ldots, p\}$, $p > 2$; $\alpha_i, \beta_i \in R$, $i \in I$, iar c_i, d_i, b sînt vectori corespunzători şi A o matrice de ordinul $m \times n$; să se împartă intervalul $[u, v]$ de variaţie a parametrului t în subintervale $[u_0, u_1]$, (u_h, u_{h+1}), $h \in \{1, 2, \ldots, q-1\}$, $u_0 = u$, $u_q = v$, astfel că pentru $t \in (u_h, u_{h+1}]$ funcţia f să aibă un minim global în acelaşi vîrf x^h.

Pentru rezolvarea acestei probleme se dă o condiţie necesară şi suficientă ca un vîrf x^h să fie un punct de minimum local pentru funcţia f. În continuare se prezintă un algoritm de rezolvare. Un exemplu concret este tratat în ultima parte a lucrării.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

APROXIMAREA SOLUŢIILOR UNEI ECUAŢII INTEGRALE CU ARGUMENT MODIFICAT

M. AMBRO

1. **Teoreme de existenţă şi unicitate.** Considerăm ecuaţia integrală de tip Fredholm cu argument modificat

$$\varphi(x) = \int_a^b K(x, y, \varphi(y), \varphi(a), \varphi(b))dy + f(x), \qquad x \in [a, b] \tag{1}$$

unde

$$K \in C([a, b] \times [a, b] \times \mathbf{R}^3)$$

sau $K \in C([a, b] \times [a, b] \times J^3)$, $f \in C[a, b]$. Ecuaţiei (1) îi ataşăm aplicaţia $A : \bar{B}(f; R) \to C[a, b]$ definită de $\varphi \mapsto \int_a^b K(\cdot, y, \varphi(y), \varphi(a), \varphi(b))dy + f(\cdot)$ unde R este un număr real pozitiv ce satisface condiţia

$$[\varphi \in \bar{B}(f; R)] \Rightarrow [\varphi(x) \in I \subset \mathbf{R}].$$

Mulţimea soluţiilor ecuaţiei (1) coincide cu mulţimea punctelor fixe ale aplicaţiei A.

În continuare vom asigura condiţiile din teorema lui Picard-Banach. Stabilim în ce condiţii $\bar{B}(f; R)$ e o submulţime invariantă pentru A.

$$|A\varphi(x) - f(x)| = \left|\int_a^b K(x, y, \varphi(y), \varphi(a), \varphi(b))\, dy\right| \leqslant \int_a^b |K(x, y, \varphi(y), \varphi(a), \varphi(b))| dy.$$

Presupunem că funcţia K e mărginită şi fie $M > 0$ astfel incit are loc

$$|K(x, y, u, v, w)| \leqslant M,\ u, v, w \in J^3,\ (x, y, u, v, w) \in [a, b] \times [a, b] < J^3$$

Deci avem

$$|A\varphi(x) - f(x)| \leqslant M \cdot \int_a^b dy = M(b - a)$$

şi atunci condiţia de invarianţă a sferei este

$$M(b - a) \leqslant R \quad \text{sau} \quad 1 \leqslant \frac{R}{M(b - a)}.$$

Se poate defini aplicaţia notată tot cu A, $A : \bar{B}(f; R) \to \bar{B}(f; R)$, $\bar{B}(f; R)$ fiind o submulţime închisă a spaţiului metric complet $C[a, b]$. Pentru a putea aplica teorema lui Picard-Banach și a obține o teoremă de existență și unicitate a soluției ecuației (1) trebuie ca aplicația A să fie contracție.

$$|A\varphi_1(x) - A\varphi_2(x)| = \left|\int_a^b [K(x, y, \varphi_1(y), \varphi_1(a), \varphi_1(b)) - K(x, y, \varphi_2(y), \varphi_2(a), \varphi_2(b))]\, dy\right| \leqslant \int_a^b |K(x, y, \varphi_1(y), \varphi_1(a), \varphi_1(b)) - K(x, y, \varphi_2(y), \varphi_2(a), \varphi_2(b))| dy$$

Presupunem că funcția K satisface o condiție Lipschitz în raport cu ultimele trei argumente, cu constanta L, adică

$$|K(x, y, u_1, v_1, w_1) - K(x, y, u_2, v_2, w_2)| \leqslant$$
$$\leqslant L(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|),\ x, y \in [a, b],\ u_1, u_2, v_1, v_2, w_1, w_2 \in R.$$

Deci avem

$$|A\varphi_1(x) - A\varphi_2(x)| \leqslant L\int_a^b [|\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| + |\varphi_1(a) - \varphi_2(a)| + |\varphi_1(b) - \varphi_2(b)|]dy \leqslant$$
$$\leqslant L(b - a) \cdot \max_{y \in [a, b]} [|\varphi_1(y) - \varphi_2(y)| + |\varphi_1(a) - \varphi_2(a)| + |\varphi_1(b) - \varphi_2(b)|] =$$
$$= 3L(b - a)||\varphi_1 - \varphi_2||_{C[a, b]}$$

Trecînd la normă și în membru stîng, avem

$$||A\varphi_1 - A\varphi_2||_{C[a, b]} \leqslant 3L(b - a)||\varphi_1 - \varphi_2||_{C[a, b]}.$$

Din condiția $3L(b - a) < 1$ sau $1 < \dfrac{1}{3L(b - a)}$ obținem că funcția A este o contracție cu coeficientul $3L(b - a)$. Aplicăm teorema Picard-Banach și obținem o teoremă de existență și unicitate pentru soluția ecuației (1) în sfera $B(f; R)$.

TEOREMA 1. *Dacă K este o funcție mărginită, iar numerele M, L, a, b, R satisfac condițiile*

$$1 \leqslant \frac{R}{M(b - a)} \qquad \text{(condiția de invarianță a sferei)}$$

$$1 < \frac{1}{3L(b - a)} \qquad \text{(condiția de contracție)}$$

atunci ecuația (1) are în $B(f; R) \subset C[a, b]$ o soluție și numai una, soluție ce poate fi obținută prin metoda aproximațiilor succesive, pornind de la orice element $\varphi_0 \in B(f; R)$. Dacă soluția ecuației este φ^* și a n-a aproximație succesivă φ_n, atunci are loc estimarea: $||\varphi^* - \varphi_n||_{C[a, b]} \leqslant \dfrac{[3L(b - a)]^n}{1 - 3L(b - a)} \cdot ||\varphi_0 - \varphi_1||_{C[a, b]}$ *Dacă $K \in C([a, b] \times [a, b] \times R^3)$ și satisface la o condiție Lipschitz, cu constanta L atunci*

$$|K(x, y, u_1, v_1, w_1) - K(x, y, u_2, v_2, w_2)| \leqslant L(|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| +$$
$$+ |w_1 - w_2|),\ \ x, y \in [a, b],\ u_i, v_i, w_i \in R.$$

În mod analog obţinem

TEOREMA 2. *Dacă numerele L, a, b, satisfac condiţia* $1 < \frac{1}{3L(b-a)}$, *atunci ecuaţia* (1) *are în* $C[a, b]$ *o soluţie şi numai una, soluţie ce poate fi obţinută prin metoda aproximaţiilor succesive pornind de la un element* $\varphi_0 \in C[a, b]$.

2. **Aproximarea soluţiei.** Vom stabili în cele ce urmează un procedeu de aproximare a soluţiei ecuaţiei (1). Pentru aceasta presupunem că

$$K \in C^2\left([a, b] \times [a, b] \times \frac{\mathbf{R}}{J} \times \frac{\mathbf{R}}{J} \times \frac{\mathbf{R}}{J}\right),\ f \in C^2[a, b],\ x, y \in [a, b],$$

şi că sînt îndeplinite condiţiile din una din teoremele de existenţă şi unicitate stabilite. Pentru fixarea ideilor considerăm cazul în care ecuaţia are o soluţie şi numai una în globul închis $\bar{B}(f; R) \subset C[a, b]$. Notăm soluţia aceasta cu φ. Pentru determinarea lui φ aplicăm metoda aproximaţiilor succesive şi avem

$$\varphi_0 = f$$

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x, y, \varphi_0(y), \varphi_0(a), \varphi_0(b))dy + f(x) = \int_a^b K(x, y, f(y), f(a), f(b))dy + f(x).$$

$$\varphi_m(x) = \int_a^b K(x, y, \varphi_{m-1}(y), \varphi_{m-1}(a), \varphi_{m-1}(b))\, dy + f(x).$$

. . .

Vom aproxima termenii şirului aproximaţiilor succesive folosind formula de cuadratură a trapezului

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2n}\left[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right] + R(f),\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \quad (2$$

şi am presupus $f \in C^2[a, b]$, iar pentru $R(f)$, restul formulei avînd estimarea $|R(f)| \leqslant M\frac{(b-a)^3}{12n^2}$, unde $R(f) = \sum_{i=1}^{n} R_i(f)$. Avem

$$\varphi_0(x) = f(x),\ \varphi_0 \in C[a, b]$$

$$\varphi_1(x) = \int_a^b K(x, y, f(y), f(a), f(b))dy + f(x)$$

$$\varphi_1(x_k) = \int_a^b K(x_k, y, f(y), f(a), f(b))\, dy + f(x_k)$$

$$\varphi_1(a) = \int_a^b K(a, y, f(y), f(a), f(b))dy + f(a)$$

$$\varphi_1(b) = \int_a^b K(b,\ y,\ f(y),\ f(a),\ f(b))dy + f(b)$$

$$\varphi_{m-1}(x_k) = \int_a^b K(x_k, y,\ \varphi_{m-2}(y),\ \varphi_{m-2}(a),\ \varphi_{m-2}(b))dy + f(x_k)$$

$$\varphi_{m-1}(a) = \int_a^b K(a,\ y,\ \varphi_{m-2}(y),\ \varphi_{m-2}(a),\ \varphi_{m-2}(b))dy + f(a)$$

$$\varphi_{m-1}(b) = \int_a^b K(b, y,\ \varphi_{m-2}(y),\ \varphi_{m-2}(a),\ \varphi_{m-2}(b))dy + f(b).$$

$$\varphi_m(x) = \int_a^b K(x, y,\ \varphi_{m-1}(y),\ \varphi_{m-1}(a),\ \varphi_{m-1}(b))dy + f(x)$$

$$\varphi_m(x_k) = \int_a^b K(x_k,\ y,\ \varphi_{m-1}(y),\ \varphi_{m-1}(a),\ \varphi_{m-1}(b))dy + f(x_k).$$

Cu ajutorul formulei (2) vom putea calcula integralele ce intervin în şirul aproximaţiilor succesive. În caz general pentru $\varphi_m(x_k)$ avem

$$\varphi_m(x_k) = \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_k,\ a,\ \varphi_{m-1}(a),\ \varphi_{m-1}(a),\ \varphi_{m-1}(b)) +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n-1} K(x_K,\ x_i,\ \varphi_{m-1}(x_i),\ \varphi_{m-1}(a),\ \varphi_{m-1}(b)) + K(x_k,\ b,\ \varphi_{m-1}(b),\ \varphi_{m-1}(a),\ \varphi_{m-1}(b))\Big]$$

$$+ f(x_k) + R_{m,k},\ k = \overline{0, n},\ m \in N \tag{3}$$

iar $\quad |R_{m,k}| \leqslant \dfrac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot \max\limits_{y \in [a,b]} |[K(x_k,\ y,\ \varphi_{m-1}(y),\ \varphi_{m-1}(a),\ \varphi_{m-1}(b))]''_{y^2}|.$

Calculăm derivata funcţiei K din expresia lui $R_{m,k}$. Derivata există deoarece $K \in C^2[(a,\ b] \times [a,\ b] \times \mathbf{R}^3)$.

$$\frac{dK}{dy} = \frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial \varphi_{m-1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}.$$

$$\frac{d^2K}{dy^2} = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial y \cdot \partial \varphi_{m-1}} \cdot \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y} + \frac{\partial^2 K}{\partial \varphi_{m-1} \cdot \partial y} \cdot \frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y} + \frac{\partial^2 K}{\partial \varphi_{m-1}^2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi_{m-1}}{\partial y}\right)^2 +$$

$$+ \frac{\partial K}{\partial \varphi_{m-1}} \cdot \frac{\partial^2 \varphi_{m-1}}{\partial y^2}.$$

Deci

$$[K(x_k, y, \varphi_{m-1}(y), \varphi_{m-1}(a), \varphi_{m-1}(b)]''_y = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 K}{\partial y \cdot \partial\varphi_{m-1}} \cdot \varphi'_{m-1}(y) + $$
$$+ \frac{\partial^2 K}{\partial\varphi^2_{m-1}}(\varphi'_{m-1}(y))^2 + \frac{\partial K}{\partial\varphi_{m-1}} \cdot \varphi''_{m-1}(y).$$

$$\varphi_{m-1}(x) = \int_a^b K(x, y, \varphi_{m-2}(y), \varphi_{m-2}(a), \varphi_{m-2}(b))dy + f(x)$$

$$\varphi'_{m-1}(x) = \int_a^b \frac{K\partial(x, y, \varphi_{m-2}(y), \varphi_{m-2}(a), \varphi_{m-2}(b))}{\partial x} dy + f'(x)$$

$$\varphi''_{m-1}(x) = \int_a^b \frac{\partial^2 K(x, y, \varphi_{m-2}(y), \varphi_{m-2}(a), \varphi_{m-2}(b))}{\partial x^2} dy + f''(x).$$

Facem următoarele notații

$$M_1 = \max_{\substack{|\alpha|\leq 2\\ x, y\in[a, b]}} \left| \frac{\partial^\alpha K(x, y, u, v, w)}{\partial x^{\alpha_1} \cdot \partial y^{\alpha_2} \cdot \partial u^{\alpha_3}} \right|, \quad M_2 = \max_{\substack{\alpha\leq 2\\ x\in[a, b]}} |f^{(\alpha)}(x)|.$$

Ținînd cont de expresiile derivatelor lui $\varphi_{m-1}(x)$ și de aceste notații avem

$$|\varphi_{m-1}(x)| \leq (b-a)M_1 + M_2; \quad |\varphi'_{m-1}(x)| \leq (b-a)M_1 + M_2; \quad |\varphi''_{m-1}(x)| \leq$$
$$\leq (b-a)M_1 + M_2,$$

$$|[K(x, y, \varphi_{m-1}(y), \varphi_{m-1}(a), \varphi_{m-1}(b))]''_y| \leq M_1 + 2M_1[(b-a)M_1 + M_2] +$$
$$+ M_1[(b-a)M_1 + M_2]^2 + M_1[(b-a)M_1 + M_2] =$$
$$= M_1 + 3M_1[(b-a)M_1 + M_2] + M_1[(b-a)M_1 + M_2]^2 = M_0,$$

M_0 nu depinde de m și k, și avem estimarea restului

$$|R_{m,k}| \leq M_0 \cdot \frac{(b-a)^3}{12n^2}, \quad M_0 = M_0(K, D^\alpha K, f, D^\alpha f), \ |\alpha| \leq 2 \tag{4}$$

și o formulă de calcul aproximativ a integralelor din șirul aproximațiilor succesive. Folosind metoda aproximațiilor succesive și formula (3) cu estimarea restului dată de (4), dăm mai jos un algoritm de rezolvare aproximativă a ecuației (1). Pentru aceasta vom calcula aproximativ termenii șirului aproximațiilor succesive și avem

$$\varphi_0(x) = f(x).$$

$$\varphi_1(x_k) = \int_a^b K(x_k, y, f(y), f(a), f(b))dy + f(x_k) = \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_k, a, f(a), f(a), f(b)) +$$
$$+ 2\sum_{i=1}^{n-1} K(x_k, x_i, f(x_i), f(a), f(b)) + K(x_k, b, f(b), f(a), f(b))\Big] + f(x_k) +$$
$$+ R_{1,k} = \tilde{\varphi}_1(x_k) + R_{1,k}, \ k = \overline{0, n}.$$

$$\varphi_2(x_k) = \int_a^b K(x_k, y, \varphi_1(y), \varphi_1(a), \varphi_1(b))dy + f(x_k) =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_k, a, \varphi_1(a), \varphi_1(a), \varphi_1(b)] + 2\sum_{i=1}^{n-1} K(x_k, x_i, \varphi_1(x_i), \varphi_1(a), \varphi_1(b)) +$$

$$+ K(x_k, b, \varphi_1(b), \varphi_1(a), \varphi_1(b))] + f(x_k) + R_{2,k} =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_k, a, \tilde{\varphi}_1(a) + R_{1,0}, \tilde{\varphi}_1(a) + R_{1,0}, \tilde{\varphi}_1(b) + R_{1,0}) +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n-1} K(x_k, x_i, \tilde{\varphi}_1(x_i) + R_{1,i}, \tilde{\varphi}_1(a) + R_{1,i}, \tilde{\varphi}_1(b) + R_{1,i}) +$$

$$+ K(x_k, b, \tilde{\varphi}_1(b) + R_{1,n}, \tilde{\varphi}_1(a) + R_{1,n}, \tilde{\varphi}_1(b) + R_{1,n})\Big] + f(x_k) + R_{2,k} =$$

$$= \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_k, a, \tilde{\varphi}_1(a), \tilde{\varphi}_1(a), \tilde{\varphi}_1(b)) + 2\sum_{i=1}^{n-1} K(x_k, x_i, \tilde{\varphi}_1(x_i), \tilde{\varphi}_1(a), \tilde{\varphi}_1(b)) +$$

$$+ K(x_k, b, \tilde{\varphi}_1(b), \tilde{\varphi}_1(a), \tilde{\varphi}_1(b))\Big] + f(x_k) + \tilde{R}_{2,k} = \tilde{\varphi}_2(x_k) + \tilde{R}_{2,k},$$

$$|\tilde{R}_{2,k}| \leqslant \frac{b-a}{2n} L(3|R_{1,0}| + 6\sum_{i=1}^{n-1} |R_{1,i}| + 3|R_{1,n}|) +$$

$$+ |R_{2,k}| \leqslant 3(b-a)LM_0 \frac{(b-a)^2}{12n^2} + M_0 \frac{(b-a)^3}{12n^2} = \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_0[3L(b-a) + 1].$$

Se continuă raţionamentul pt. $m = 3$ şi prin inducţie obţinem

$$\varphi_m(x_k) = \frac{b-a}{2n}\Big[K(x_k, a, \tilde{\varphi}_{m-1}(a), \tilde{\varphi}_{m-1}(a), \tilde{\varphi}_{m-1}(b)) +$$

$$+ 2\sum_{i=1}^{n-1} K(x_k, x_i, \tilde{\varphi}_{m-1}(x_i), \tilde{\varphi}_{m-1}(a), \tilde{\varphi}_{m-1}(b)) +$$

$$+ K(x_k, b, \tilde{\varphi}_{m-1}(b), \tilde{\varphi}_{m-1}(a), \tilde{\varphi}_{m-1}(b))] + f(x_k) + \tilde{R}_{m,k}, \quad k = \overline{0, n},$$

$$|\tilde{R}_{m,k}| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \cdot M_0 \cdot [3^{m-1}(b-a)^{m-1}L^{m-1} + \dots + 1], \quad k=\overline{0, n}.$$

Deoarece $1 < \frac{1}{3L(b-a)}$ sîntem în condiţiile teoremei de existenţă şi avem estimarea

$$|\tilde{R}_{m,k}| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2[1-3(b-a)L]} \cdot M_0$$

şi am obţinut astfel şirul $(\tilde{\varphi}_m(x_k))_{m\in N}$, $k = \overline{0, n}$, şir ce aproximează pe noduri şirul aproximaţiilor succesive $(\varphi_m)_{m\in N}$ cu eroarea

$$|\varphi_m(x_k) - \tilde{\varphi}_m(x_k)| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2[1-3(b-a)L]} \cdot M_0$$

Observaţie. În cazul în care

$$K(x, y, \varphi(y), \varphi(a), \varphi(b)) \equiv K(x, y, \varphi(y))$$

obţinem teoremele de existenţă şi unicitate date în [1] şi procedeul de aproximare revine la cel dat în [2] şi [3].

(Intrat în redacţie la 10 octombrie 1977)

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Coman, G. Pavel, I. Rus, I. A. Rus, *Introducere în teoria ecuaţiilor operatoriale*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1976.
2. P. Pavel, I. A. Rus, *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, Ed. did. şi ped., Bucureşti, 1975.
3. Garofiţa Pavel, *Rezolvarea aproximativă a problemei lui Dirichlet realativă la un sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul al doilea*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 1, 1977, 47–52.

THE APPROXIMATION OF THE SOLUTIONS OF INTEGRAL EQUATIONS WITH DELAY ARGUMENT

(Summary)

The paper contains several existence and unicity theorems for equation (1), using Banach's fixed-point theorem. Using the method of successive approximation and trapezoidal rule a method for the approximate solution of equation (1) is established.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

ASUPRA SPAŢIILOR CONFORM RECURENTE

ADRIANA MANŢIA şi PAVEL ENGHIŞ

1. **Preliminarii.** Fiind dat un spaţiu riemannian V_n de metrică

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1.1}$$

se numesc proprietăţi conforme ale spaţiului V_n acele proprietăţi care sînt invariante cînd se multiplică metrica printr-un factor oarecare, funcţie de variabilele $x^1, \ldots, x^n$.

H. Weyl [11] a arătat că studiul invarianţilor conformi ai unui spaţiu riemannian se poate face studiind invarianţii unei conexiuni afine determinată, abstracţie făcînd de un factor arbitrar. Această conexiune se determină impunînd condiţiile: să fie fără torsiune şi să conserve unghiurile. Din aceste condiţii rezultă:

$$\Gamma^i_{jk} = -[j^i k] + \delta^i_j \psi_k + \delta^i_k \psi_j - g_{jk}\psi^i \tag{1.2}$$

unde

$[j^i k]$ sînt simbolurile lui Christoffel de a doua speţă a metricii (1.1), iar ψ_i componentele unui vector covariant oarecare.

Calculînd componentele tensorului de curbură al acestei conexiuni obţinem o expresie care depinde de un vector covariant oarecare ψ_i. Eliminînd acest vector din expresia tensorului de curbură, obţinem:

$$\begin{aligned} W^h_{ijk} &= \Gamma^h_{ijk} - \frac{1}{n-2}(\Gamma_{ik}\delta^h_j - \Gamma_{ij}\delta^h_k + g_{ik}\Gamma^h_j - g_{ij}\Gamma^h_k) + \\ &+ \frac{\Gamma}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}) = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-2}(\delta^h_j R_{ik} - \delta^h_k R_{ij} + g_{ik}R^h_j - \\ &- g_{ij}R^h_k) + \frac{R}{(n-1)(n-2)}(\delta^h_j g_{ik} - \delta^h_k g_{ij}) \end{aligned} \tag{1.3}$$

unde $R_{ik} = R^h_{ihk}$ este tensorul lui Ricci, $R = g^{ik}R_{ik}$ este curbura scalară, iar $\Gamma_{ik} = \Gamma^h_{ihk}$ şi $\Gamma = g^{ik}\Gamma_{ik}$.

Cantităţile W^h_{ijk} constituie componentele tensorului de curbură conformă a lui Weyl. El se exprimă numai cu ajutorul tensorului de curbură, al tensorului lui Ricci şi curburii scalare. Deci, este independent de vectorul ψ_i.

Se ştie că tensorul W^h_{ijk} este definit numai pentru $n > 2$, pentru $n = 3$ este identic nul, iar tensorii săi contractaţi sînt de asemenea nuli.

Studiind condiţiile în care un spaţiu V_n admite o reprezentare conformă pe un spaţiu euclidian, se obţine:

$$W^h_{ijk}\psi_h + \frac{1}{n-2}V_{ijk} = 0 \tag{1.4}$$

unde

$$V_{ijk} = R_{ij,k} - R_{ik,j} + \frac{1}{2(n-1)}(g_{ik}R_{,j} - g_{ij}R_{,k}) \tag{1.5}$$

şi unde prin virgulă am notat derivarea covariantă în raport cu metrica (1.1).

Pentru cazul $n = 3$, condiţiile (1.4) devin $V_{ijk} = 0$ şi reprezintă condiţiile lui E. Cotton [2], pentru ca un spaţiu V_3 să admită o reprezentare conformă pe un spaţiu euclidian.

În cazul $n > 3$, ţinînd seama că, ψ_i este un vector arbitrar, condiţiile devin

$$W^h_{ijk} = 0 \quad \text{şi} \quad V_{ijk} = 0 \tag{1.6}$$

Al doilea grup de ecuaţii din (1.6) sînt o consecinţă a primelor, rezultat ce se poate verifica dacă se calculează derivata covariantă a tensorului lui Weyl, se contractă în h şi r şi se ţine seama de identitatea lui Bianchi, de asemenea contractată. Se obţine:

$$W^h_{ijk,h} + \frac{n-3}{n-2} V_{ijk} = 0 \tag{1.7}$$

din care rezultă teorema lui Schouten [8]:

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un spaţiu V_n să admită o reprezentare conformă pe un spaţiu euclidian este ca tensorul lui Weyl să fie nul.

Un spaţiu V_n de metrică (1.1) se spune că e recurent [10], sau de curbură recurentă, dacă există un vector covariant φ_r astfel încît să avem

$$R^h_{ijk,r} = \varphi_r R^h_{ijk}. \tag{1.8}$$

Dacă relaţia (1.8) se contractă în h şi j, se obţine

$$R_{ik,r} = \varphi_r R_{ik} \tag{1.9}$$

şi spaţiile care verifică (1.9) se numesc Ricci-recurente. Din modul cum s-a dedus (1.9), rezultă că un spaţiu recurent este şi Ricci-recurent, reciproca nefiind totdeauna valabilă [3], [6].

Dacă în (1.9) se aplică o nouă contracţie în i şi k, se obţine

$$R_{,r} = \varphi_r R \tag{1.10}$$

şi spaţiile V_n care verifică (1.10) se numesc de curbură scalară recurentă.

Dacă relaţia (1.8), $\varphi_r = 0$, spaţiul se numeşte simetric Cartan.

Considerînd acum tensorul de curbură proiectivă

$$P^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(R_{ik}\delta^h_j - R_{ij}\delta^h_k) \tag{1.11}$$

dacă avem

$$P^h_{ijk,r} = \lambda_r P^h_{ijk} \tag{1.12}$$

unde λ_r este un vector covariant, spaţiul se numeşte proiectiv recurent. Un spaţiu recurent, din (1.11) se vede că e şi proiectiv recurent, reciproca nefiind totdeauna verificată [5], [7]. Notînd

$$Z^h_{ijk} = R^h_{ijk} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}\delta^h_j - R_{ij}\delta^h_k + R^h_j g_{ik} - R^h_k g_{ij}) \tag{1.13}$$

tensorul de curbură coarmonică [4], numim spaţiu coarmonic recurent, un spaţiu V_n în care este verificată relaţia

$$Z^h_{ijk,r} = \alpha_r Z^h_{ijk} \tag{1.14}$$

2. **Spaţii Ricci.** Un spaţiu V_n, pentru care avem

$$R_{ij,r} = 0 \tag{2.1}$$

se numeşte spaţiu Ricci.

Din (2.1), contractînd în i şi j se obţine

$$R_{,r} = 0 \tag{2.2}$$

Deci avem

PROPOZIŢIA 2.1. *Un spaţiu Ricci este de curbură scalară constantă.*

Să considerăm un spaţiu Ricci cu 3 dimensiuni. Din (1.5), (2.1) şi (2.2) rezultă $V_{ijk} = 0$, şi deci

PROPOZIŢIA 2.2. *Spaţiile Ricci* ($n = 3$) *sînt conform plane.*

Fie acum un spaţiu Ricci V_n, $n > 3$. Din prop. 2.1 şi din (1.7) rezultă

$$W^h_{ijk,h} = 0 \tag{2.3}$$

Tot din prop. 2.1 şi din relaţiile (1.3), (1.11) şi (1.13) rezultă

$$W^h_{ijk,r} = R^h_{ijk,r} = P^h_{ijk,r} = Z^h_{ijk,r} \tag{2.4}$$

Avem deci

PROPOZIŢIA 2.3. *Într-un spaţiu Ricci* ($n > 3$), *derivata covariantă a tensorului de curbură coincide cu derivatele covariante ale tensorilor de curbură conformă, proiectivă şi coarmonică, iar contractatul în h şi r al derivatei covariante a tensorului de curbură conformă e nul.*

Observaţia 1. Din prop. 2.3 rezultă că un spaţiu Ricci ($n > 3$) este în acelaşi timp simetric, conform simetric, proiectiv simetric şi coarmonic simetric.

Observaţia 2. Un spaţiu Ricci conform plan e simetric Cartan.

Un spaţiu V_n pentru care

$$R_{ij} = 0 \tag{2.5}$$

se numeşte Ricci-special.

Contractînd (2.5) în i şi j rezultă $R = 0$. Avem

PROPOZIŢIA 2.4. *Spaţiile Ricci-speciale au curbura scalară nulă.*

Din (1.3), (1.11) şi (1.13) rezultă că într-un spaţiu Ricci-special avem

$$W^h_{ijk} = R^h_{ijk} = P^h_{ijk} = Z^h_{ijk} \tag{2.6}$$

Deci

PROPOZIȚIA 2.5. *Într-un spațiu Ricci-special, tensorul de curbură conformă coincide cu tensorul de curbură, cu tensorul de curbură proiectivă și cu tensorul de curbură coarmonică.*

Observație. Din prop. 2.5 rezultă că spațiile Ricci-speciale sînt în același timp simetrice, conform simetrice, proiectiv-simetrice și coarmonic simetrice. De asemenea sînt în același timp recurente, conform recurente, proiectiv și coarmonic recurente.

Să considerăm un spațiu Ricci-special conform plan, adică

$$W^h_{ijk} = 0 \tag{2.7}$$

Din (2.6) și (2.7) rezultă $R^h_{ijk} = 0$ și spațiu e euclidian. De aici:

PROPOZIȚIA 2.6. *Spațiile Ricci-speciale conform plane sînt spații euclidiene.*

3. **Spații conform recurente.** Un spațiu V_n pentru care avem

$$W^h_{ijk,r} = \varphi_r W^h_{ijk} \tag{3.1}$$

se numește conform recurent.

Din expresia lui W^h_{ijk}(1.3) rezultă că un spațiu recurent este și conform recurent.

Cu studiul spațiilor conform recurente s-a ocupat T. Adati și T. Miyazawa [1]. În cele ce urmează aducem cîteva precizări și completări la acest studiu.

Să observăm că un spațiu Einstein este un spațiu Ricci. Iar dacă este de curbură scalară nulă, el este un spațiu Ricci-special. Astfel, teorema (1.3) din lucrarea lor [1] poate fi reformulată astfel:

PROPOZIȚIA 3.1. *Pentru ca un spațiu Einstein conform recurent să fie recurent este necesar și suficient să fie un spațiu Ricci-special.*

În ce privește spațiile Ricci și spațiile Ricci-speciale observațiile cu privire la recurență și conform recurență au fost făcute în paragraful 2.

Să presupunem acum că spațiul V_n $n > 3$ are metrica definită și este Ricci-recurent de vector φ_r. Dacă spațiul e conform plan, atunci $W^h_{ijk} = 0$ și din (1.4) și (1.8) rezultă $R^h_{ijk,r} = \varphi_r R^h_{ijk}$ și spațiul este recurent, cu același vector de recurență. Deci avem

PROPOZIȚIA 3.2. *Condiția necesară și suficientă ca un spațiu conform plan să fie recurent este ca să fie cu metrică definită și Ricci-recurent, cu vector de recurență φ_r.*

Observație. Într-un spațiu V_n cu metrică definită și Ricci-recurent vectorul de recurență este dat de

$$\varphi_r = (\ln R)_{,r} \tag{3.2}$$

Într-adevăr, spațiul fiind Ricci-recurent, are loc (1.9) și fiind cu metrică definită putem contracta în i și k și rezultă (1.10). Din (1.10) rezultă (3.2).

Dacă acum spațiul V_n, cu metrică definită este conform recurent și Ricci-recurent cu același vector de recurență φ_r, din (1.3) și (3.1) rezultă (1.8), cu același vector φ_r.

PROPOZIȚIA 3.3. *Condiția necesară și suficientă ca un spațiu V_n cu metrică definită, conform recurent de vector φ_r să fie recurent, cu același vector de recurență, este ca să fie Ricci-recurent, de vector φ_r.*

Într-un spaţiu conform recurent şi Ricci-recurent, să considerăm relaţia (1.7), care se poate scrie

$$\varphi_h W^h_{ijk} + \frac{n-3}{n-2}\left[\varphi_k R_{ij} - \varphi_j R_{ik} + \frac{R\varphi_h}{2(n-1)}(g_{ik}\delta^h_j - g_{ij}\delta^h_k)\right] = 0 \tag{3.3}$$

În relaţia (3.3), înlocuind W^h_{ijk} cu expresia sa din (1.3), şi dînd factor comun pe φ_h se obţine:

$$\varphi_h A^h_{ijk} = 0 \tag{3.4}$$

unde

$$A^h_{ijk} = R^h_{ijk} - (R_{ik}\delta^h_j - R_{ij}\delta^h_k) - \frac{1}{n-2}(R^h_j g_{ik} - R^h_k g_{ij}) +$$

$$+ \frac{R}{2(n-2)}(g_{ik}\delta^h_j - g_{ij}\delta^h_k) \tag{3.5}$$

Din (3.4) rezultă

PROPOZIŢIA 3.4. *Intr-un spaţiu conform recurent şi Ricci-recurent vectorul de recurenţă este soluţie a sistemului* (3.4).

Sistemul (3.4) fiind liniar şi omogen, în raport cu componentele vectorului de conform recurenţă, pentru ca să admită soluţii diferite de soluţia banală trebuie ca rang $\| A^h_{ijk} \| < n$. Putem deci să enunţăm următoarea condiţie necesară:

PROPOZIŢIA 3.5. *O condiţie necesară ca un spaţiu V_n să fie în acelaşi timp conform recurent şi Ricci-recurent este ca rang* $\| A^h_{ijk} \| < n$.

Tensorul A^h_{ijk} definit de relaţiile (3.5) are următoarele proprietăţi:

1. $A^h_{ijk} = -A^h_{ikj}$, echivalent cu $A_{hijk} = -A_{hikj}$
2. $A_{hijk} \neq A_{ihjk}$ şi $A_{hijk} \neq A_{jkhi}$
3. $A^h_{ijk} + A^h_{jki} + A^h_{kij} = 0$

În spaţiile Ricci-speciale, $W^h_{ijk} = R^h_{ijk}$ şi $V_{ijk} = 0$, rezultă că tensorul A^h_{ijk} va avea aceleaşi proprietăţi ca şi tensorul de curbură.

În ceea ce priveşte tensorii contractaţi ai tensorului A^h_{ijk}, avem:

$A^h_{hjk} = 0$,

$A^h_{ihk} = A_{ik} = -\frac{(n-1)(n-3)}{n-2} R_{ik} + \frac{n-3}{2(n-2)} R g_{ik}$

T. Adati şi T. Miyazawa [1] au demonstrat că un spaţiu proiectiv recurent este şi conform recurent. Pentru a vedea reciproc în ce condiţii un spaţiu conform recurent este şi proiectiv recurent, să presupunem că în spaţiul V_n conform recurent are loc relaţia:

$$R_{ik,r} - \frac{1}{n} g_{ik} R_{,r} = \varphi_r \left(R_{ik} - \frac{1}{n} g_{ik} R\right) \tag{2.6}$$

Relația (3.6) o putem scrie sub forme echivalente:

$$(R_{,r} - \varphi_r R)g_{ik} = n(R_{ik,r} - \varphi_r R_{ik}) \tag{3.7}$$

$$n(R^i_{k,r} - \varphi_r R^i_k) = \delta^i_k(R_{,r} - \varphi_r R) \tag{3.8}$$

$$g_{kj}(R^i_{k,r} - \varphi_r R^i_k) = \delta^i_k(R_{kj,r} - \varphi_r R_{kj}) \tag{3.9}$$

Spațiul fiind conform recurent, avem relația (3.1). Înlocuind în (3.1) cu expresia lui W^h_{ijk} și derivata lui, ordonînd și folosind relațiile (3.6), (3.7), (3.8) și (3.9) obținem:

$$R^h_{ijk,r} - \frac{1}{n-1}(R_{ik,r}\delta^h_j - R_{ij,r}\delta^h_k) = \varphi_r\left[R^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(R_{ik}\delta^h_j - R_{ij}\delta^h_k)\right]$$

care, dacă ținem seama de (1.11) ne arată că spațiul este proiectiv recurent.

Relația (3.6), observăm că este verificată într-un spațiu proiectiv recurent, cu metrică definită, după cum rezultă din relația (1.12), prin înmulțire contractată cu g^{ij} și apoi schimbînd indicele h cu i.

Avem deci

PROPOZIȚIA 3.6. *O condiție necesară și suficientă pentru ca un spațiu V_n conform recurent cu metrică definită să fie proiectiv recurent, cu același vector de recurență, este ca relația* (3.6) *să aibă loc.*

Observație. Într-un spațiu Einstein, relația (3.6) fiind identitate rezultă

PROPOZIȚIA 3.7. *Orice spațiu Einstein conform recurent este și proiectiv recurent.*

În spațiul V_n, să considerăm tensorul de curbură coarmonică dat de relația (1.13). Contractînd în raport cu h și j se obține [4]:

$$Z_{ik} = -\frac{R}{n-2}g_{ik} \tag{3.10}$$

Tensorul de curbură conformă se poate scrie atunci sub forma:

$$W^h_{ijk} = Z^h_{ijk} - \frac{1}{n-1}(Z_{ik}\delta^h_j - Z_{ij}\delta^h_k) \tag{3.11}$$

Presupunînd spațiul V_n coarmonic recurent, adică

$$Z^h_{ijk,r} = \varphi_r Z^h_{ijk} \tag{3.12}$$

și contractînd în h și j, rezultă

$$Z_{ik,r} = \varphi_r Z_{ik} \tag{3.13}$$

în care, ținînd seama de (3.10), avem

$$R_{,r} = \varphi_r R \tag{3.14}$$

deci

PROPOZIȚIA 3.8. *Un spațiu V_n coarmonic recurent este de curbură scalară recurentă.*

Derivînd covariant relația (3.11) și ținînd seama de (3.12) și (3.13) rezultă $W^h_{ijk,r} = \varphi_r W^h_{ijk}$, deci

PROPOZIȚIA 3.9. *Orice spațiu V_n coarmonic recurent este conform recurent, cu același vector de recurență.*

Să vedem reciproc în ce condiții un spațiu V_n conform recurent este și coarmonic recurent. Spațiul fiind conform recurent, are loc (3.1). Înlocuind în (3.1) expresia lui W^h_{ijk} dată de (3.11) și ținînd seama de (3.10), obținem:

$$Z^h_{ijk,r} - \varphi_r Z^h_{ijk} = -\frac{1}{(n-1)(n-2)}(g_{ik}\delta^h_j - g_{ij}\delta^h_k)(R_{,r} - \varphi_r R)$$

din care rezultă că spațiul va fi coarmonic recurent dacă

$$R_{,r} - \varphi_r R = 0 \tag{3.15}$$

deci

PROPOZIȚIA 3.10. *Un spațiu V_n, cu metrică definită, conform recurent este coarmonic recurent dacă este de curbură scalară recurentă.*

Din (3.15) rezultă că vectorul φ_r de conform recurență este dat de

$$\varphi_r = (\ln R)_{,r} \tag{3.16}$$

Ținind seama de (3.16), prop. 3.9. poate fi formulată astfel:

PROPOZIȚIA 3.11. *Spațiile conform recurent cu vectorul de conform recurență φ_r dat de (3.16) sînt coarmonic recurente.*

(Intrat în redacție la 2 decembrie 1977)

BIBLIOGRAFIE

1. T. Adati and T. Miyazawa, *On a Riemannian space with recurrent conformal curvature*, Tensor, N.S., **18**, (1967) 3, 348–354.
2. E. Coton, *Sur les variétées a trois dimensions*, Ann. de la Fac. de Sci. de Toulouse, 1899, 410.
3. P. Enghiș, *Sur les espaces V_n récurrents et Ricci récurrents*, Studia, Univ. Babeș–Bolyai, Ser. Math-Mec. f. 1, 1972, 3–6.
4. I. Ishii, *On conharmonic transformations*, Tensor N. S. **7**, 2, 1957, 70–80.
5. M. Matsumoto, *On Riemannian spaces with recurrent projective curvature*, Tensor N.S. **19**, 1968, 11–18.
6. W. Roter, *Quelques remarques sur les espaces récurrents et Ricci-récurrents*, Bull. de l'Acad. Pol. de Sci X 10, 1962, 533–536.
7. P. Sandovici, P. Enghiș, M. Țarină, *Spații V_n de curbură proiectivă recurentă*, Studia, Univ. Babeș–Bolyai, Ser. Math-Phs., f. 1, 1969, 17–21.
8. J. A. Schouten, *Konforme Abbildung n-Dimensionaler Mannigfatingkeiten*, Math. Zachf. 11, 1921, 79–80.
9. G. Vrănceanu, *Lecții de geometrie diferențială*, vol. I și II, Ed. did. și ped., București, 1962–1964.
10. A. G. Walker, *On Ruse's spaces of recurrent curvature*, Proc. London Math. Soc. 2 (52), 1950, 36–64.
11. H. Weyl, *Zur Infinitesimalgeometrie*, Göttinger Nachrichten, 1921.

SUR LES ESPACES CONFORM-RÉCURRENTS

(Résumé)

Dans la première partie de ce travail on donne les relations et définitions nécessaires. Dans la seconde on donne les propriétés des espaces de Ricci $\left(R_{ij,r} = 0\right)$ et des espaces de Ricci-spéciaux, $\left(R_{ij} = 0\right)$. Dans la troisième on fait quelques précisions par rapport aux résultats de T. Adati et T. Myazawa [1] en ce qui concerne les espaces d'Einstein, les conditions pour qu'un espace conformément plan soit récurrent, les espaces conformément récurrents soient récurrents. On donne les systèmes (3, 4) qui sont vérifiés par les composants du vecteur φ de conform-récurrence. A cette occasion on donne une condition nécessaire pour qu'un espace V_n soit en même temps conform-récurrent et Ricci-récurrent. On donne ensuite la condition (36) nécessaire et suffisante pour qu'un espace conform-récurrent soit projectif-récurrent. On montre ensuite que les espaces coharmonique-récurrents (3, 12) sont conform-récurrents et réciproquement pour qu'un espace conform-récurrent soit coharmonique-récurrent il est nécessaire et suffisant que les relations (3.15) ou (3.16) aient lieu

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

STRUCTURĂ BIQUASIUNIFORMĂ INDUSĂ DE O G-QUASI-PSEUDOMETRICĂ

D. BORŞAN

1. Este cunoscut că unei quasi-pseudo-metrici, $\rho : X \times X \to R_+$, i se asociază simultan o topologie τ_ρ şi o quasi-uniformitate $\mathcal{U}_\rho$. Mai mult, topologia indusă de quasi-uniformitatea $\mathcal{U}_\rho$ coincide cu cea generată de quasi-pseudometrica ρ, adică cu τ_ρ. Se spune că tripletul $(X, \mathcal{U}_\rho, \tau_\rho)$ este un spaţiu quasi-uniform [3].

Aplicaţia $\rho^* : X \times X \to R_+$, definită prin $\rho^*(a, b) = \rho(b, a)$, pentru orice $(a, b) \in X \times X$, este de asemenea o quasi-pseudo-metrică, numită conjugata lui ρ. În definitiv putem spune că quasi-pseudo-metrică $\rho : X \times X \to R_+$, determină pe X atît o bitopologie $(\tau_\rho, \tau_{\rho^*})$ cît şi o biquasi-uniformitate $(\mathcal{U}_\rho, \mathcal{U}_{\rho^*})$, iar spaţiul bitopologic obţinut este un spaţiu biquasi-uniform, în sensul că cele două topologii τ_ρ şi τ_{ρ^*}, sînt induse de quasi-uniformităţi, anume de $\mathcal{U}_\rho$, respectiv $\mathcal{U}_{\rho^*}$ [3].

Prezenta lucrare îşi propune să arate că spaţiul bitopologic asociat unei quasi-pseudo-metrici generalizate, în sensul definiţiei date în [1], este un spaţiu biquasi-uniform.

2. Fie $(M, \leqslant)$ o mulţime parţial ordonată şi „$\preccurlyeq$" ordonarea definită în mod natural în $M \times M$ prin:

$$(a_1, b_1) \preccurlyeq (a_2, b_2) \Leftrightarrow a_1 \leqslant a_2 \text{ şi } b_1 \leqslant b_2, \text{ unde } a_1, b_1, a_2, b_2 \in M.$$

Considerăm o aplicaţie $\varphi : M \times M \to M$, satisfăcînd condiţiile

(φ_1) $$\varphi(a, b) = \varphi(b, a)$$

(φ_2) $$(a_1, b_1) \prec (a_2, b_2) \Rightarrow \varphi(a_1, b_1) < \varphi(a_2, b_2),$$

unde $a_1, b_1, a_2, b_2 \in M$.

În sfîrşit, fie $E \subseteq M$, cu proprietăţile:

(E_1) $$e_0 \in E,\ a \in M, \text{non } (e_0 \leqslant a) \Rightarrow \exists e \in E : \varphi(a, e) \leqslant e_0;$$

(E_2) $$(e_1, e_2) \in E \times E \Rightarrow \exists e \in E : (e, e) \preccurlyeq (e_1, e_2).$$

Prin g-quasi-pseudo-metrică pe X (prescurtat g-q.—p.— metrică pe X) înţelegem ([1]) o aplicaţie $\rho : X \times X \to M$, care verifică următoarele axiome:

(ρ_1) $$\rho(x, x) < e \text{ pentru orice } x \in X \text{ şi orice } e \in E;$$

(ρ_2) $$\rho(x, z) \leqslant \varphi[\rho(x, y), \rho(y, z)], \text{ pentru orice } x, y, z, \in X.$$

Cuplul (X, ρ) se numeşte spaţiu g-quasi-pseudo-metric. Mulţimea $B_\rho(x; e) = \{y \in X / \rho(x, y) < e\}$, unde $x \in X$ şi $e \in E$, se numeşte ρ-glob cu centrul în x şi de rază e.

În lucrarea [1], menţionată mai sus, se demonstrează că familia $\{B_\rho(x; e)/x \in X,\ e \in E\} \subseteq \mathfrak{P}(X)$ este o bază de topologie pe X. Topologia τ_ρ definită de această bază se numeşte topologia indusă de g-q.-p.-metrică ρ. Aplicaţia $\rho^* : X \times X \to M$, definită prin $\rho^*(x, y) = \rho(y, x)$, pentru orice $(x, y) \in X \times X$, este şi ea o g-q.-p.-metrică. ρ şi ρ^* se numesc g-q.-p.-metrici conjugate. Prin urmare, o g-q.-p.-metrică pe X, permite înzestrarea mulţimii X cu o structură de spaţiu bitopologic $(X, \tau_\rho, \tau_{\rho^*})$.

3. Fie acum $(M, \leqslant)$ o mulţime parţial ordonată, înzestrată cu o operaţie $\varphi : M \times M \to M$, cu proprietăţile (φ_1) şi (φ_2), iar $E \subseteq M$ satisfăcînd, pe lîngă condiţiile (E_1) şi (E_2), şi următoarea cerinţă

(E_3) $\quad \forall e \in E\ \exists\ e_1, e_2 \in E : \varphi(e_1, e_2) \leqslant e$

Considerăm o g-q.-p.-metrică $\rho : X \times X \to M$ şi notăm

$$U_{(\rho, e)} = \{(x, y) \in X \times X / \rho(x, y) < e\}.$$

TEOREMA 1. *Familia* $\mathfrak{B}_\rho = \{U_{(\rho, e)}/e \in E\} \subseteq \mathfrak{P}(X \times X)$ *este o bază de quasi-uniformitate pe* X.

Demonstraţie. Cum se cunoaşte (vezi de exemplu [3]) va fi suficient să arătăm că familia $\mathfrak{B}_\rho$ satisface următoarele condiţii:

(B_1) $\quad \Delta \subseteq U_{(\rho, e)}$, pentru orice $e \in E$ (unde $\Delta = \{(x, x)/x \in X\}$);

(B_2) $\quad e_1, e_2 \in E \Rightarrow \exists e \in E : U_{(\rho, e)} \subseteq U_{(\rho, e_1)} \cap U_{(\rho, e_2)}$;

(B_3) $\quad e \in E \Rightarrow \exists e' \in E : U_{(\rho, e')} \cdot U_{(\rho, e')} \subseteq U_{(\rho, e)}$.

Să arătăm acum că în adevăr $\mathfrak{B}_\rho$ se bucură de proprietăţile $(B_1) - (B_3)$.

Fie $e \in E$, arbitrar. Conform axiomei (ρ_1), oricare ar fi $x \in X$, avem $\rho(x, x) < e$, adică $(x, x) \in U_{(\rho, e)}$. Urmează că $\Delta \subseteq U_{(\rho, e)}$, pentru orice $e \in E$, deci $\mathfrak{B}_\rho$ satisface condiţia (B_1).

Fie acum $e_1, e_2 \in E$. În baza condiţiei (E_2), există atunci un element $e \in E$, astfel ca $e \leqslant e_1$ şi $e \leqslant e_2$.

Avem
$$U_{(\rho, e)} \subseteq U_{(\rho, e_1)} \cap U_{(\rho, e_2)}.$$

În adevăr, dacă $(x, y) \in U_{(\rho, e)}$, atunci $\rho(x, y) < e$, deci $\rho(x, y) < e_1$ şi $\rho(x, y) < e_2$; prin urmare $(x, y) \in U_{(\rho, e_1)} \cap U_{(\rho, e_2)}$. $\mathfrak{B}_\rho$ satisface aşa dar şi cerinţa (B_2).

În sfîrşit, fie $e \in E$. Conform condiţiei (E_3), există elementele $e_1, e_2 \in E$, astfel ca $\varphi(e_1, e_2) \leqslant e$. Pentru e_1 şi e_2 găsim, în baza cerinţei (E_2), un element $e' \in E$ astfel ca $e' \leqslant e_1$ şi $e' \leqslant e_2$. Vom arăta că $U_{(\rho, e')} \cdot U_{(\rho, e')} \subseteq U_{(\rho, e)}$. În acest scop, fie $(x, y) \in U_{(\rho, e')} \cdot U_{(\rho, e')}$. Înseamnă că există $z \in X$, astfel ca $(x, z) \in U_{(\rho, e')}$ şi $(z, y) \in U_{(\rho, e')}$; există deci $z \in X$, aşa încît $\rho(x, z) < e' \leqslant e_1$ şi $\rho(z, y) < e' \leqslant e_2$. Folosind condiţiile (ρ_3) şi (φ_2), urmează atunci $\rho(x, y) \leqslant \varphi[\rho(x, z), \rho(z, y)] < \varphi(e_1, e_2) \leqslant e$. Avem deci $\rho(x, y) < e$, adică $(x, y) \in U_{(\rho, e)}$, ceea ce trebuia arătat. Familia $\mathfrak{B}_\rho$ se bucură prin urmare, şi de proprietatea (B_3).

Vom nota quasi-uniformitatea generată de baza $\mathfrak{B}_\rho$ cu $\mathcal{U}_\rho$ adică ([3]), $\mathcal{U}_\rho = \{U \in \mathfrak{P}(X \times X) / \exists B \in \mathfrak{B}_\rho : B \subseteq U\} = \{U \in \mathfrak{P}(X \times X) / \exists e \in E : U_{(\rho, e)} \subseteq U\}$

şi o vom numi *quasi-uniformitate indusă de g-q.-p.-metrică* ρ. Această quasi-uniformitate U_ρ generează, la rîndul ei ([3]) o topologie pe X, anume topologia

$$\tau_{\mathcal{U}_\rho} = \{G \in \mathfrak{L}(X) / \forall x \in G \exists\ U \in \mathcal{U}_\rho : U[x] \subseteq G\}, \text{ unde}$$

$$U[x] = \{y \in X/(x, y) \in U\}.$$

TEOREMA 2. *Fie* $\rho : X \times X \to M$ *o g-q.-p.-metrică pe* X. *Atunci topologia generată de quasi-uniformitatea indusă de* ρ, *coincide cu topologia indusă de g-q.-p.-metrica* ρ.

Demonstraţie. Cu notaţiile introduse, trebuie să arătăm că $\tau_{\mathcal{U}_\rho} = \tau_\rho$. În acest scop, x fiind un element arbitrar din X. Vom arăta că familia ρ-globurilor cu centrul în x, $\{B_\rho(x; e)/e \in E\} \subseteq \mathfrak{L}(X)$, care este o bază de vecinătăţi pentru x relativ la topologia τ_ρ (deoarece τ_ρ admite ca bază familia $\{B_\rho(x; e)/x \in X, e \in E\}$) este de asemenea o bază de vecinătăţi pentru x şi relativ la topologia $\tau_{\mathcal{U}_\rho}$.

În adevăr, este cunoscut ([3]) că $\mathcal{B}_\rho$ fiind o bază pentru quasi-uniformitatea $\mathcal{U}_\rho$, familia $\{B[x]/B \in \mathcal{B}_\rho\}$, este o bază de vecinătăţi pentru punctul x, în spaţiul $(X, \tau_{\mathcal{U}_\rho})$, deci relativ la topologia generată de quasi-uniformitatea $\mathcal{U}_\rho$. Avem $\mathcal{B}_\rho = \{U_{(\rho, e)}/e \in E\}$, unde

$$U_{(\rho, e)} = \{(x, y) \in X \times X/\rho(x, y) < e\}.$$

Să observăm că

$$U_{(\rho, e)}[x] = \{y \in X/(x, y) \in U_{(\rho, e)}\} = \{y \in X/\rho(x, y) < e\} = B_\rho(x; e).$$

Deducem că $\tau_{\mathcal{U}_\rho} = \tau_\rho$, ceea ce era de demonstrat *.

Este cunoscut (vezi [3]) că, dacă $\mathcal{U}$ este o quasi-uniformitate pe X, atunci familia $\mathcal{U}^{-1} = \{U^{-1} | U \in \mathcal{U}\}$ este de asemenea o quasi-uniformitate pe X, numită *quasi-uniformitatea conjugată lui* $\mathcal{U}$. Dacă $\mathcal{B}$ este o bază pentru $\mathcal{U}$, atunci $\mathcal{B}^{-1} = \{B^{-1} | B \in \mathcal{B}\}$ este o bază pentru $\mathcal{U}^{-1}$. Două topologii τ_1 şi τ_2, pe o aceeaşi mulţime X, se zic topologii conjugate dacă ele sînt induse de quasi-uniformităţi conjugate.

TEOREMA 3. *Două g-q.-p.-metrici conjugate pe* X, *induc quasi-uniformităţi conjugate şi topologii conjugate.*

Demonstraţie. Fie $\rho : X \times X \to M$ o g-q.-p.-metrică şi $\rho^* : X \times X \to M$, g-q.-p.-metrica conjugată. Vom arăta că $\mathcal{U}_\rho^{-1} = \mathcal{U}_{\rho^*}$ şi că τ_ρ şi τ_{ρ^*} sînt topologii conjugate.

În adevăr, familia $\mathcal{B}_\rho = \{U_{(\rho, e)} | e \in E\}$ este, conform teoremei 1, bază pentru quasi-uniformitatea $\mathcal{U}_\rho$. Atunci $\mathcal{B}_\rho^{-1} = \{U_{(\rho, e)}^{-1} | e \in E\}$ este o bază pentru quasi-uniformitatea $\mathcal{U}_\rho^{-1}$ ([3]). Însă

$$U_{(\rho, e)}^{-1} = \{(y, x) \in X \times X | (x, y) \in U_{(\rho, e)}\} = \{(y, x) \in X \times X | \rho(x, y) < e\} =$$

$$= \{(y, x) \in X \times X | \rho^*(y, x) < e\} = U_{(\rho^*, e)}.$$

Urmează că $\mathcal{B}_\rho^{-1}$ este bază pentru $\mathcal{U}_{\rho^*}$ şi deci $\mathcal{U}_\rho^{-1} = \mathcal{U}_{\rho^*}$. Pe de altă parte, conform teoremei 2, avem $\tau_{\mathcal{U}_\rho} = \tau_\rho$ şi $\tau_{\mathcal{U}_{\rho^*}} = \tau_{\rho^*}$. Cum $\mathcal{U}_\rho$ şi $\mathcal{U}_{\rho^*}$ sînt quasi-uniformităţi conjugate, rezultă că τ_ρ şi τ_{ρ^*} sînt topologii conjugate. Cu aceasta teorema este demonstrată *.

Un triplet $(X, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2)$, unde $\mathcal{U}_1$ şi $\mathcal{U}_2$ sînt quasi-uniformităţi pe X, se numeşte *structură biquasi-uniformă*. Pentru un spaţiu bitopologic, în care cele două topologii sînt induse de quasi-uniformităţi se foloseşte termenul de *spaţiu-bi-quasi-uniform* (vezi [3]).

COROLAR (3.1.) *Orice g-q.-p.-metrică* $\rho : X \times X \to M$, *determină pe* X *o structură de spaţiu bi-quasi-uniform*.

Afirmaţia rezultă imediat din teorema 3, τ_ρ şi τ_{ρ^*} fiind induse respectiv de $\mathcal{U}_\rho$ şi $\mathcal{U}_{\rho^*}$ *.

COROLAR (3.2.) *Dacă* $\rho : X \times X \to M$ *este o g-q.-p.-metrică pe* X, *atunci spaţiul bitopologic* $(X, \tau_\rho, \tau_{\rho^*})$ *este reciproc complet regular.*

În adevăr, în [2] se stabileşte că dacă τ_1 şi τ_2 sînt topologii conjugate atunci (X, τ_1, τ_2) este reciproc complet regular. Afirmaţia din enunţ rezultă imediat dacă avem în vedere că τ_ρ şi τ_{ρ^*} sînt topologii conjugate, conform teoremei 3 *.

Menţionăm că studiul proprietăţilor de reciproc separaţie ale spaţiului bitopologic $(X, \tau_\rho, \tau_{\rho^*})$, determinat de o g-q.-p.-metrică $\rho : X \times X \to M$, face obiectul unei alte lucrări.

(Intrat în redacţie la 17 decembrie 1977)

BIBLIOGRAFIE

1. D. Borşan, *Bitopologii generate de o g-quasi-metrică*, Studia Univ. Babeş—Bolyai, Math., 2, 1977, 72—76.
2. E. P. Lane, *Bitopological spaces and quasi-uniform spaces*. Proc. London Math. Soc., 17, 1967, 241—256.
3. M. G. Murdeshwar, S. A. Naimpally, *Quasi-uniform topological spaces*, Noordhoff, Series A, Preprints of Research Papers No. 4, 2, 1966.

THE BIQUASIUNIFORM STRUCTURE INDUCED BY A G-QUASIPSEUDOMETRIC

(Summary)

It is proved that a *g*-quasipseudometric on X (in the sense given in [1]), determines on X a structure of biquasiuniform space.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

ON SOME MEASURES OF NONFUZZINESS

D. DUMITRESCU

In their program of building a thermodinamic-like calculus on fuzzy sets, A. De Luca and S. Termini (1972, 1974, 1976, 1977) have introduced and investigated various measures of fuzziness or entropies. In the context of the decision theory the entropy receives the natural interpretation as a measure of uncertainty in decision taking.

In this note a measure of nonfuzziness (energy) (Dumitrescu, 1977) of a fuzzy set defined on a finite support will be extended to L-fuzzy sets. In analogy with the fuzziness measure introduced by Knopfmacher (1975), we will give a nonfuzziness measure for fuzzy sets which are measurable as real-valued functions and are defined on an arbitrary set X with totally finite positive measure on a σ-algebra of subsets of X. We must note that we shall use the words "energy of a fuzzy set" with a meaning related to Onicescu's concept of informational energy (Onicescu, 1966), which differs from that of Capocelli and De Luca (1973).

Let us consider a set X and a lattice L.

DEFINITION 1. (Goguen, 1967), An L-fuzzy set on X is a map $f: X \to L$. X is called the carrier (or support) of f and L is called the truth set of f. If $L = I$, where I is the unit interval, we obtain the original definition of fuzzy sets (Zadeh, 1965).

Let $\mathfrak{L}(X, I)$ be the lattice of all fuzzy sets defined on X.

DEFINITION 2. A nonfuzziness measure on $\mathfrak{L}(X, I)$ is a non-negative functional $E: \mathfrak{L}(X, I) \to R$, such that the following properties are satisfied:

P1. $E(f)$ is minimum if and only if $f(x) = 1/2$ for all $x \in X$.

P2. $E(f)$ is maximum if and only if f is a sharp set on X (i.e. $f: X \to \{0, 1\}$).

P3. $E(f^*) \geqslant E(f)$, whenever f^* is a fuzzy set sharper than f, i.e. $f^*(x) \leqslant f(x)$ for $f(x) \leqslant 1/2$ and $f^*(x) \geqslant f(x)$ for $f(x) \geqslant 1/2$.

These properties are the natural requirements which must be satisfied by a measure of nonfuzziness, and are inspired from what De Luca and Termini (1972) have proposed for an "entropy" measure of a fuzzy set.

In a previous paper (Dumitrescu, 1977) a particular measure of the degree of nonfuzziness has been proposed. This measure has been called the "informational energy" of a fuzzy set because of the formal similitude with the informational energy introduced by Onicescu (1966) in the probabilistic context. In the following we will call this quantity the energy of fuzzy set.

Let us consider X finite, $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, and f a fuzzy set defined on X.

DEFINITION 3. The energy of the fuzzy set f is defined by

$$E_1(f) = \sum_{i=1}^{N} [f^2(x_i) + \bar{f}^2(x_i)],$$

where $\bar{f}(x) = 1 - f(x)$, for all $x \in X$.

PROPOSITION 1. *The functional E_1 satisfies the properties P1, P2, P3 and also:*

P4.
$$E_1(\bar{f}) = E_1(f).$$

P5. *E_1 is a valuation on the lattice $\mathfrak{L}(X, I)$, i.e.*

$$E_1(f \vee g) + E_1(f \wedge g) = E_1(f) + E_1(g) \text{ for all } f, g \in \mathfrak{L}(X, I), \text{ where}$$
$$(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x) = \max (f(x), g(x)),$$
$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x) = \min (f(x), g(x)).$$

A generalized nofuzziness measure of a fuzzy set defined on a finite support is given by the following statement.

PROPOSITION 2. *Let e be a function that satisfies:*
i) e is a strictly decreasing function on $[0, 1/2]$,
ii) $e(t) = e(1 - t)$, $t \in [0, 1]$.
The functional E_2 defined by

$$E_2(f) = \sum_{i=1}^{N} e(f(x_i)),$$

is a measure of nonfuzziness which satisfies P1 — P5.

Let us now consider an arbitrary set X and a measure space $(X, \mathcal{A}, \mu)$, where $\mathcal{A}$ is a σ-algebra of subsets of X and μ a totally finite positive measure on $\mathcal{A}$. We will consider only those fuzzy sets defined on X which are measurable as real-valued functions. We denote the class of these fuzzy sets by $\mathfrak{F}(X)$.

A nonfuzziness measure on $\mathfrak{F}(X)$ must satisfy the properties $P1^*$, $P2^*$ and $P3$, where $P1^*$ and $P2^*$ are:

$P1^*$. $E(f)$ is minimum if and only if $f(x) = 1/2$ almost everywhere in X.

$P2^*$. $E(f)$ is maximum if and only if f is sharp almost everywhere.

A measure of nonfuzziness on $\mathfrak{F}(X)$, inspired by the existence theorem of a measure of fuzziness (Knopfmacher, 1975), is given by

PROPOZITION 3. *The functional $E_3 : \mathfrak{F}(X) \to R$ defined by*

$$E_3(f) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X e(f(x)) d\mu(x),$$

where $f \in \mathfrak{F}(X)$ and the function e satisfies the conditions given in Proposition 2, is a measure of nonfuzziness which satisfies $P1^*$, $P2^*$, P3, P4 and P5.

Let us now consider an L-fuzzy set $f: X \to L$, where L is a lattice with the least element $0'$ and the greatest element $1'$. In order to give a measure of nonfuzziness for f we must define a map $h: L \to [0, 1]$. The unit interval is considered here as a lattice with respect to the operations

$$x \vee y = \max \{x, y\}, \qquad x \wedge y = \min \{x, y\}.$$

We must now mention some definitions about the mappings between lattices.

The map $\varphi : L_1 \to L_2$ from a lattice $(L_1, \leqslant)$ to a lattice $(L_2, \leqslant)$ is an isotone map (order preserving) if $a \leqslant b$ in L_1 implies that $\varphi(a) \leqslant \varphi(b)$ in L_2. A lattice homomorphism is a map that is both a join-homomorphism ($\vee$-homomorhpism) and a meet-homomorphism ($\wedge$-homomorphism). It is easy to prove that meet-homomorphisms, join-homomorphisms and lattice homomorphisms are all isotone.

The map $h : L \to [0, 1]$ must be at least an isotone map preserving the elements $0'$ and $1'$.

DEFINITION 4. The measure of nonfuzziness on $\mathfrak{L}(X, L)$ with respect to a map $h : L \to [0, 1]$, h being at least a isotone map preserving the least and the greatest element of L, is the functional $E_h : \mathfrak{L}(X, L) \to R$ defined by

$$E_h(f) = E(h \circ f),$$

where $E(h \circ f)$ is the measure of nonfuzziness of the fuzzy set $h \circ f$.

Of course, this definition makes sense only if $E(h \circ f)$ exists.

PROPOSITION 4. *If h is a lattice homomorphism then E_h is a valuation on the lattice $\mathfrak{L}(X, L)$, i.e.*

$$E_h(f \vee g) + E_h(f \wedge g) = E_h(f) + E_h(g), \text{ for all } f, g \in \mathfrak{L}(X, L).$$

Proof. Since h preserves $\vee$ we have

$$h \circ (f \vee g)(x) = h(f(x) \vee g(x)) = h(f(x)) \vee h(g(x)) = (h \circ f \vee h \circ g)(x)$$

for all $x \in X$, hence

$$h \circ (f \vee g) = h \circ f \vee h \circ g.$$

Similarly $h \circ (f \wedge g) = h \circ f \wedge h \circ g$ since h preserve and $\wedge$.

From Proposition 1 and the previous equalities we have

$$E(h \circ f) + E(h \circ g) = E(h \circ f \vee h \circ g) + E(h \circ f \wedge h \circ g) =$$

$$= E(h \circ (f \vee g)) + E(h \circ (f \wedge g)).$$

We must note that if we consider independent properties defined on a set X, then the nonfuzziness measure of the corresponding L-fuzzy set is a vector- valued measure.

(Received December 31, 1977)

REFERENCES

1. A. De Luca, S. Termini, *A definition of a non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets*, Information and Control **20**, 1972, 301–312.
2. A. De Luca, S. Termini, *Entropy of L-fuzzy sets*, Information and Control **24**, 1974, 55–73.
3. A. De Luca, S. Termini, *Una condizione necessaria e suficiente per le convergenza di un fuzzy set*, IV Congresso Nationale di Cibernetica e Biofisica, Siena, 1976.
4. A. De Luca, S. Termini, *On the convergence of the entropy measures of a fuzzy set*, Kybernetes, **6**, 1977, 219–227.
5. R. M. Capocelli, A. De Luca, *Fuzzy sets and decision theory*, Information and Control, **23**, 1973, 446–473.

6. J. Knopfmacher, *On measures of fuzziness*, J. Math. Anal. Appl., 49, 1975, 529–534.
7. O. Onicescu, *Energie Informationnelle*, C. A. R. Acad. Sci. Paris, 263, 22, 1966, 841–842.
8. D. Dumitrescu *A definition of an informational energy in fuzzy sets theory*, Studia Univ. Babeş-Bolyai, Math., 2, 1977, 57–59.

ASUPRA UNOR MĂSURI ALE GRADULUI DE NON-FUZZY

(Rezumat)

În această notă se introduc cîteva măsuri ale gradului de non-fuzzy pentru mulţimi vagi (fuzzy) şi se stabilesc unele proprietăţi ale acestor măsuri.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

ASUPRA APROXIMĂRII SOLUŢIEI PROBLEMEI LUI CAUCHY RELATIVĂ LA O ECUAŢIE DIFERENŢIALĂ LINIARĂ DE ORDINUL n

GAROFIŢA PAVEL

1. În această lucrare ne propunem să dăm o metodă de rezolvare a problemei lui Cauchy pentru o ecuaţie liniară cu coeficienţi variabili, de ordinul n, metodă care să fie adecvată utilizării calculatorului.

În lucrarea [2] a fost aplicată această metodă, în cazul ecuaţiei liniare de ordinul al doilea.

Fie problema lui Cauchy

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0 \\ &y(a) = y_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{1}$$

unde $p_1, \ldots, p_n \in C[a, b]$

Fie $\Delta: a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$ o diviziune, $x_i = x_0 + ih$, unde $h = \frac{b-a}{m}$.

Metoda folosită constă în a ataşa fiecărui interval $[x_{i-1}, x_i]$ $i = \overline{1, m}$, o problemă Cauchy relativă la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi, obţinută din (1) prin înlocuirea funcţiilor p_i cu valorile lor pe mijlocul intervalului corespunzător, adică

$$p_{ij} = p_i\left(\frac{x_{j-1} - x_j}{2}\right), \quad i = \overline{1, n}$$

iar condiţiile la limită sînt date de valorile soluţiei şi a derivatelor sale, corespunzătoare intervalului anterior, calculate în punctul X_{j-1}.

În felul acesta rezolvarea problemei (1) se reduce la rezolvarea a m probleme Cauchy, relative la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi.

Prima dintre aceste probleme, corespunzătoare intervalului $[x_0, x_1]$, este

$$y_1^{(n)} + p_{i1} y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n1} y_1 = 0 \tag{2}$$

$$y_1(x_0) = y_0, \ \ldots, \ y_1^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

unde

$$p_{i1} = p_i\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right), \quad i = \overline{1, n}$$

Fie y_1, soluţia acestei probleme. Cu ajutorul acesteia construim următoarea problemă Cauchy, relativă la intervalul $[x_1, x_2]$.

$$y_2^{(n)} + p_{i2} y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n2} y_2 = 0$$
$$y_2(x_1) = y_1(x_1),\ y_2'(x_1) = y_1'(x_1),\ \ldots,\ y_2^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)}(x_1) \tag{3}$$

unde

$$p_{i2} = p_i\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),\ i = \overline{1, n}$$

Notăm cu y_2 soluţia acestei probleme.

Continuînd în acest mod se obţine, pentru intervalul $[x_{m-1}, x_m]$, problema

$$y_m^{(n)} + p_{1m} y_m^{(n-1)} + \ldots + p_{nm} y_m = 0$$
$$y_m(x_{m-1}) = y_{m-1}(x_{m-1})\ ;\ y_m'(x_{m-1}) = y_{m-1}'(x_{m-1}),\ \ldots,\ y_m^{(n-1)}(x_{m-1}) = y_{m-1}^{(n-1)}(x_{m-1}) \tag{4}$$

unde

$$p_{im} = p_i\left(\frac{x_{m-1} + x_m}{2}\right),\ i = \overline{1, n}$$

a cărei soluţie se notează cu y_m.

Notăm cu $\bar{y}$, funcţia definită pe $[a, b]$, a cărei restricţie pe intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ este; y_i, $i = \overline{1, m}$.

Fie y soluţia unică a problemei (1). Urmînd procedeul din [1] se obţine estimarea :

$$\|y - \bar{y}\| \leqslant \varepsilon h e^{Lh} \frac{1 - e^{(b-a)L}}{1 - e^{hL}} \tag{5}$$

unde

$$L = \max\{1 + |p_1|, |p_2|, \ldots, |p_m|\}$$

şi

$$\varepsilon = \max\{\|p_j - p_{ji}\|\} \|y\|$$

Se observă că dacă $h \to 0$, $\bar{y} \rightrightarrows y$ şi deci putem considera pe $\bar{y}$ ca o aproximantă a lui y.

Calculul aproximantei $\bar{y}$ se face conform celor de mai sus, prin rezolvarea celor m probleme Cauchy, fiecare dintre ele fiind o problemă relativă la o ecuaţie de ordinul n cu coeficienţi constanţi.

Pentru rezolvarea ecuaţiilor caracteristice corespunzătoare acestor ecuaţii cu coeficienţi constanţi se foloseşte metoda lui Bairstow [3].

2. Explicităm în continuare metoda prezentată în cazul ecuaţiei de ordinul al treilea.

Fie ecuaţia

$$y''' + py'' + qy' + sy = 0$$
$$y(a) = y_0,\ y'(a) = y_0',\ y''(a) = y_0'' \tag{6}$$

unde

$$p, q, s \in C[a, b]$$

Considerăm $[a, b]$ şi-l împărţim în m părţi egale, atunci ecuaţia (6) cu coeficienţi funcţii se reduce pe fiecare subinterval la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi.

Notăm

$$x_i = a + ih, \quad i = \overline{0, m}, \quad h = \frac{b-a}{m}.$$

Problemei (6) i se ataşează atunci nişte probleme în care ecuaţia este o ecuaţie cu coeficienţi constanţi.

Pe $[x_{i-1}, x_i]$ problema devine

$$y_i''' + p_{1i}y_i'' + p_{2i}y_i' + p_{3i}y_i = 0$$

$$y_i^{(j)}(x_{i-1}) = y_{i-1}^{(j)}(x_{i-1}), \quad j = 0, 1, 2$$

unde

$$p_{1i} = p\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right), \; p_{2i} = q\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right); \; p_{3i} = s\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right); \; i = \overline{1, m}.$$

Asociem ecuaţia caracteristică

$$r^3 + p_{1i}r^2 + p_{2i}r + p_{3i} = 0$$

soluţiile căreia vor fi calculate cu metoda lui Bairstow [3]

În funcţie de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice vom avea următoarele cazuri:

a) Rădăcini reale şi distincte (r_1, r_2, r_3) caz în care

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + C_3e^{r_3x}$$

$$y_i^{(j)}(x_{i-1}) = y_{i-1}^{(j)}(x_{i-1}), \quad j = 0, 1, 2$$

Derivăm soluţia şi vom obţine un sistem de trei ecuaţii cu trei necunoscute C_1, C_2, C_3.

$$y(x) = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} + C_3e^{r_3x}$$

$$y'(x) = r_1C_1e^{r_1x} + r_2C_2e^{r_2x} + r_3C_3e^{r_3x}$$

$$y''(x) = r_1^2C_1e^{r_1x} + r_2^2C_2e^{r_2x} + r_3^2C_3e^{r_3x}$$

$$\begin{aligned} e^{r_1x_{i-1}}C_1 + e^{r_2x_{i-1}}C_2 + e^{r_3x_{i-1}}C_3 &= y_{i-1}(x_{i-1}) \\ r_1e^{r_1x_{i-1}}C_1 + r_2e^{r_2x_{i-1}}C_2 + r_3e^{r_3x_{i-1}}C_3 &= y_{i-1}'(x_{i-1}) \\ r_1^2e^{r_1x_{i-1}}C_1 + r_2^2e^{r_2x_{i-1}}C_2 + r_3^2e^{r_3x_{i-1}}C_3 &= y_{i-1}''(x_{i-1}) \end{aligned} \tag{7}$$

se rezolvă sistemul şi se obţine $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$, avem atunci soluţia

$$y(x) = \bar{C}_1 e^{r_1 x} + \bar{C}_2 e^{r_2 x} + \bar{C}_3 e^{r_3 x}$$

b) Rădăcini reale, dintre care una dublă $(r_1 = r_2 = r;\ r_3)$ în care caz avem

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{rx} + C_3 e^{r_3 x}$$

$$y_i^{(j)}(x_{i-1}) = y_{i-1}^{(j)}(x_{i-1}),\ j = 0, 1, 2,.$$

Procedînd ca mai sus obţinem

$$\begin{aligned} e^{rx_{i-1}}C_1 + x_{i-1}e^{rx_{i-1}}C_2 + e^{r_3 x_{i-1}}C_3 &= y_{i-1}(x_{i-1}) \\ re^{rx_{i-1}}C_1 + (1 + rx_{i-1})e^{rx_{i-1}}C_2 + r_3 e^{r_3 x_{i-1}}C_3 &= y'_{i-1}(x_{i-1}) \\ r^2 e^{rx_{i-1}}C_1 + (2r + r^2 x_{i-1})e^{rx_{i-1}}C_2 + r_3^2 e^{r_3 x_{i-1}}C_3 &= y''_{i-1}(x_{i-1}) \end{aligned} \tag{8}$$

Rezolvînd sistemul (8) obţinem $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$ şi avem soluţia

$$y(x) = (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 x)e^{rx} + \bar{C}_3 e^{r_3 x}$$

c) O rădăcină triplă $(r_1 = r_2 = r_3 = r)$. În acest caz

$$y(x) = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{rx}$$

$$y_i^{(j)}(x_{i-1}) = y_{i-1}^{(j)}(x_{i-1}),\ j = 0, 1, 2$$

de unde

$$\begin{aligned} e^{rx_{i-1}}C_1 + x_{i-1}e^{rx_{i-1}}C_2 + x_{i-1}^2 e^{rx_{i-1}}C_3 &= y_{i-1}(x_{i-1}) \\ re^{rx_{i-1}}C_1 + (1 + rx_{i-1})e^{rx_{i-1}}C_2 + (2x_{i-1} + rx_{i-1}^2)e^{rx_{i-1}}C_3 &= y'_{i-1}(x_{i-1}) \\ r^2 e^{rx_{i-1}}C_1 + (2r + r^2 x_{i-1})e^{rx_{i-1}}C_2 + (2 + 4rx_{i-1} + r^2 x_{i-1}^2)e^{rx_{i-1}}C_3 &= y''_{i-1}(x_{i-1}) \end{aligned} \tag{9}$$

Rezolvînd sistemul (9) obţinem $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$ şi avem soluţia

$$y(x) = (\bar{C}_1 + \bar{C}_2 x + \bar{C}_3 x^2)e^{rx}$$

d.) O rădăcină reală şi două complexe $(r_1 \in R,\ r_{2,3} = \alpha \pm i\beta)$ caz în care $y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 \cos \beta x e^{\alpha x} + C_3 \sin \beta x e^{\alpha x}$

$$y_i^{(j)}(x_{i-1}) = y_{i-1}^{(j)}(x_{i-1});\quad j = 0, 1, 2$$

şi obţinem sistemul

$$\begin{aligned} & e^{r_1 x_{i-1}}C_1 + e^{\alpha x_{i-1}} \cos \beta x_{i-1} C_2 + e^{\alpha x_{i-1}} \sin \beta x_{i-1} C_3 = y_{i-1}(x_{i-1}) \\ & r_1 e^{r_1 x_{i-1}}C_1 + (\alpha - \beta \sin \beta x_{i-1})e^{\alpha x_{i-1}}C_2 + (\alpha + \beta \cos \beta x_{i-1})e^{\alpha x_{i-1}}C_3 = y'_{i-1}(x_{i-1}) \\ & r_1^2 e^{r_1 x_{i-1}}C_1 + (\alpha^2 + \alpha\beta \sin \beta x_{i-1} - \beta^2 \cos \beta x_{i-1})e^{\alpha x_{i-1}}C_2 + \\ & + (\alpha^2 + \alpha\beta \cos \beta x_{i-1} - \beta^2 \sin \beta x_{i-1})e^{\alpha x_{i-1}}C_3 = y''_{i-1}(x_{i-1}) \end{aligned} \tag{10}$$

Fie $\bar{C}_1$, $\bar{C}_2$, $\bar{C}_3$ unica soluție a acestui sistem, atunci soluția problemei lui Cauchy de mai sus este

$$y(x) = \bar{C}_1 e^{r_1 x} + \bar{C}_2 e^{\alpha x} \cos \beta x + \bar{C}_3 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

3. *Exemplu.* Considerăm problema lui Cauchy

$$y''' + xy'' + e^x y' + x^3 y = 0, \quad x \in [-1, 1]$$

$$y(-1) = 1 \,;\; y'(-1) = 0, \quad y''(-1) = 0$$

Pentru diviziunea intervalului $[-1, 1]$ corespunzătoare modurilor: -1; $-0{,}5$; 0; $0{,}5$; 1; aplicînd metoda de mai sus se obține următoarea aproximantă pentru $\tilde{y}$

$$y = \begin{cases} 0 \cdot e^{0{,}8099x} + 2{,}2325 \cdot e^{0{,}0300x} \cos(0{,}7211x) - \\ \qquad - 2{,}2477 \cdot e^{0{,}0300x} \sin(0{,}7211x) \,; \; x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \\ 0{,}6748 \cdot e^{0{,}0202x} - 0{,}9273 \cdot e^{0{,}1149x} \cos(0{,}8723x) - \\ \qquad - 38{,}2651 \cdot e^{0{,}1149x} \sin(0{,}8723x) \,; \; x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right] \\ -1{,}2041 \cdot e^{-0{,}0122x} + 1{,}2364 \cdot e^{-0{,}1189x} \cos(1{,}1256x) + \\ \qquad + 66{,}0907 \cdot e^{-0{,}1189x} \sin(1{,}1256x) \,; \; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ -10{,}6869 \cdot e^{-0{,}2106x} + 9{,}9020 \cdot e^{-0{,}2697x} \cos(1{,}3895x) + \\ \qquad + 6{,}3880 \cdot e^{-0{,}2697x} \sin(1{,}3895x) \,; \; x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Calculele au fost efectuate cu ajutorul calculatorului Felix C—256.

(Intrat în redacție la 5 ianuarie 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. Garofița Pavel, *Contribuții la integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale* (teză de doctorat Cluj-Napoca), 1975.
2. Garofița Pavel, *Aproximarea soluției problemei Cauchy cu ajutorul calculatorului*, Mathematica Cluj-Napoca (sub tipar).
3. S. S. Kuo, *Computer Applications of Numerical Methods*, London Don Mills, Ontario, Ed. Addison-Wesly, 1966.

ON THE APPROXIMATIVE SOLUTION OF CAUCHY'S PROBLEM FOR A LINEAR DIFFERENTIABLE EQUATION OF ORDER n

(Summary)

In the present paper it is given an algorithm for the approximative of Cauchy's problem relatively to a linear and homogeneous equation with variable coefficients.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

ON ALMOST SEQUENTIAL LOCALLY CONVEX SPACES (I)

CSABA NÉMETHI

A topological space $(E, \mathcal{T})$ is called *sequential* if every subset G of E with the property that for any sequence (x_n) in E, $x_n \to x \in G$ imply $x_n \in G$ eventually, is open. These spaces have been studied by S. P. Franklin [5], S. Baron and S. Leader [2], S. Baron [1], A. R. Bednarek and J. Mikusiński [3], P. R. Meyer [7], F. Siwiec [10] and many others.

In this paper our concern are those locally convex spaces whose topology is determined in a certain sense by the (ordinary) null sequences. We call these spaces "almost sequential", and it turns out that they play the same role in the category of locally convex spaces as the sequential ones in the category of topological spaces. Our study is related to some papers of R. M. Dudley [4], A. Wilansky [12] and J. H. Webb [11], who have taken into discussion sequential properties of locally convex spaces.

Throughout the paper K will denote the field of real or complex numbers, endowed with its usual topology, and all vector spaces are assumed to be over K. In our terminology locally convex spaces need not be separated. Any sequence is indexed after the set $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

The reader is assumed to have some knowledge of Category Theory, including the relatively recent theory of coreflections (see for instance H. Herrlich and G. E. Strecker [6], or G. Preuβ [8]). We shall denote by LCS the the category of locally convex spaces. It is known that any nontrivial separated space is a generator for LCS, therefore a subcategory containing such a space is monocoreflective in LCS if it is coreflective.

1. General Properties and Characterizations of Almost Sequential Spaces. Let X be a vector space. If $\mathcal{T}$ is a locally convex topology on X, we shall denote by $c_0(\mathcal{T})$ the set of all $\mathcal{T}$-null sequences in X. Conversely, given a set $\mathcal{C}_0$ of sequences in X, let $\tau(\mathcal{C}_0)$ denote the locally convex topology on X which has as a neighborhood base of the origin the collection $\mathcal{B}(0)$ of all absolutely convex, absorbent subsets B of X with the property that $(x_n) \in \mathcal{C}_0$ and $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0$ imply $\lambda x_n \in B$ eventually. Obviously, an equivalent definition is obtained if λ varies only over an arbitrary cofinal subset of the interval $(0, +\infty)$.

In particular, if $\mathcal{C}_0$ is the set of all $\mathcal{T}$-null sequences for some linear topology $\mathcal{T}$ on X, then $\mathcal{B}(0)$ simply consists of all absolutely convex subsets B of X that contain the members of every $\mathcal{T}$-null sequence eventually, or, equivalently, intersect every $\mathcal{T}$-null sequence.

PROPOSITION 1.1. *$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ implies $c_0(\mathcal{T}) \subseteq c_0(\mathcal{T}')$, and $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}_0'$ implies $\tau(C_0) \supseteq \tau(C_0')$. In addition, $\mathcal{T} \subseteq \tau(c_0(\mathcal{T}))$ and $\mathcal{C}_0 \subseteq c_0(\tau(\mathcal{C}_0))$.*

In other words, the mappings $\mathcal{T} \mapsto c_0(\mathcal{T})$ and $\mathcal{C}_0 \mapsto \tau(\mathcal{C}_0)$ are the components of a Galois correspondence between the set of all locally convex topologies on X and the set of all sets of sequences in X, both ordered under inclusion.

Particularizing some general properties of Galois connexions we obtain

COROLLARY 1.2. *$\tau(\mathcal{C}_0) = \tau(c_0(\tau(\mathcal{C}_0)))$, and $\tau(\mathcal{C}_0)$ is the finest of all locally convex topologies $\mathcal{T}$ on X with the property that the members of $\mathcal{C}_0$ are $\mathcal{T}$-null sequences.*

A locally convex topology $\mathcal{T}$ on X and the space $(X, \mathcal{T})$ are said to be *almost sequential* if $\mathcal{T} = \tau(c_0(\mathcal{T}))$, i.e. if every absolutely convex subset of X that contains any $\mathcal{T}$-null sequence eventually (or, equivalently, meets any $\mathcal{T}$-null sequence), is a $\mathcal{T}$-neighborhood of the origin of X. By Corollary 1.2, $\mathcal{T}$ is almost sequential iff it is of the form $\tau(\mathcal{C}_0)$ for some set $\mathcal{C}_0$ of sequences in X. The term "almost sequential" is justified by the fact that any sequential locally convex space is also almost sequential.

Another consequence of Proposition 1.1, based upon a general property of Galois correspondences, is the following

COROLLARY 1.3. *$\tau(c_0(\mathcal{T}))$ is the coarsest of all almost sequential locally convex topologies on X that are finer than $\mathcal{T}$.*

$\tau(c_0(\mathcal{T}))$ will be called the *almost sequential modification* of $\mathcal{T}$. If $\mathcal{T}$ is Hausdorff, then so is its almost sequential modification, because of the relation $\mathcal{T} \subseteq \tau(c_0(\mathcal{T}))$.

Now let X, Y be vector spaces and $f\colon X \to Y$ a linear map. Suppose that $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}'$ are locally convex topologies on X and Y respectively, and $\mathcal{C}_0$, $\mathcal{C}_0'$ are sets of sequences on X and Y respectively. It is well-known what $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$*-continuity* of f means. f is called $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_0')$*-continuous* if $(x_n) \in C_0$ implies $(f(x_n)) \in \mathcal{C}_0'$.

PROPOSITION 1.4. a) *If f is $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-continuous, then it is also $(c_0(\mathcal{T}), c_0(\mathcal{T}'))$-continuous. Analogously, if f is $(\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_0')$-continuous, then it is also $(\tau(\mathcal{C}_0), \tau(\mathcal{C}_0'))$-continuous.*

b) *If $\mathcal{T}$ is almost sequential, then f is $(c_0(\mathcal{T}), c_0(\mathcal{T}'))$-continuous iff it is $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-continuous iff it is $(\mathcal{T}, \tau(c_0(\mathcal{T}')))$-continuous.*

c) *f is $(\tau(\mathcal{C}_0), \mathcal{T}')$-continuous iff it is $(\mathcal{C}_0, c_0(\mathcal{T}'))$-continuous.*

d) *f is $(c_0(\mathcal{T}), c_0(\mathcal{T}'))$-continuous iff it is $(\tau(c_0(\mathcal{T})), \mathcal{T}')$-continuous. Analogously, f is $(\tau(\mathcal{C}_0), \tau(\mathcal{C}_0'))$-continuous iff it is $(\mathcal{C}_0, c_0(\tau(\mathcal{C}_0')))$-continuous.*

Proof. a) is obvious.

b) Using the relation $\mathcal{T}' \subseteq \tau(c_0(\mathcal{T}'))$ and a), we obtain that $(\mathcal{T}, \tau(c_0(\mathcal{T}')))$-continuity implies $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-continuity, which in turn implies $(c_0(\mathcal{T}), c_0(\mathcal{T}'))$-continuity of f. On the other hand, if $\mathcal{T}$ is almost sequential and f is $(c_0(\mathcal{T}), c_0(\mathcal{T}'))$-continuous, then by a) it is also $(\tau(c_0(\mathcal{T})) = \mathcal{T}, \tau(c_0(\mathcal{T}')))$-continuous.

c) If f is $(\tau(\mathcal{C}_0), \mathcal{T}')$-continuous, then by a) it is $(c_0(\tau(\mathcal{C}_0)), c_0(\mathcal{T}'))$-continuous, hence also $(\mathcal{C}_0, c_0(\mathcal{T}'))$-continuous, because $\mathcal{C}_0 \subseteq c_0(\tau(\mathcal{C}_0))$. The reverse implication can be shown similarly.

d) is an easy consequence of c).

THEOREM 1.5. *A locally convex space $(X, \mathcal{T})$ is almost sequential iff for every locally convex space $(Y, \mathcal{T}')$, a linear map $f\colon X \to Y$ which is $(c_0(\mathcal{T}), c_0(\mathcal{T}'))$-continuous, is also $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-continuous.*

Proof. Necessity follows from Proposition 1.4. b). In order to prove sufficiency consider the space $(X, \tau(c_0(\mathcal{T})))$ and the identity map on X, which is $(c_0(\mathcal{T}), c_0(\tau(c_0(\mathcal{T}))))$-continuous, because, by the dual of Corollary 1.2, $c_0(\mathcal{T}) = c_0(\tau(c_0(\mathcal{T})))$ (one may alternately use Proposition 1.4. d)). By the hypothesis the identity map on X is $(\mathcal{T}, \tau(c_0(\mathcal{T})))$-continuous, i.e. $\tau(c_0(\mathcal{T})) \subseteq \mathcal{T}$. As the reverse inclusion is also true, we infer that $\mathcal{T}$ is almost sequential.

We shall denote by ASLCS the full subcategory of LCS whose objects are the almost sequential spaces.

THEOREM 1.6. *The category* ASLCS *is coreflective in* LCS: *given a locally convex space* $(X, \mathcal{T})$, *the identity map* 1_X, *as a morphism from* $(X, \tau(c_0(\mathcal{T})))$ *to* $(X, \mathcal{T})$, *is an* ASLCS-*coreflection for* $(X, \mathcal{T})$.

Proof. Clearly, $(X, \tau(c_0(\mathcal{T}))) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{ASLCS})$. Moreover, if $(Y, \mathcal{T}') \in \mathrm{Ob}(\mathrm{ASLCS})$ and $f: Y \to X$ is a linear map which is $(\mathcal{T}', \mathcal{T})$-continuous, then, by Proposition 1.4. b), f is $(\mathcal{T}', \tau(c_0(\mathcal{T})))$-continuous.

COROLLARY 1.7. ASLCS *is closed under the formation of extremal quotient objects (i.e. quotient spaces) in* LCS, *and for each category* $\mathfrak{I}$, ASLCS *is closed under the formation of* $\mathfrak{I}$-*colimits in* LCS.

A more general property is contained in

COROLLARY 1.8. ASLCS *is closed under inductive generations in* LCS, *i.e. if* $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ *is a family of almost sequential spaces,* Y *is a vector space, and for each* $i \in I$ $f_i : X_i \to Y$ *is a linear map, then the locally convex topology on* Y *inductively generated by the family* $\{(\mathcal{T}_i, f_i) : i \in I\}$ *is almost sequential.*

Proof. Although it is quite easy to prove this result directly, we shall indicate here another method, which has a purely categorical nature.

Let $1_Y : (Y, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T})$ be the ASLCS-coreflection for $(Y, \mathcal{T})$. We claim that $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$, i.e. 1_Y is $(\mathcal{T}, \mathcal{T}')$-continuous. Taking into account that $\mathcal{T}$ is inductively generated by the family $\{(\mathcal{T}_i, f_i) : i \in I\}$, the desired property of 1_Y is equivalent to the $(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}')$-continuity of each f_i, which in turn follows from the fact that $1_Y : (Y, \mathcal{T}') \to (Y, \mathcal{T})$ is an ASLCS-coreflection for $(Y, \mathcal{T})$.

2. Relations to Bornological Spaces. In this section we show that bornological spaces form a proper subclass of the class of almost sequential spaces.

PROPOSITION 2.1. *Let* $(X, \mathcal{T})$ *be a topological vector space,* Y *a balanced subset of* X *and* (α_n) *a sequence of strictly positive real numbers, with* $\alpha_n \to 0$. *Then the following three statements are equivalent:*

(a) Y *absorbs every bounded subset of* X;

(b) *for every* $\mathcal{T}$-*null sequence* (x_n), $\alpha_n x_n \in Y$ *eventually*;

(c) *for every* $\mathcal{T}$-*null sequence* (x_n), $\alpha_n x_n \in Y$ *for some* n.

Proof. (a) $\Rightarrow$ (b). Suppose Y absorbs every bounded subset of X, and let $x_n \to 0$ in X. Then $\{x_k : k \in N\}$ is a bounded set, hence by the hypothesis there exists a $\lambda_0 > 0$ such that $\lambda \in K$, $0 < |\lambda| \leqslant \lambda_0$ imply $\{\lambda x_k : k \in N\} \subseteq Y$. As $\alpha_n \to 0$, there exists an $n_0 \in N$ with $\alpha_n \leqslant \lambda_0$ for $n \geqslant n_0$. Then for every $n \in N$ with $n \geqslant n_0$ we have $\{\alpha_n x_k : k \in N\} \subseteq Y$, thus $\alpha_n x_n \in Y$.

(b) $\Rightarrow$ (c) is trivial.

(c) $\Rightarrow$ (a). Assuming that Y possesses property (c), let M be a bounded subset of X which is not absorbed by Y. Then for each $n \in N$ there exists a $z_n \in M$ with $\frac{\alpha_n}{n} z_n \notin Y$. Taking $x_n = \frac{1}{n} z_n$, $n \in N$, from the boundedness of M we infer that $x_n \to 0$, hence by the hypothesis $\alpha_n x_n = \frac{\alpha_n}{n} z_n \in Y$ for some n, which is a contradiction.

For practical purposes it is sufficient to take in this proposition $\alpha_n = \frac{1}{n}$, $n \in N$. This will be the case in the proofs of the next two theorems.

THEOREM 3.2 *Every bornological locally convex space is almost sequential.*

Proof. If $(X, \mathcal{T})$ is bornological and $B \subseteq X$ is an absolutely convex set which contains every $\mathcal{T}$-null sequence eventually, then B possesses property (b) from Proposition 3.1, or, equivalently, absorbs every bounded subset of X, hence it is a $\mathcal{T}$-neighborhood of the origin of X.

THEOREM 3.3. *Let $(X, ||\cdot||)$ be an infinite dimensional Banach space which possesses a Schauder basis, and let X^* denote its topological dual. Then the almost sequential modification of the topology $\sigma(X^*, X)$ on X^* fails to be bornological.*

Proof. We shall make use of some results concerning Schauder bases (see I. Singer [9], ch. I, § 3).

Let (b_n) be a Schauder basis of X and $(b_n^*)$the sequence of coefficient functionals associated with this basis. It is known that each b_n^* belongs to X^*. We may assume that

$$\sup \{||b_n|| : n \in N\} < +\infty \tag{1}$$

and

$$\inf \{||b_n|| : n \in N\} > 0 \tag{2}$$

(indeed, from any basis one can construct a normalized one).

From (1) it follows that

$$\inf \{||b_n^*|| : n \in N\} = r > 0.$$

Let

$$Y = \{x^* : x^* \in X^*, \ ||x^*|| < r\}.$$

Clearly, Y is an absolutely convex subset of X^*.

We shall show that Y absorbs every bounded subset of X^*. Here "bounded" is meant with respect to the almost sequential modification of $\sigma(X^*, X)$. However $\sigma(X^*, X)$ and its almost sequential modification have the same null sequences and hence the same bounded sets. By this observation and by Proposition 3.1 it will by sufficient to verify that $x_n^* \to 0$ with respect to $\sigma(X^*, X)$ implies $\frac{1}{n} x_n^* \in Y$ eventually. Using the Banach-Steinhaus Theorem, from $x_n^* \to 0$ in the sense of $\sigma(X^*, X)$ we infer that the set $\{||x_n^*|| : n \in N\}$ is bounded, hence $\frac{1}{n} ||x_n^*|| \to 0$, and so $\frac{1}{n} x_n^* \in Y$ eventually.

The proof will be complete if we show that Y is not a neighborhood of the origin of X^* with respect to the almost sequential modification of the topology $\sigma(X^*, X)$. Suppose on the contrary that Y contains an absolutely convex subset B of X^* which meets every null sequence. Again, "null sequence" may be meant in the sense of $\sigma(X^*, X)$. From (2) it follows that $b_n^* \to 0$ with respect to $\sigma(X^*, X)$, hence $b_n^* \in B \subseteq Y$ for some n, contradicting the definition of Y.

From this theorem one can obtain a lot of examples of non-bornological almost sequential spaces. It is sufficient to particularize the Banach space X, taking for instance any of the well-known spaces c_0, c, l^p, $C[0, 1]$, $L^p[0, 1]$ $(p \geq 1)$, which possess Schauder bases (see I. Singer [9], ch. I, § 2).

(Received January 18, 1978)

REFERENCES

1. Baron, S., *The coreflective subcategory of sequential spaces*, Canad. Math. Bull., **11**, 1968 603–604.
2. Baron, S. and Leader, S., *Sequential topologies*, Amer. Math. Monthly, **73**, 1966, 677–678.
3. Bednarek, A. R. and Mikusiński, J., *Convergence and topology*, Bull. Acad. Polon Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., **17**, 1969, 437–442.
4. Dudley, R. M., *On sequential convergence*, Trans. Amer. Math. Soc., **112**, 1964, 483–507.
5. Franklin, S. P., *Spaces in which sequences suffice*, Fund. Math., **57**, 1965, 107–115.
6. Herrlich, H. and Strecker, G. E., *Category Theory*, Allyn and Bacon Inc., Boston, 1973.
7. Meyer, P. R., *Sequential space methods in general topological spaces*, Colloq. Math., **22**, 1971, 223–228.
8. Preuß, G., *Allgemeine Topologie*, Springer, Berlin-Heidelberg- New York, 1972.
9. Singer, I., *Bases in Banach spaces*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
10. Siwiec, F., *Sequence-covering and countably bi-quotient mappings*, General Topology and Appl., **1**, 1971, 143–154.
11. Webb, J. H., *Sequential convergence in locally convex spaces*, Proc. Cambridge Philos. Soc., **64**, 1968, 341–364.
12. Wilansky, A., *Topics in Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 45, Springer, Berlin-Hiedelberg-New York, 1967.

DESPRE SPAŢII LOCAL CONVEXE APROAPE SECVENŢIALE (I)

(Rezumat)

Un spaţiu local convex se numeşte *aproape secvenţial* dacă orice submulţime absolut convex sa, care de la un rang în sus conţine toţi termenii oricărui şir obişnuit convergent către 0, ate o vecinătate a originii.

es Se stabilesc diverse proprietăţi ale acestor spaţii şi se arată că ele constituie o generalizare ectivă a spaţiilor bornologice.

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

A SINE LAW OF LIMB DARKENING FOR CLOSE BINARY SYSTEM COMPONENTS (I)
Partial eclipses

VASILE URECHE

1. **Introduction.** The light curve interpretation models of the close binary systems are usually based on the conventional linear cosine law of limb darkening (R u s s e l l, 1912; T s e s e v i c h, 1947; K o p a l, 1959; S h u l b e r g, 1971). The rise of the accuracy of photometric observations, by the use of the Orbital Astronomical Observatories and of the rapid photoelectric photometers imposes the construction of some new theoretical models, having more accuracy than the older ones.

From a paper of Pustylnik, the possibility of a limb darkening law containing a small sine term is suggested (P u s t y l n i k, 1970; U r e c h e, 1976). So, we shall suppose that the limb darkening law has the from

$$J = J_0(1 - u + u \cos \gamma - v \sin \gamma) \tag{1}$$

where the notations are usual. In the last term we shall consider that the coefficient v is a small quantity, constant (as a mean value) over the star disk, for a given spectral range.

2. **Partial eclipses.** We shall study the influence of the sine term from the law (1) on the light curves of the close binary stars, in the case of the partial eclipses. Let be the distortions of the stars so small, that for the geometry of the eclipses we can approximate the two stars by two spheres. The loss of the light during the eclipses is given by

$$\Delta L = \int_{\Sigma} J \cos \gamma \, d\sigma \tag{2}$$

where Σ is that region from the visible hemisphere of the eclipsed component, which is actually eclipsed at a given time.

Introducing the law (1) in the integral (2), we shall compute the variation in the loss of light corresponding to the sine term, with respect to the loss of light given by the conventional cosine law. Taking into account that $d\sigma \cos \gamma = dxdy$ is the element of area in the plane perpendicular to the line of sight, we obtain

$$-\delta(\Delta L) = J_{01} v_1 \int_{\Sigma} \sin \gamma \cos \gamma d\sigma = J_{01} v_1 \iint_{D} \sin \gamma \, dx \, dy \tag{3}$$

where the domain D is the projection of Σ in this plane.

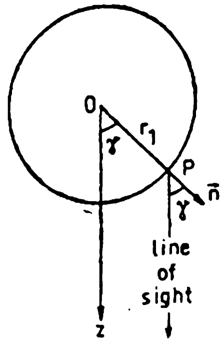

Fig. 1.

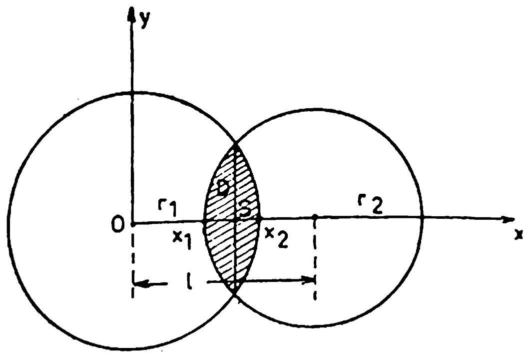

Fig. 2.

We shall use the index 1 for the eclipsed star and the index 2 for the eclipsing star. From fig. 1, where 0 is the centre of the eclipsed star and Oz-axis is the line of sight, for the point $P(x, y, z)$ we have

$$\sin \gamma = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_1} \tag{4}$$

where x, y are the coordonates in the plane perpendicular to the line of sight (as in fig. 2). The projections of the components on the plane perpendicular to the line of sight will be two circles, having the equations

$$x^2 + y^2 = r_1^2, \quad (x - l)^2 + y^2 = r_2^2 \tag{5}$$

where l is the apparent distance of the component centres. This, as well as the star radii r_1, r_2 are expressed as fractions of the orbital radius. The expression of l as function of phase angle θ and of inclination angle i is (Kopal, 1959; Tsesevich, 1947)

$$l^2 = 1 - \sin^2 i \cos^2 \theta \tag{6}$$

The integration domain D in (3) is delimited by the circles (5) (fig. 2). For the evaluation of the integral (3) it is necessary to know the integration limits x_1, x_2 of x and $y_1(x)$, $y_2(x)$ of y. In order to explain these limits we shall consider separately the partial eclipses, the total eclipses and the annular eclipses. In this paper we deal with the partial eclipses.

The integration limits for x are in this case

$$x_1 = l - r_2, \quad x_2 = r_1 \tag{7}$$

The integration limits for y have different expressions on the interval $[x_1, s]$ and on $[s, x_2]$, where from (5) we have for s (see fig. 2)

$$s = \frac{r_1^2 + l^2 - r_2^2}{2l}, \qquad l \geq |r_1 - r_2| \tag{8}$$

So, for $x \in [x_1, s]$, from (5) we have

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{r_2^2 - (x-l)^2}, \tag{9}$$

while for $x \in [s, x_2]$ we have

$$y_{1,2} = \pm\sqrt{r_1^2 - x^2} \tag{10}$$

If we use the substitution

$$y = x \text{ sh } \xi \tag{11}$$

from (3) and (4) we obtain

$$-\delta(\Delta L) = \frac{1}{2} J_{01} \frac{v_1}{r_1} \int_{x_1}^{x_2} x^2 [K(\xi_2(x)) - K(\xi_1(x))]\, dx \tag{12}$$

where

$$K(\xi(x)) = \xi(x) + \text{ch } \xi(x) \text{ sh } \xi(x) \tag{13}$$

and where

$$\xi_1(x) = \text{Arsh} \frac{y_1(x)}{x}, \quad \xi_2(x) = \text{Arsh} \frac{y_2(x)}{x} \tag{14}$$

From the formulae (9)—(14) we have

$$-\delta(\Delta L) = \frac{J_{01}v_1}{r_1} \left\{ \int_{l-r_2}^{s} x^2 \left[\text{Arsh} \frac{\sqrt{r_2^2 - (x-l)^2}}{x} + \frac{\sqrt{r_2^2 - (x-l)^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt{r_2^2 - l^2 + 2lx}}{x} \right] dx + \right.$$

$$\left. + \int_{s}^{r_1} x^2 \left[\text{Arsh} \frac{\sqrt{r_1^2 - x^2}}{x} + \frac{\sqrt{r_1^2 - x^2}}{x} \cdot \frac{r_1}{x} \right] dx \right\} = \frac{J_{01}v_1}{r_1} [I_1 + I_2 + I_3 + I_4] \tag{15}$$

where

$$I_1 = \int_{s}^{r_1} x^2 \text{ Arsh} \frac{\sqrt{r_1^2 - x^2}}{x}\, dx \tag{16}$$

$$I_2 = \int_{s}^{r_1} r_1 \sqrt{r_1^2 - x^2}\, dx \tag{17}$$

$$I_3 = \int_{l-r_2}^{s} x^2 \text{ Arsh} \frac{\sqrt{r_2^2 - (x-l)^2}}{x}\, dx \tag{18}$$

$$I_4 = \int_{l-r_2}^{s} \sqrt{r_2^2 - (x-l)^2} \sqrt{r_2^2 - l^2 + 2lx}\, dx \tag{19}$$

The integrals I_1 and I_2 can be computed easily, obtaining

$$I_1 = -\frac{s^3}{3}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\sqrt{r_1^2 - s^2}}{s} + \frac{r_1^2}{6}\left[\arcsin\frac{\sqrt{r_1^2 - s^2}}{r_1} + \frac{s\sqrt{r_1^2 - s^2}}{r_1^2}\right] \tag{20}$$

$$I_2 = \frac{r_1^2}{2}\left[\arcsin\frac{\sqrt{r_1^2 - s^2}}{r_1} - \frac{s\sqrt{r_1^2 - s^2}}{r_1^2}\right] \tag{21}$$

The integral I_3 can be put in the form

$$I_3 = \frac{s^3}{3}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\sqrt{r_1^2 - s^2}}{s} + \frac{1}{3}I_3' \tag{22}$$

where

$$I_3' = \int\limits_{l-r_1}^{s} \frac{x^2}{(r_1^2 - l^2 + 2lx)^{1/2}} \cdot \frac{lx - (l^2 - r_2^2)}{(r_2^2 - (x - l)^2)^{1/2}}\,dx \tag{23}$$

This last integral can be expressed with the help of the elliptic integrals. Indeed we have

$$I_3' = \frac{l}{\sqrt{2l}}\mathcal{J}_3 - \frac{l^2 - r_2^2}{\sqrt{2l}}\mathcal{J}_2 \tag{24}$$

where

$$\mathcal{J}_n = \int\limits_b^s \frac{x^n}{\sqrt{(a - x)(x - b)(x - c)}}\,dx\,;\; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{25}$$

and where

$$a = l + r_2,\quad b = l - r_2,\; c = \frac{l^2 - r_1^2}{2l} \tag{26}$$

$$c < b < s < a$$

For the computation of the integrals $\mathcal{J}_n$ we have the recurrence formula (Călugăreanu, 1963)

$$s^{n-2}\sqrt{P(s)} = \left(n - \frac{1}{2}\right)a_0\mathcal{J}_n + (n - 1)a_1\mathcal{J}_{n-1} + \left(n - \frac{3}{2}\right)a_2\mathcal{J}_{n-2} + \\ + (n - 2)\,a_3\mathcal{J}_{n-3},\ \text{for } n \geqslant 2 \tag{27}$$

in which we have noted

$$P(x) \equiv a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 \tag{28}$$

the polynomial which enters under the radical in (25). Its coefficients are

$$a_0 = -1,\quad a_1 = \frac{5l^2 - r_1^2}{2l},\; a_2 = -2(l^2 - r_2^2),\quad a_3 = \frac{(l^2 - r_2^2)^2}{2l} \tag{29}$$

Applying successively the recurrence formula (27) we obtain

$$\mathcal{J}_2 = \frac{2}{3} a_1 \mathcal{J}_1 + \frac{1}{3} a_2 \mathcal{J}_0 - \frac{2}{3} \sqrt{P(s)} \tag{30}$$

$$\mathcal{J}_3 = \frac{8a_1^2 + 9a_2}{15} \mathcal{J}_1 + \frac{4a_1a_2 + 6a_3}{15} \mathcal{J}_0 - \frac{6s + 8a_1}{15} \sqrt{P(s)} \tag{31}$$

in which we have

$$\mathcal{J}_0(s) = \int_b^s \frac{dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} F(\varphi, \varkappa) \tag{32}$$

$$\mathcal{J}_1(s) = \int_b^s \frac{x\,dx}{\sqrt{(a-x)(x-b)(x-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} [(b-c)\Pi(\varphi, \varkappa^2, \varkappa) + cF(\varphi, \varkappa)] \tag{33}$$

where $F(\varphi, \varkappa)$ and $\Pi(\varphi, \varkappa^2, \varkappa)$ are the elliptic integrals of the I-st and of the III-rd kinds, that is (G r a d s t e i n, R y z h i k, 1962)

$$F(\varphi, \varkappa) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} \tag{34}$$

$$\Pi(\varphi, \eta, \varkappa) = \int_0^{\sin\varphi} \frac{dx}{(1+\eta x^2)\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)}} \tag{35}$$

In the integrals (34), (35) the argument φ which is a function of time t through the phase angle $\theta = (2\pi/P_{\mathrm{orb}})(t - t_0)$, and the parameters $\varkappa$ and η are given by the expressions

$$\left.\begin{aligned} 0 \leqslant \sin^2\varphi &= \frac{(l+r_2)^2}{4lr_2} \cdot \frac{r_1^2 - (l-r_2)^2}{r_1^2} \leqslant 1 \\ 0 \leqslant \varkappa^2 &= \frac{4lr_2}{(l+r_2)^2} \leqslant 1, \quad \eta = \varkappa^2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{for} \\ &|r_1 - r_2| < l < r_1 + r_2 \end{aligned} \tag{36}$$

Introducing the expressions (32), (33) in (30), (31) and taking into account the value (26) of the coefficients a, b, c and (29) of the coefficients a_i $(i = 0, 3)$ we obtain

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{l-r_2}{l\sqrt{l}} \left[\frac{(l-r_2)(5l^2 - r_2^2)}{l+r_2} \Pi(\varphi, \varkappa^2, \varkappa) + (l^2 - r_2^2)F(\varphi, \varkappa)\right] - \\ - \frac{2}{3}\sqrt{[(l+r_2) - s][s - (l-r_2)]\left[s - \frac{l^2 - r_2^2}{2l}\right]} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 = \frac{2\sqrt{2}}{15} \cdot \frac{(l-r_2)^2}{l^2\sqrt{l}} \left[\frac{16l^4 - l^2r_2^2 + r_2^4}{l+r_2} \Pi(\varphi, \varkappa^2, \varkappa) - (l+r_2)(l^2 + r_2^2)F(\varphi, \varkappa)\right] - \\ - \frac{2}{15}\left(3s + \frac{10l^2 - 2r_2^2}{l}\right)\sqrt{[(l+r_2) - s][s - (l-r_2)]\left[s - \frac{l^2 - r_2^2}{2l}\right]} \end{aligned} \tag{38}$$

Then the expression (24) becomes

$$I_3' = \frac{1}{15}\cdot\frac{(l-r_2)^2}{l^2}\left[\frac{7l^4+28l^2r_2^2-3r_2^4}{l+r_2}\Pi(\varphi, \varkappa^2, \varkappa) - (l+r_2)(7l^2-3r_2^2)F(\varphi, \varkappa)\right]$$

$$-\frac{\sqrt{2l}}{15}\left(3s+\frac{15l^2-7r_2^2}{l}\right)\sqrt{[(l+r_2)-s][s-(l-r_2)]\left[s-\frac{l^2-r_2^2}{2l}\right]} \tag{39}$$

Therefore the integral I_3 has the expression

$$I_3 = \frac{s^3}{3}\,\mathrm{Arsh}\,\frac{\sqrt{r_1^2-s^2}}{s} + \frac{1}{45}\cdot\frac{(l-r_2)^2}{l^2}\left[\frac{7l^4+28l^2r_2^2-3r_2^4}{l+r_2}\Pi(\varphi, \varkappa^2, \varkappa) - \right.$$

$$\left. -(l+r_2)(7l^2-3r_2^2)F(\varphi, \varkappa)\right] -$$

$$-\frac{\sqrt{2l}}{45}\left(3s+\frac{15l^2-7r_2^2}{l}\right)\sqrt{[(l+r_2)-s][s-(l-r_2)]\left[s-\frac{l^2-r_2^2}{2l}\right]} \tag{30}$$

In a similar way, for the integral I_4 we obtain

$$I_4 = \frac{1}{15}\cdot\frac{(l-r_2)^2}{l^2}\left[\frac{l^4+14l^2r_2^2+r_2^4}{l+r_2}\Pi(\varphi, \varkappa^2, \varkappa) - (l+r_2)(l^2+r_2^2)F(\varphi, \varkappa)\right] +$$

$$+\frac{\sqrt{2l}}{15}\left(6s-\frac{5l^2-r_2^2}{l}\right)\sqrt{[(l+r_2)-s][s-(l-r_2)]\left[s-\frac{l^2-r_2^2}{2l}\right]} \tag{41}$$

If we put $-1 \leqslant \sin\psi = s/r_1 \leqslant 1$, where s is given by (8), from the equations (15), (20), (21), (40), (41) we obtain for the variation of the loss of light (which occurs because of the term in $\sin\gamma$ in limb darkening law), the expression

$$-\delta(\Delta L) = J_{01}v_1\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\psi\right) - \frac{1}{9}\cdot\frac{3l^2-r_2^2}{l^2}\sqrt{[(r_1+r_2)^2-l^2][l^2-(r_1-r_2)^2]} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{9}\cdot\frac{(l-r_2)^2}{r_1(l+r_2)}\left[(l^2+7r_2^2)\Pi(\varphi, \varkappa^2, \varkappa) - (l+r_2)^2F(\varphi, \varkappa)\right]\right\}$$

$$\text{for } |r_1-r_2| < l < r_1+r_2 \text{ — partial eclipses.} \tag{42}$$

Therefore the loss of the light given by the usual cosine law must be corrected in the considered case with the quantity $\delta(\Delta L)$ given by the equation (42). If the component 2 is eclipsed, then the loss of the light will also be given by the expression (42), with the condition to interchange the index 1 with 2.

The case of the total and annular eclipses will be studied in a further paper. We observe here that the loss of the light due to the sine term in the limb darkening law contains the elliptic integrals of the I-st and III-rd kinds, while for the conventional cosine law this loss of light contains the elliptic integrals of the I-st and II-nd kinds.

(Received January 20, 1978)

REFERENCES

1. Călugăreanu, G., *Elemente de teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Ed. did. şi ped. Bucureşti, 1963.
2. Gradstein, I. S., Ryzhik, I. M., *Tablitsy integralov, summ, rjadov i proizvedenii*", Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoj literatury, Moskva, 1962.
3. Kopal, Z., *Close Binary Systems*, Chapman and Hall, London, 1959.
4. Pustylnik, I., Izvestija Akademii Nauk ESSR (Fizika — Matematika) **19**, 1970, 428.
5. Russell, H. N., Astrophysical J. **35**, 315, 1912, **36**, 54.
6. Shul'berg, A. M., *Tesnye dvojnye zvezdnye sistemy s sharovymi komponentami*, Izdatel'stvo „Nauka", Moskva, 1971.
7. Tsesevich, V. P. et al., *Metody izuchenija permennykh zvezd*, OGIZ, Moskva — Leningrad, 1947.
8. Ureche, V., Contrib. Astr. Obs. Cluj-Napoca, 1976, p. 13.

O LEGE SINUSOIDALĂ DE ÎNTUNECARE SPRE MARGINE PENTRU COMPONENTELE SISTEMELOR BINARE STRÎNSE (I)

Eclipse parţiale

(Rezumat)

Această lucrare se ocupă cu influenţa unui posibil termen sinusoidal în legea de întunecare spre margine, asupra curbelor de lumină ale stelelor binare strînse. Se studiază cazul eclipselor parţiale. Rezultatul se exprimă în funcţie de integralele eliptice de speţa I şi a III-a

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

ASUPRA ALURII UNOR FUNCŢII HIPERBOLICE

LIANA LUPŞA

1. Fie R^n spaţiul vectorial real n dimensional, iar c, d şi e trei elemente date ale spaţiului R^n, d diferit de vectorul nul. Se consideră mulţimea:

$$E = \{x \in R^n | d^T x \neq 0\}$$

şi funcţia $f: E \to R$ definită prin

$$f(x) = c^T x + (e^T x)(d^T x)^{-1} \tag{1}$$

oricare ar fi $x \in E$. Se mai notează cu

$$\begin{aligned} E_1 &= \{x \in E | c^T x \geqslant 0,\ d^T x > 0\}, \\ E_2 &= \{x \in E | c^T x \leqslant 0,\ d^T x > 0\}, \\ E_3 &= \{x \in E | c^T x \leqslant 0,\ d^T x < 0\}, \\ E_4 &= \{x \in E | c^T x \geqslant 0,\ d^T x < 0\}, \\ E^+ &= E_1 \cup E_2, \\ E^- &= E_3 \cup E_4. \end{aligned}$$

În lucrare se studiază alura funcţiei f pe o submulţime Ω a lui E de forma

$$\Omega = \{x \in R^n | Ax \leqslant b\}, \tag{2}$$

unde A este o matrice de numere reale de tip (m, n), iar b un element din R^m de tipul $(m, 1)$. Rezultatele obţinute completează cercetările mai multor matematicieni. Astfel un studiu al comportării funcţiei f pe Ω a mai fost făcută în 1969 de către Teterev A. G. [7], care a remarcat şi importanţa practică deosebită pe care o are un asemenea studiu. Funcţia care dă sporul fondului de salarii şi rentabilitatea într-o întreprindere are forma (1), iar restricţiile sînt de forma (2). Teterev A. G. [7, teorema 1] demonstrează următoarele:

TEOREMA 1. *Dacă $\Omega \subset E_1$ (respectiv $\Omega \subset E_2$), atunci funcţia f definită prin (1) se bucură de următoarele proprietăţi:*

(P1) Admite un singur punct de minim (respectiv maxim) relativ la Ω.

(P2) Poate admite mai multe puncte de maxim local (respectiv minim local) relativ la Ω care sînt vîrfuri ale poliedrului Ω.

Aplicînd această teoremă, Maruşciac I. [6] demonstrează în 1974 că funcţia f este cvasiconexă pe Ω şi dă un algoritm de determinare a punctelor de maxim ale funcţiei f relative la Ω bazat pe metoda planelor secante.

În 1975 Hirche J. [3] ocupîndu-se de studiul punctelor de minim ale funcţiei f relative la Ω, observă că afirmaţia (P1) din teorema 1 este falsă şi dă în acest sens cîteva contraexemple. În 1977 Hirche J. şi Ho Khac Tan [4] continuă studiul proprietăţilor funcţiei f pe Ω în ipoteza $\Omega \subset E^+$ şi obţin printre altele următoarele rezultate:

TEOREMA 2. [4, *propoziţia* 3]. *Dacă $\Omega \subset E^+$, atunci orice punct de minim local al lui f relativ la Ω se găseşte pe o muchie a lui Ω.*

TEOREMA 3. [4, *propoziţia* 6]. *Oricare ar fi două puncte distincte* x_1, x_2 *din* Ω, f *este sau strict convexă sau strict concavă sau afină pe segmentul* $[x_1, x_2]$.

Din teorema 3 rezultă că nici afirmaţia (P2) din teorema 1 nu este adevărată.

Scopul acestei lucrări este de a generaliza aceste rezultate ale lui H i r c h e J. şi H o K h a c T a n şi de a da în acelaşi timp pentru funcţia f condiţii suficiente de cvasiconexitate şi de cvasiconcavitate.

2. În prealabil vom demonstra o proprietate interesantă de care se bucură orice submulţime convexă nevidă M a lui E.

LEMA 4. *Dacă* M *este o submulţime convexă, nevidă a lui* E, *atunci are loc una şi numai una dintre incluziunile* $M \subset E^+$ *sau* $M \subset E^-$.

Demonstraţie. Presupunem prin absurd că $M \not\subset E^+$ şi $M \not\subset E^-$. Atunci există cel puţin un punct $x \in M \cap E^+$ şi cel puţin un punct $y \in M \cap E^-$. Aplicînd [1, propoziţia 9.6.1.], rezultă existenţa unui număr $t \in (0, 1)$ astfel încît

$$d^T(tx + (1 - t)y) = 0. \tag{3}$$

Dar atunci, pe de o parte din (3) rezultă că punctul $z = tx + (1 - t)y \notin E$ deci $z \notin M$; pe de altă parte, $t \in (0, 1)$ rezultă că $z \in [x, y] \subset M$. Aşadar am ajuns la o contradicţie. Presupunerea că $M \not\subset E^+$ şi că $M \not\subset E^-$ este falsă.

Cum $E^+ \cap E^- = \emptyset$ şi $E^+ \cup E^- = E$, rezultă că $M \subset E^+$ sau $M \subset E^-$.

Aplicînd această lemă, vom demonstra următoarea generalizare a teoremei 2.

TEOREMA 5. *Dacă* $\Omega \subset E$, *atunci orice punct de extrem local al funcţiei* f *relativ la* Ω *se găseşte pe o muchie a lui* Ω.

Demonstraţie. Dacă $\Omega \subset E$, atunci pe baza lemei 4 avem $\Omega \subset E^+$ sau $\Omega \subset E^-$. Presupunînd mai întîi că $\Omega \subset E^+$, obţinem că orice punct de minim local al funcţiei f relativ la Ω se găseşte, conform teoremei 2, pe o muchie a lui Ω.

Pentru a vedea unde sînt situate punctele de maxim local ale funcţiei f relative la Ω, definim funcţia $g_1 : E \to R$ prin

$$g_1(x) = (-c)^T x + ((-e)^T x)\,(d^T x)^{-1}$$

oricare ar fi $x \in E$.

Funcţia g_1 este o funcţie de forma (1) şi verifică toate ipotezele teoremei 2. Deci orice punct de minim local al funcţiei g_1 relativ la Ω se găseşte pe o muchie a lui Ω. Deoarece orice punct de maxim local al lui f relativ la Ω este punct de minim local al lui g_1 relativ la Ω, se deduce că orice punct de maxim local al lui f relativ la Ω se găseşte pe o muchie a lui Ω.

Să presupunem acum că $\Omega \subset E^-$. Definim funcţia $g_2 : E \to R$ prin

$$g_2(x) = (-c)^T x + (e^T x)\,((-d)^T x)$$

pentru orice $x \in E$.

Funcţia g_2 este o funcţie de forma (1). Ipotezele teoremei 2 fiind din nou verificate, rezultă că punctele de minim local ale funcţiei g_2 relative la Ω se găsesc pe muchiile lui Ω. Deoarece orice punct de maxim local al funcţiei f relativ la Ω este punct de minim local al funcţiei g_2 relativ la Ω, rezultă că acesta se găseşte pe o muchie a lui Ω.

Rămîne de văzut ce se întîmplă cu punctele de minim local ale funcţiei f relative la Ω. În acest scop definim funcţia $g_3: E \to R$ prin

$$g_3(x) = c^T x + ((-e)^T x)((-d)^T x)$$

oricare ar fi $x \in E$.

Funcţia g_3 este o funcţie de tipul (1). Ipotezele teoremei 2 sînt din nou verificate, deci orice punct de minim local al funcţiei g_3 relativ la Ω se găseşte pe o muchie a lui Ω. Cum însă $f = g_3$, rezultă că orice punct de minim local al funcţiei f este şi punct de minim local al funcţiei g_3 relativ la Ω şi deci se găseşte pe o muchie a lui Ω.

3. În continuare ne propunem să răspundem la următoarea întrebare, nu cumva teorema 3 este adevărată şi în ipoteza mai slabă $\Omega \subset E$? Pentru a răspunde la această întrebare reamintim următoarea lemă bine cunoscută.

LEMA 6. *Fie x, y două puncte distincte din E pentru care $[x, y] \subset E$ şi fie $F_{xy}: [0, 1] \to R$ funcţia definită prin*

$$F_{xy}(t) = f(tx + (1-t)y) \quad \text{oricare ar fi } t \in [0, 1]. \tag{4}$$

Atunci sînt adevărate următoarele afirmaţii:

(a) *f este afină pe $[x, y]$ dacă şi numai dacă F_{xy} este afină pe $[0\ 1]$.*

(b) *f este strict convexă pe segmentul $[x, y]$ dacă şi numai dacă F_{xy} este strict convexă pe $[0, 1]$.*

(c) *f este strict concavă pe segmentul $[x, y]$ dacă şi numai dacă F_{xy} este strict concavă pe $[0, 1]$.*

(d) *f este cvasiconvexă pe $[x, y]$ dacă şi numai dacă F_{xy} este cvasiconvexă pe segmentul $[0, 1]$.*

(e) *f este cvasiconcavă pe segmentul $[x, y]$ dacă şi numai dacă F_{xy} este cvasiconcavă pe $[0, 1]$.*

Observaţia 1. Dacă y se alege în hiperplanul de ecuaţie $d^T x = 0$ iar x în E şi funcţia F_{xy} se defineşte pe segmentul $(0, 1]$, atunci afirmaţiile din lema 6 rămîn adevărate dacă se înlocuieşte segmentul $[x, y]$ cu $[x, y)$ şi intervalul $[0, 1]$ cu $(0, 1]$.

Folosindu-ne de această lemă vom da o generalizare a teoremei 3.

TEOREMA 7. *Dacă $\Omega \subset E$, atunci oricare ar fi două puncte x, y din Ω are loc una şi numai una dintre următoarele afirmaţii:*

(a) *Funcţia f este strict convexă pe segmentul $[x, y]$.*

(b) *Funcţia f este strict concavă pe segmentul $[x, y]$.*

(c) *Funcţia f este afină pe segmentul $[x, y]$.*

Demonstraţie. Din lema 4 rezultă că $\Omega \subset E^+$ sau $\Omega \subset E^-$. Dacă $\Omega \subset E^+$, atunci teorema 7 se reduce la teorema 3.

Presupunem deci că $\Omega \subset E^-$ şi fie x, y două puncte din Ω. Considerăm funcţia $F_{xy}: [0, 1] \to R$, definită prin formula (4). Funcţia F_{xy} este de două ori derivabilă pe $[0, 1]$ şi avem

$$F''_{xy}(t) = 2\,\frac{(e^T x)\, d^T(x-y) - (d^T x)\, e^T(x-y)}{[d^T y + t\, d^T(x-y)]^3}\, d^T(x-y)$$

oricare ar fi $t \in [0, 1]$.

Observăm că funcţia F''_{xy} păstrează un semn constant pe $[0, 1]$: deci funcţia F_{xy} este sau afină sau strict convexă sau strict concavă pe $[0, 1]$. Dacă F_{xy} este afină pe $[0, 1]$, atunci conform afirmaţiei (a) din lema 6 rezultă că f este afină pe $[x, y]$. Dacă F_{xy} este strict convexă pe segmentul $[0, 1]$, atunci conform afirmaţiei (b) a aceleiaşi leme se deduce că f este strict convexă pe $[x, y]$. În sfîrşit dacă F_{xy} este strict concavă pe $[0, 1]$, atunci conform afirmaţiei (c) din lema 6 rezultă că f este strict concavă pe $[x, y]$. Deci poate avea loc una şi numai una din afirmaţiile (a), (b), (c).

4. În continuare, ne propunem să vedem în ce condiţii suplimentare impuse coeficienţilor funcţiei f este valabilă teorema lui Teterev.

Mai precis, dacă x, y sînt puncte din E pentru care $[x, y] \subset E$, dorim să vedem în ce condiţii f este cvasiconvexă pe segmentul $[x, y]$. În acest scop, dacă $d^T(x - y) \neq 0$, vom nota în cele ce urmează cu z punctul în care dreapta ce trece prin punctele x şi y intersectează hiperplanul de ecuaţie $d^T x = 0$. Deoarece în baza lemei 4 ştim că $[x, y] \subset E^+$ sau $[x, y] \subset E^-$, putem presupune fără a restrînge generalitatea că punctul x se găseşte pe dreaptă între punctele z şi y.

LEMA 8. *Fie x, y două puncte distincte din E pentru care $[x, y] \subset E$. Atunci sînt adevărate următoarele afirmaţii:*

(a) *Dacă $d^T(x - y) = 0$, atunci f este afină pe $[x, y]$.*

(b) *Dacă $d^T(x - y) \neq 0$ şi este îndeplinită una dintre condiţiile următoare*

$$c^T z \cdot d^T y > 0, \tag{6}$$

$$c^T z \; d^T y \leqslant 0 \text{ şi } c^T(y - z) \geqslant 0, \tag{7}$$

atunci funcţia f este cvasiconvexă pe $[x, y]$.

Demonstraţie. (a) Să presupunem că $d^T(x-y) = 0$. Atunci obţinem pentru funcţia F_{xy} definită prin (4)

$$F_{xy}(t) = c^T y + \frac{c^T y}{d^T y} + t\left(c^T(x - y) + \frac{c^T(x - y)}{d^T y}\right)$$

oricare ar fi $t \in [0, 1]$.

Conform afirmaţiei (a) din lema 6, deoarece F_{xy} este o funcţie afină pe $[0, 1]$, rezultă că f este afină pe $[x, y]$.

(b) Să presupunem acum că $d^T(x - y) \neq 0$. Fie H_{yz} restricţia funcţiei F_{yz}^{n} la intervalul $(0, 1]$. Funcţia H_{yz} este de două ori derivabilă şi derivatele ei sînt

$$H'_{yz}(t) = c^T(y - z) - \frac{c^T z}{d^T y} \cdot \frac{1}{t^2} \tag{8}$$

pentru orice $t \in (0, 1]$.

$$H''_{yz}(t) = 2c^T z (d^T y)^{-1} t^{-3}$$

oricare ar fi $t \in (0, 1]$.

Dacă presupunem că este verificată relaţia (6), atunci $H''_{yz}(t) > 0$ oricare ar fi $t \in (0, 1]$ şi deci H_{yz} este strict convexă pe $(0, 1]$. Conform observaţiei 1, funcţia f este atunci strict convexă pe $(z, y]$.

Dacă presupunem că este verificată relaţia (7), atunci din (8) rezultă că $H'_{yz}(t) \geqslant 0$ pentru orice $t \in (0, 1]$. Rezultă că H_{yz} este monotonă pe $(0, 1]$

ceea ce implică că H_{yz} este cvasimonotonă pe $(0, 1]$ şi deci implicit cvasiconvexă pe $(0, 1]$. Conform observaţiei 1, funcţia f este cvasiconvexă pe $(z, y]$.

Deci în ambele cazuri f este cvasiconvexă pe $(z, y]$. Atunci f este cvasiconvexă pe orice submulţime a lui $(z, y]$; deci f este cvasiconvexă şi pe $[x, y]$.

În mod analog se poate demonstra lema următoare:

LEMA 9. *Fie x, y două puncte distincte din E pentru care $[x, y] \subset E$. Dacă $d^T(x-y) \neq 0$ şi este îndeplinită una dintre condiţiile următoare*

$$e^T z \cdot d^T y < 0, \tag{10}$$

$$e^T z \cdot dy \geqslant 0 \text{ şi } c^T(y - z) \leqslant 0, \tag{11}$$

atunci funcţia f este cvasiconcavă pe $[x, y]$.

Folosind lema 8 şi lema 9 vom putea da acum condiţii suficiente pentru cvasiconvexitatea, respectiv cvasiconcavitatea funcţiei f.

TEOREMA 10. *Dacă $\Omega \subset E_1$ şi sistemul*

$$\begin{cases} d^T u = 0 \\ e^T u > 0, \quad u \in R \\ c^T u < 0 \end{cases} \tag{12}$$

este incompatibil, atunci funcţia f este cvasiconvexă pe Ω.

Demonstraţie. Fie x, y două puncte oarecare din Ω. Dacă $d^T(x-y) = 0$, atunci conform lemei 8 funcţia f este afină pe $[x, y]$, deci şi cvasiconvexă pe $[x, y]$. Dacă $d^T(x - y) \neq 0$, atunci notăm cu z punctul în care dreapta ce trece prin punctele x şi y înţeapă hiperplanul de ecuaţie $d^T u = 0$. Pentru fixarea ideilor presupunem că punctul x se găseşte situat pe dreaptă între z şi y.

Sistemul (12) fiind incompatibil, rezultă că se pot ivi următoarele situaţii:

I. Avem $d^T z = 0$, $c^T z < 0$, $e^T z \leqslant 0$ şi atunci $c^T(y - z) \geqslant 0$ şi $e^T z \cdot d^T y \leqslant 0$; deci conform lemei 8, f este cvasiconvexă pe $[x, y]$.

II. Avem $d^T z = 0$, $c^T z \geqslant 0$, $e^T z > 0$ şi atunci $e^T z \cdot d^T y > 0$; deci conform lemei 8, f este cvasiconvexă pe $[x, y]$.

În acelaşi mod se pot demonstra următoarele teoreme:

TEOREMA 11. *Dacă $\Omega \subset E_2$ şi sistemul (12) este incompatibil, atunci f este cvasiconcavă pe Ω.*

TEOREMA 12. *Dacă $\Omega \subset E_3$ şi sistemul*

$$\begin{cases} d^T u = 0 \\ c^T u > 0, \quad u \in R^n \\ e^T u > 0 \end{cases} \tag{13}$$

este incompatibil, atunci funcţia f este cvasiconcavă pe Ω.

TEOREMA 13. *Dacă $\Omega \subset E_4$ şi sistemul (13) este incompatibil, atunci funcţia f este cvasiconvexă pe Ω.*

Pentru alegeri particulare ale vectorilor c, d şi e cvasiconvexitatea respectiv cvasiconcavitatea funcţiei f rezultă imediat. Astfel obţinem următoarea consecinţă:

CONSECINŢA 14. (a) *Dacă $\Omega \subset E_1 \cup E_4$ şi este îndeplinită una dintre relaţiile $c = d$, $c = -d$, $e = d$, $c = 0$, $e = 0$, atunci f este cvasiconvexă pe Ω.*

(b) *Dacă* $\Omega \subset E_2 \cup E_4$ *și este îndeplinită una dintre relațiile* $c = d$, $c = -d$, $e = -d$, $e = d$, $c = 0$, $e = 0$, *atunci* f *este cvasiconcavă pe* Ω.

În general, incompatibilitatea sistemelor (12) și (13) se verifică greu. De aceea putem înlocui această condiție, ținînd cont de teorema lui Motzkin [4, teorema 2.42], cu verificarea compatibilității altor sisteme pe care le prezentăm în continuare. Fie în cele ce urmează t, v, w variabile reale.

CONSECINȚA 15. *Dacă* $\Omega \subset E_1$ *și sistemul*

$$\begin{cases} dt - cv + ew = 0 \\ v \geqslant 0, \qquad w \geqslant 0 \end{cases} \tag{14}$$

admite cel puțin o soluție diferită de soluția banală, atunci f *este cvasiconvexă pe* Ω.

CONSECINȚA 16. *Dacă* $\Omega \subset E_2$ *și sistemul* (14) *admite cel puțin o soluție diferită de soluția banală, atunci* f *este cvasiconcavă pe* Ω.

CONSECINȚA 17. *Dacă* $\Omega \subset E_3$ *și sistemul*

$$\begin{cases} du + cv + ew = 0 \\ v \geqslant 0, \qquad w \geqslant 0 \end{cases} \tag{15}$$

admite cel puțin o soluție diferită de soluția banală, atunci f *este cvasiconcavă pe* Ω.

CONSECINȚA 18. *Dacă* $\Omega \subset E_4$ *și sistemul* (15) *admite cel puțin o soluție diferită de soluția banală, atunci* f *este cvasiconvexă pe* Ω.

Observația 2. Dacă $\Omega \subset E_1 \cup E_4$ respectiv $\Omega \subset E_2 \cup E_3$ și (15) sau (14) admite numai soluția banală, atunci funcția f de forma (1) nu mai este în general cvasiconvexă respectiv cvasiconcavă pe Ω.

Să considerăm de exemplu mulțimea

$$E = \{x \in R \mid x_3 \neq 0\}$$

și funcția $f: E \to R$ definită prin

$$f(x) = x_1 + x_2 x_3^{-1} \text{ pentru orice } x = (x_1, x_2, x_3)^T \in E.$$

Mulțimea

$$\Omega\{x \in R^3 \mid x_1 \geqslant 0{,}5,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant 1,\ x_3 \geqslant 0{,}5,\ x_1 + x_3 \leqslant 3\}$$

verifică relația $\Omega \subset E_1$, iar sistemul

$$\begin{cases} v = 0 \\ -w = 0, \quad v \geqslant 0,\ w \geqslant 0 \\ t = 0 \end{cases}$$

admite numai soluția banală.

Fie punctele $x = (0{,}5,\ 1,\ 0{,}5)^T$ și $y = (1{,}5,\ 1,\ 1{,}5)^T$. Ele aparțin mulțimii Ω. Pe segmentul $[x, y]$ funcția f admite un maxim în punctul $z = (1,\ 1,\ 1)$, deci funcția f nu este cvasiconvexă pe segmentul $[x, y]$. Rezultă că f nu este cvasiconvexă pe Ω.

Exemplul acesta ilustrează și faptul că afirmația ($P2$) din teorema lui Teterev este falsă.

(Intrat în redacție la 20 februarie 1978)

BIBLIOGRAFIE

1. Breckner, W. Wolfgang, *Introducere în teoria problemelor de optimizare convexă cu restricţii*, Partea I, Ed. Dacia, Cluj, 1974.
2. Dragomirescu, M., Maliţa, M., *Programare neliniară*, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1972.
3. Hirche, J., *Zur extremwertannahme und Dualität bei Optimierungsproblemen mit linearem und gebrochen linearem Zielfunktionsanteil*, ZAMM, **55**, 184–185, 1975.
4. Hirche, J., Ho Khac Tan, *Über eine Klasse nichtkonvexer Optimierungsprobleme*, ZAMM, **57**, 247–253, 1977.
5. Mangasarian, O. L., *Nonlinear Programming*, McGraw–Hill Book Company, 1969.
6. Maruşciac, I., *Asupra unei programări hiperbolice*, St. cerc. mat. **26**, 419–430, 1974.
7. Teterev, A. G., *Ob odnom obobşcenii lineinovo programmirovania*, Ekonomika i matem. metodi, **5**, 440–447, 1969.

SUR L'ALLURE D'UNE CLASSE DE FONCTIONS HIPERBOLIQUES

(Résumé)

Dans ce travail on étudie l'allure de la fonction (1) sur l'ensemble (2). On généralise les résultats de Hirche J. et Ho Khac Tan [3], [4] et on donne des conditions suffisantes pour que la fonction f soit quasiconvexe ou quasiconcave sur l'ensemble (2).

STUDIA UNIV. BABEŞ-BOLYAI, MATHEMATICA, 2, 1978

NOTES ON THE CONVERGENCE OF THE METHOD OF CHORDS AND OF STEFFENSEN'S METHOD IN BANACH SPACES

M. BALÁZS

Let X be a Banach space and $F: X \to X$ an operator. A fixed point x^* of the operator F is a solution of the equation

$$x = F(x). \tag{1}$$

An iteration method for solving equation (1) consists of the construction of a sequence $(x_n) \subset X$, which converges to x^* (if a suitable initial x_0 approximation and a procedure of calculating x_{n+1}, once x_n is known, are given). The form of the equation (1) suggests a procedure of constructing the sequence (x_n) (with the initial approximation x_0), as it follows:

$$x_{n+1} = F(x_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Sufficient conditions for the convergence of the sequence (x_n) to a solution of the equation (1) are well-known [4].

Further on we shall note by $[u, v; F]$ a divided difference of the operator F in the point $(u, v) \in X \times X$ [9]. As it is known any operator F has divided differences (even symmetrical ones) [2]. According to these, it's always possible to construct a sequence (x_n) by the formula

$$x_{n+1} = x_n - \{I - [u_n, v_n; F]\}^{-1}[x_n - F(x_n)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

where I denotes the identity operator and x_0 and the sequences (u_n), (v_n) are suitably chosen. Special cases of (3) are: *the method of the chords* ($u_n = x_n$, $v_n = x_{n-1}$) [6] and *the modified form of the method of the chords* ($u_n = x_0$, $v_n = x_{-1}$ [1]. If $(u^*, v^*) \in X \times X$ is a solution of the equation $[u, v; F] = 0$, then the method given by (3) reduces to the method given by (2) for $u_n = u^*$ and $v_n = v^*$. In case of $u_n = x_n$ and $v_n = F(x_n)$ we obtain Steffensen's method [7, 8, 3, 1].

The divided difference $[\ldots; F]$ of the operator F is said to be uniformly bounded if a constant $\alpha > 0$ exists such that $\|[u, v; F]\| \leqslant \alpha$ for all $(u, v) \in X \times X$.

THEOREM 1. *If*

$$\|[u, v; F]\| \leqslant \alpha < \frac{1}{3}, \tag{i.1}$$

then the sequence (x_n) *defined by (3) converges to the unique solution* x^* *of the equation (1) for arbitrary choice of* x_0 *and* (u_n, v_n) *and we have*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \left(\frac{2\alpha}{1-\alpha}\right)^n \cdot \frac{\|x_0 - F(x_0)\|}{1-\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{j.1}$$

Proof. From the condition (i.1) we obtain

$$\|F(x) - F(y)\| = \|[x, y ; F](x - y)\| \leqslant \|[x, y ; F]\| \cdot \|x - y\| \leqslant \alpha\|x - y\|. \quad (4)$$

Because $\alpha < 1$, the contraction mapping principle leads to a unique solution x^* of the equation (1) and we have

$$\|x^* - x_0\| \leqslant \frac{\|x_0 - F(x_0)\|}{1 - \alpha}. \quad (5)$$

It also follows from (i.1) that the operator $I - [u_n, v_n ; F]$ has inverse for all $(u_n, v_n) \in X \times X$ and

$$\|\{I - [u_n, v_n ; F]\}^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1 - \alpha}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (6)$$

For all $y \in X$ the following identity is true:

$$y - \{I - [u_n, v_n ; F]\}^{-1} y = - \{I - [u_n, v_n ; F]\}^{-1} [u_n, v_n ; F] y. \quad (7)$$

Indeed, from the evident equality

$$\{I - [u_n, v_n ; F]\} y - y = - [u_n, v_n ; F] y$$

and the existence of $\{I - [u_n, v_n ; F]\}^{-1}$ results (7). From (3), using (7) and the equality $x^* = F(x^*)$ we obtain

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x^* &= x_n - x^* - \{I - [u_n, v_n ; F]\}^{-1}[x_n - x^* + F(x^*) - F(x_n)] = \\ &= -\{I - [u_n, v_n ; F]\}^{-1} - [u_n, v_n ; F](x_n - x^*) + \{I - [u_n, v_n ; F]\}^{-1}[F(x_n) - \\ &\quad - F(x^*)] = \{I - [u_n, v_n ; F]\}^{-1}\{F(x_n) - F(x^*) - [u_n, v_n ; F](x - x^*)\}. \end{aligned} \quad (8)$$

From (8) using (4) it follows

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \frac{1}{1 - \alpha}(\alpha\|x_n - x^*\| + \alpha\|x_n - x^*\|) = \frac{2\alpha\|x_n - x^*\|}{1 - \alpha}, \quad (9)$$

from which (j.1) results by (5) and mathematical induction. The condition (i.1) guarantees the convergence of the sequence (x_n) to x^*.

Remark. If the operator F has a Fréchet derivative and $[u, u ; F] = F'(u)$ [9], then from Theorem 1 the Theorem 1 of [5] results.

Let's presume that a divided difference of the operator F has the following property

$$\|[x, u ; F] - [x, v ; F]\| \leqslant K\|u - v\| \quad (10)$$

for all $x, u, v \in X$. In this case, because

$F(x_n) - F(x^*) - [x_n, v_n ; F](x_n - x^*) = ([x_n, x^* ; F] - [x_n, v_n ; F])(x_n - x^*)$, we obtain

$$\|F(x_n) - F(x^*) - [x_n, v_n ; F](x_n - x^*)\| \leqslant K\|x^* - v_n\| \cdot \|x_n - x^*\|. \quad (11)$$

From (10) follows that $F'(x)$ exists for all $x \in X$ and $\lim_{u \to x} [x, u ; F] = F'(x)$ [2]. Thus from (11) we have

$$\|F(x_n) - F(x^*) - F'(x_n)(x_n - x^*)\| \leqslant K\|x^* - x_n\|^2. \quad (12)$$

If the operator F has a uniform bounded derivative: $F'(x)$ (see (i.1)), we have

$$x_{n+1} - x^* = [I - F'(x_n)]^{-1}\{F(x_n) - F(x^*) - F'(x_n)(x_n - x^*)\} \text{ [5, pp. 14].} \tag{13}$$

THEOREM 2. *If* F *has a divided difference with the property* (10) *and* $\|[u, v; F]\| \leqslant \alpha < 1$, *then Newton's method given by*

$$x_{n+1} = x_n - [I - F'(x_n)]^{-1}[x_n - F(x_n)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

converges to x^* *start ing from any* $x_0 \in X$ *which verifies the inequality*

$$K \frac{\|x_0 - F(x_0)\|}{(1-\alpha)^2} = h < 1 \tag{i.2}$$

and the convergence is quadratic:

$$\|x_n - x^*\| \leqslant h^{2^n - 1} \frac{\|x_0 - F(x_0)\|}{1 - \alpha}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{j.2}$$

Proof. From (13), using (12), results

$$\|x_{n+1} - x^*\| \leqslant \frac{K}{1 - \alpha}\|x_n - x^*\|^2, \tag{14}$$

which leads to (j.2) by (5) and by mathematical induction. The convergence of the sequence (x_n) evidently results from the condition (i.2).

Remark. In the proof of Theorem 2 we did not assume that F' is Riemann integrable [5].

COROLLARY. *Under the hypotheses of Theorem 2 the convergence of Newton's method to* x^* *is quadratic for all starting values for which the inequality*

$$\|x_0 - x^*\| < \frac{1-\alpha}{K} \tag{i.2'}$$

is true.

Indeed, from (14), by mathematical induction, we obtain:

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \left[\frac{K}{1-\alpha}\|x_0 - x^*\|\right]^{2^n - 1}\|x_0 - x^*\|$$

which together with the condition (i.2') guarantees the quadratic convergence of the sequence (x_n) to x^*.

THEOREM 3. *If a divided difference of* F *satisfies* (10) *and* $\|[u, v; F]\| \leqslant \alpha < 1$, *then the Steffensen's method, given by*

$$x_{n+1} = x_n - \{I - [x_n, F(x_n); F]\}^{-1}[x_n - F(x_n)], \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

converges to x^* *for any starting value* $x_0 \in X$, *for which the following inequality is true:*

$$h_0 = \frac{K\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{\|x_0 - F(x_0)\|}{1-\alpha} < 1 \tag{i.3}$$

and the convergence is quadratic:

$$||x_n - x^*|| \leqslant (h_0)^{2^n-1} \frac{||x_0 - F(x_0)||}{1-\alpha}, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \tag{j.3}$$

Proof. We have

$$||x^* - F(x_n)|| = ||F(x^*) - F(x_n)|| \leqslant \alpha ||x^* - x_n||,$$

and using (11) it follows

$$||F(x_n') - F(x^*) - [x_n, F(x_n); F](x_n - x^*)|| \leqslant K||x^* - x_n||^2$$

and so we obtain

$$||x_{n+1} - x^*|| \leqslant \frac{K\alpha}{1-\alpha} ||x_n - x^*||^2. \tag{15}$$

The inequality (j.3) results by the inequalities (5) and (15) and mathematical induction. The convergence of the sequence is guaranteed by the inequality (i.3).

COROLLARY. *Under the hypotheses of Theorem 3, the convergence of Steffensen's method is quadratic for any starting value* $x_0 \in X$ *which satisfies the inequality*

$$||x_0 - x^*|| < \frac{1-\alpha}{K\alpha}. \tag{i.3'}$$

Indeed, from inequality (15) by mathematical induction we obtain:

$$||x_n - x_0|| \leqslant \left[\frac{K\alpha}{1-\alpha} ||x_0 - x^*||\right]^{2^n-1} ||x_0 - x^*||,$$

which, together with (i.3′) guarantees the quadratic convergence of the sequence (x_n) to x^*.

(Received April 3, 1978)

REFERENCES

1. Balázs, M., *Contributions to the Study of Solving the Equations in Banach Spaces*, Doctor Theses, Cluj, 1969.
2. Balázs, M., Goldner, G., *On Existence of Divided Differences in Linear Spaces*, Rev. d'anal. Num. et de la Théorie de l'approx. **2**, 1973, 5–9.
3. Păvăloiu, I., *Sur la method de Steffensen pour la résolution des équations opérationelles non linéaires*, Rev. Roumaine des Math. pures et appliquées, **1**, **XIII**, 1968, 149–158.
4. Rall, L. B., *Computational Solution of Nonlinear Operator Equations*, John Wiley & Sons, New–York, 1969.
5. Rall, L. B., *Convergence of Stirling's Method in Banach Spaces*, Aequationes Mathematicae, **12**, 1, 12–20, 1975.
6. Sergeev, A. S., *On the Method of the Chords*, Sibirs. Mat. J., **II**, 2, 1961, 282–289.
7. Steffensen, J. F., *Remarks on Iteration*. Skand. Aktuar. Tidskr., **16**, 1933, 64–72.
8. Ul'm, S., *An Algorithm for Steffensen's Generalized Method* (Russian), Izd. Acad. Nauk. Estonskoi SSR, **1**, 1963, 24–30.
9. Ul'm, S., *On the Generalized Divided Difference I*. (Russian), Izd. Acad. Nauk. Estonskoi SSR, **16**, 1, 1967, 13–36.

OBSERVAŢII ASUPRA CONVERGENŢEI METODEI COARDEI ŞI A METODEI LUI STEFFENSEN ÎN SPAŢII BANACH

(R e z u m a t)

Se consideră ecuaţia $x = F(x)$, unde $F: X \rightarrow X$ este un operator şi X un spaţiu Banach. Se studiază metoda iterativă de rezolvare a ecuaţiei, dată prin formula $x_{n+1} = x_n - \{I - [u_n, v_n; F]\}^{-1}[x_n - F(x_n)]$, unde $[u, v; F]$ este o diferenţă divizată a operatorului F în punctul $(u, v) \in X \times X$. În lucrare sînt demonstrate următoarele afirmaţii: 1. Dacă diferenţa divizată a lui F este uniformă mărginit, adică are loc inegalitatea (i, 1), atunci şirul (x_n) construit prin formula precedentă converge către soluţia unică x^* a ecuaţiei pentru orice (u_n, v_n) şi $x_0 \in X$. 2. Dacă diferenţa divizată a lui F este uniform mărginită şi lipschitziană, adică este verificată relaţia (10), atunci şirul construit prin formula $x_{n+1} = x_n - \{I - F'(x_n)\}^{-1}[x_n - F(x_n)]$ converge pătratic către x^*. 3. Dacă diferenţa divizată a lui F este lipschitziană şi $||[u, v; F]|| \leq \alpha < 1$, atunci şirul (Steffensen) definit prin formula $x_{n+1} = x_n - \{I - [x_n, F(x_n); F]\}^{-1}[x_n - F(x_n)]$ converge pătratic către x^*.

RECENZII

Petre Brădeanu, **Mecanica fluidelor,** Ed. Tehnică, Bucureşti, 1973, p. 453.

L'ouvrage présente les équations et les méthodes fondamentales de la mécanique des fluides, ainsi que leur emploi aux applications techniques et aux disciplines qui en dérivent ou en sont apparentées; la théorie de la couche limite, la théorie et la technique des fussils etc.

Après une introduction, où sont exposés les éléments de la théorie des milieux continus déformables, le livre comprend deux grandes parties. Dans la première partie sont traitées les propriétés, les formules et les équations du mouvement des fluides et dans la deuxème partie sont présentées les méthodes générales et particulières pour résoudre les divers problèmes de la mécanique des fluides indéaux et visqueux. On trouve ainsi exposées tant les méthodes pour l'étude du mouvement des fluides idéaux incompressibles (mouvements potentiels plans, mouvements à surface de discontinuité de la vitesse. mouvements tridimensionnels etc.) et compressibles (mouvements subsoniques, supersoniques et hypersonique) que les méthodes pour l'étude du mouvement des fluides visqueux (solutions exactes des équations de Navier-Stokes; couche limite laminaire incompressible et compressible, couche limite tourbulente compressible).

A la fin du livre, l'auteur donne, sous une forme d'annexes, quelques éléments spéciaux de mathématiques (la théorie des champs, le problème de Dirichlet et Neumann, des représentations conformes) et quelques problèmes resolus de la mécanique des fluides.

Le livre peut servir aussi bien à l'information et à la recherche scientifique théorique et technique, qu'en tant que manuel dans le processus de préparation didactique. Il s'adresse aux mécaniciens, physiciens, hydrauliciens, énergéticiens, constructeurs, aussi bien qu'au corps enseignant, aux candidats au doctorat et aux étudiants des spécialités respectives.

A. TURCU

Stange Kurt, **Bayes-Verfahren. Schätz-und Testverfahren bei Berücksichtigung von Vorinformationen,** Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1977, viii + 312 S.

Die vorliegende Monographie entstand auf Grund eines im wissenschaftlichen Nachlass des 1974 verstorbenen Autors K. Stange vorgefundenen Manuskripts und wurde von T. Deutler und P. Th. Wibrich herausgegeben. Sie vermittlet eine Einführung in die Schätz-und Testverfahren bei Berücksichtigung von Vorinformationen, ein Gebiet dessen Bedeutung für die verschiedensten Anwendungsbereiche der Mathematik (Natur-, Ingenieur-, und Wirtschaftswissenschaften) ausserordentlich gross ist.

Das Buch ist in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil werden Parameterschätzungen mit Vorinformationen (Bayes'sche Punkt- und Intervallschätzung) behandelt. Nach einer allgemeinen Einführung werden Bayes'sche Parameterschätzungen für in der Praxis häufig auftretende Verteilungen (hypergeometrische, Binominal-, Poisson-, und Normalverteilung) hergeleitet und mit den Parameterschätzungen ohne Vorinformationen verglichen. Die a priori-Verteilungen sind dabei so gewählt, dass sich die a posteriori-Verteilungen explizit angeben lassen.

Der zweite Teil. weitaus kürzer als der erste, enthält vom Autor selbst erarbeitete Prüfpläne für messende Prüfung mit Berücksichtigung von Vorinformationen. Es werden dabei sowohl Einfachpläne als auch Folgepläne ohne und mit Berücksichtigung von Kostenparametern gebracht.

Für die im Buch behandelten Verfahren werden sowohl die theoretischen Grundlagen beschrieben, als auch verschiedene Anwendungsmöglichkeiten. Die in den Text eingestreuten zahlreichen Beispiele (vor allem aus der Technik und der Qualitätskontrolle ausgewählt) spielen eine wichtige Rolle beim besseren Verständnis der Theorie.

Das Buch kann Mathematikern (der angewandten Richtung), Ingenieuren und Wirtschaftswissenschaftlern bestens empfohlen werden.

E. OANCEA, M. RĂDULESCU

Beitrage zur algebra und geometrie 5 VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1976.

Das Heft welche in der Schriftenreiche der Martin-Louther-Universität Halle- Wittenberg veröffentlicht wurde, originelle und zusammenfassende Arbeiten auf den Gebieten von Algebra, Geometrie und algebraische Topologie enthält. Die konkrete Fragestellungen sind die folgende: Orientie- reguläre Ringe, Idealen in A.C — Laticen. Orientierung in affinen Räumen. Gleichungen in freien

Halbgruppen, elliptischer Orteschemas, lineare Räume auf algebraischen Hyperflächen, massive Knoten u.a. Ein monografische Arbeit von mehreren Verfassern über ,,Modulprobleme in der algebraischen Geometrie II, (p. 75–130) ist die Folgerung einer Arbeit mit demselben Titel die in das Heft 4 (1975) p. 93–150, veröffentlicht wurde.

M. ŢARINĂ

T u n c e r C e b e c i, A. M. O. S m i t h, **Analysis of Turbulent Boundary Layers**, Academic Press, New York – San Francisco – London, 1974, XVII + 404 p.

Based on their elegant numerical methods and an extensive study of existing significant literature, the authors present an excellent book for one interested in the numerical methods of laminar and turbulent boundary layers. This work refers to the steady incompressible and compressible flows.

The scope of the book can be best evaluated by reviewing its content. The Introductory chapter includes: turbulence-miscellaneous remarks, the ubiquity of turbulence, the continuum hypothesis, measures of turbulence-intensity, measures of turbulence-scale, measures of turbulence-the energy spectrum, measures of turbulence-intermittency, the diffusive nature of turbulence, the parameters of primary interest, some consequences of turbulence, the impossibility of calculating turbulent flow from first principles, background literature.

Chapter two entitled Conservation Equations for Compressible Turbulent Flows contains: introduction, the Navier-Stokes equations, conventional time-averaging and mass-weighted-averaging procedures, relation between conventional time-averaged quantities and massweighted-averaged quantities, continuity and momentum equations, energy equations, mean-kinetic-energy equation, Reynolds-stress transport equations.

The following chapter entitled The Boundary Layer Equations includes: introduction, boundary layer approximations for compressible flows, continuity, momentum, and energy equations, mean-kineticenergy equation, Reynolds-stress transport equations, integral equations of the boundary layer.

The next chapter (four) entitled General Behaviour of Turbulent Boundary Layers contains: introduction, composite nature of a turbulent boundary layer, eddy-viscosity and mixing-length concepts, mean-velocity and shear-stress distributions in incompressible flows on smooth surfaces, mean-velocity distributions in incompressible turbulent flows on rough surfaces with zero pressure gradient, meanvelocity distribution on smooth porous surfaces with zero pressure gradient, the Crocco integral for turbulent boundary layers, meanvelocity and temperature distribution in compressible flows with zero pressure gradient, effect of pressure gradient on mean-velocity distribution in incompressible flows.

The following two chapters (chapters five and six) entitled Various Approaches to the Calculation of Turbulent Boundary Layers and Transport Coefficients in Turbulent Boundary Layers contain: introduction, integral methods, differential methods, short-cut methods, coefficients of momentum transport, coefficients of heat transport, summary.

The seventh chapter entitled The Cebeci-Smith (CS) Methods includes: introduction, the governing equations, transformation of the equations, fluid properties for air, Keller's Box method, Keller's Box method for the momentum equation, solution of the momentum difference equations, Keller's Box method for the energy equation, solution of the difference equations of the energy equation, procedure for solving momentum and energy equations simultaneously, higher-order accuracy: Richardson extrapolation, estimation of boundary layer thickness, boundary layer parameters.

The last two chapters (chapters eight and nine) entitled The CS Method for Laminar Boundary Layers and The CS Method for Turbulent Boundary Layers contain: introduction, incompressible laminar flows, compressible laminar flows, predication of transition, two-dimensional incompressible fllows, axisymmetric incompressible flows, two-dimensional compressible flows, axisymmetric compressible flows, some applications of the CS method.

In the opinion of the reviewer the authors' development of topics is logical and the composition of contents is excellent. Each chapter in the book is developed rigorously and the material is presented in a concise manner. Figures are clear and pertinent. The book comprises a vast bibliography (281 items) which is especially helpful for researchers. The text incorporates many of the authors' original contributions (chapters five to nine). All in all, this is an excellent work. The reviewer has no reservation in recommending this fine book to all research workers in the field of boundary layer flows.

IOAN POP

F. F. B e n e d e t t o, B. G. T e u b n e r, **Real variable and integration**, Stuttgart, 1976, ii + 278 pp., DM. 48.

This book is concerned with the fundamental part of the basic graduate real variable course. The central notion of the book is the absolute continuity which has the role to unify the major results of the theory, the Lebesgue dominated convergence theorem and the Radon-Nikodym theorem. This new organization of the basic notions of the measure and integration theory makes the book different from the usual textbooks on real variable and integration.

An excellent feature of the book is the extensive historical and motivational comments, which show that the integration did not develop in a vacuum. There are also presented information on the development of Fourier series because of its clase relation with many of the notions from real analysis. At the end of each chapter are large problem sets with different degrees (difficulty.

The material of the book is organized in si chapters and three appendices. First are expos(the fundamental classical problems which led t Lebesgue's definition of integral and afterwar(the theory of integration and the structure (measures in a measure theoretical format ar developed. The appendices contain equally impo: tant subject-matters which don't fit in perfectl with the singular theme of absolute continuity

The book can be used with great profit fo classroom teaching.

H. WIESLEI

Întreprinderea Poligrafică Cluj, Municipiul Cluj-Napoc… …1978

În cel de al XXIII-lea an (1978) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* apare semestrial specialităţile:

matematică

fizică

chimie

geologie—geografie

biologie

filozofie

ştiinţe economice

ştiinţe juridice

istorie

filologie

На XXIII году издания (1978) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* выходит два раза в год со следующими специальностями:

математика

физика

химия

геология—география

биология

философия

экономические науки

юридические науки

история

филология

Dans sa XXIII-e année (1978) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* paraît semestriellement dans les spécialités:

mathématiques

physique

chimie

géologie—géographie

biologie

philosophie

sciences économiques

sciences juridiques

histoire

philologie

43 875

Abonamentele se fac la oficiile poştale, prin factorii poştali şi prin difuzorii de presă, iar pentru străinătate prin ILEXIM Departamentul export–import presă, P. O. Box 136–137, telex 11226, Bucureşti, str. 13 Decembrie nr. 3.

Lei 10