STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 2

1973

CLUJ

REDACTOR ȘEF: Prof. ȘT. PASCU, membru corespondent al Academiei

REDACTORI ȘEFI ADJUNCȚI: Acad. prof. ȘT. PÉTERFI, prof. VL. HANGA, prof. GH. MARCU

COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ—MECANICĂ: Prof. GH. CHIȘ, prof. C. KALIK, prof. P. MOCANU (redactor responsabil), conf. I. MUNTEAN, lector GH. COMAN (secretar de redacție)

ANUL XVIII **1973**

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 2

Redacţia : CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — CONTENTS

QUELQUES REMARQUES SUR LA THÉORIE DU POINT FIXE (III)

IOAN A. RUS

1. Soit X un ensemble et $f: X \to X$, une application. On pose $F_f = \{x, \in X \mid f(x) = x\}$. Afin d'établir des théorèmes de point fixe pour l'application f, il est utile d'attacher à f des applications $g: Y \to Y \subset X$ telles que $F_f = F_g$ ou $F_g \subset F_f$. Si par exemple $Y \subset X$ est un ensemble invariant pour f, c' est-à-dire, $f(Y) \subset Y$, et on définit

$$g: Y \to Y, \text{ par } x \to f(x)$$

on a $F_g \subset F_f$. Si $Y = Imf$, alors $F_g = F_f$. De plus, comme

$$X \supset Imf \supset Imf^2 \supset \ldots \supset Imf^n \supset \ldots,$$

on peut définir les applications

$$f_n: Imf^n \to Imf^n, \text{ par } x \mapsto f(x),$$

et l'on a $Ff_n = F$.

Il est donc suffisant, pour étudier les point fixes de f, d'étudier les points fixes de f_n, pour un certain $n \in \mathbf{N}$. De plus

$$F_f \subset \bigcap_{n \in \mathbf{N}} Imf^n.$$

2. Soit $f: X \to X$ une application telle que $f^k = 1_X$, pour un certain $k \in \mathbf{N}$ et $Y \subset X$. Alors

$$Z = Y \cup f(Y) \cup \ldots \cup f^{k-1} - 1\,(Y),$$

est un ensemble invariant pour f. Si

$$g: Z \to Z, \text{ par } x \mapsto f(x),$$

alors $F_g \subset F_f$.

Donc si g a au moins un point fixe, alors f a au moins un point fixe. Par exemple

THÉORÈME 3. 1. *Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une application continue telle qu'il existe $n \in \mathbf{N}: f^n = 1_{\mathbf{R}}$. Alors f a au moins un point fixe.*

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{R}$, et I l'intervalle détérminé par x et $f(x)$. L'ensemble $Z = I \cup f(I) \cup \ldots \cup f_{n-1}(I)$, est un ensemble invariant pour f. Comme Z est un intervalle fermé de $\mathbf{R}$ et $g: Z \to Z$, est continue, il resulte par le théorème de Brouwer que g, donc f, a au moins un point fixe.

3. Soit X un ensemble et $\varphi: \mathfrak{P}(X) \to \mathfrak{P}(X)$. Si

$$f(\varphi(A)(\subset \varphi(A), \quad \forall \in \mathfrak{P}(X), \text{ tel que } f(A) \cup A,$$

alors on peut definir les applications

$$f_{n\varphi}: \varphi(Imf^n) \to \varphi(Imf^n), \text{ par } x \mapsto f(x),$$

et $F_f = F_{fn\varphi}$. Par exemple

THÉORÈME 3.2. *Soit $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue telle qu'il existe $n \in \mathbf{N}$, pour quel Imf est borné. Alors f a au moins un point fixe.*

Démonstration. Considérons $\varphi(A) = \bar{A}$ et nous obtenons l'application

$$\bar{f}_n: \overline{Imf^o} \to \overline{Imf}.$$

Par le théorème de Brouwer, f_n, donc f, a au moins un point fixe.

Remarque. Voir [4].

THÉORÈME 3. 3. *Soit X un espace de Banach, $Y \subset X$, un sous-ensemble étoilé et fermé. Si $f: X \to X$, est non-expansive et Imf est compact alors f a au moins un point fixe.*

Démonstration. Soit φ (Imf) une fermeture étoilée de Imf telle que φ $(Imf) \subset Y$. Nous obtenons l'application

$$f_{1\varphi}: \varphi(Imf) \to \varphi(Imf).$$

D'après un théorème de Dotson, $f_{1\varphi}$, donc f, a au moins un point fixe.

Remarque. Voir [1], [3], [6], [7], [8].

4. Soit X un ensemble et $f: X \to X$ une application surjective. Si pour $g: X \to X$, nous avons $f \circ g = 1_X$, alors $F_g \subset F_f$. Par exemple

THÉORÈME 3. 4. *Soit (X,d) un espace métrique complet et $f: X \to X$, une application surjective telle qu'il existe, α, $\beta \in \mathbf{R}+$, $\alpha + 2\beta < 1$, et*

$$d(x,y) \leqslant \alpha d(f(x), f(y)) + \beta\, [d(x,f(x)) + d(y,f(y))], \quad x, y \in X.$$

Alors f a un point fixe unique.

Demonstration. Si $g: X \to X$ est une inverse à droite de f, alors

$$d(g(x), g(y)) \leqslant \alpha d(x, y) + \beta[d(x, g(x)) + d(y, g(y))], \quad x, y \in X,$$

et donc g a un point fixe. On vérifie immédiatement que f a un point fixe unique.

Remarque. Voir [2], pour le cas $\beta = 0$.

(*Mansuscrit reçu le 15 janvier 1973*)

BIBLIOGRAPHIE

1. Anh, N. H., *Note on fixed point theorem of F. E. Browder*, „J. Math. Anal. and Appl.", **18** (1967), 391–392.
2. Avramescu, C., *Théorèmes de point fixe pour les applications contractantes et anticontractantes*, „Manuscripta Math.", **6** (1972), 405–411.
3. Browder, F. E., *Nonexpansive nonlinear operators in Banach space*, „Proc. Nat. Acad. Sci.", **54** (1965), 1041–1044.
4. Browder, F. E., *On a generalization of the Schauder fixed point theorem*, „Duke Math. J.", **26** (1959), 291–303.
5. Dotson, W. G., *Fixed point theorems for nonexpansive mapping on starshaped subsets of Banach spaces*, „J. London Math.", 1972, part 3, 408–410.
6. Göhde, D., *Zum Prinzip der kontraktiven Abbildung*, „Math. Nachr.", **30** (1965), 251–258.
7. Kirk, W. A., *A fixed point theorem for mapping which do not increase distances*, „Amer. Math. Monthly", **72** (1965), 1004–1006.
8. Rus, I. A., *Teorema punctului fix. II : Teoria punctului fix în analiza funcțională*, Cluj, 1973.

CÎTEVA OBSERVAȚII ASUPRA TEORIEI PUNCTULUI FIX (III)

(Rezumat)

Fie X o mulțime și $f : X \to X$, o aplicație. În studiul punctelor fixe ale aplicației f este util de a pune în evidență aplicații $g : Y \to Y$, $Y \subset X$, cu proprietatea că $F_g \leqslant F_f$. În lucrarea de față se pun în evidență asemenea aplicații. Pe această cale se demonstrează mai multe teoreme, unele cunoscute altele nu. De exemplu se demonstrează următoarea teoremă:

Fie $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, o aplicație continuă cu proprietatea că există $n \in \mathbf{N}$ petnru care $f^n = 1_{\mathbf{R}}$. În aceste condiții aplicația f are cel puțin un punct fix.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕОРИИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ (III)

(Резюме)

Пусть X — множество и $f : X \to X$ — отображение. При изучении неподвижных точек отображения целесообразно выявить отображения $g : y \to y$, $y \supset X$, , со свойством $F_g \subset F_f$. В настоящей работе выявляются такие отображения. Этим способом доказано несколько теорем, одни уже известные, а другие нет. Так, например, доказывается следующая теорема:

Пусть $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — непрерывное отображение со свойством, что имеется $n \in N$, удовлетворяющее $f^n = 1_{\mathbf{R}}$. При этих условиях отображение f имеет по крайней мере одну неподвижную точку.

SUR LA CLASSE DES ESPACES K_n

P. ENGHIŞ

Un espace riemannien V_n de métrique

$$ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j \tag{1}$$

avec le tenseur de courbure R^i_{jkh}, et le tenseur de Ricci R_{jh} est nommé symétrique dans le sens de Cartan si

$$R^i_{jkh,r} = 0 \tag{2}$$

où la virgule désigne la dérivée covariante par rapport à la métrique (1).

Si dans l'espace V_n on peut déterminer un vecteur covariant φ_r tel que

$$R^i_{jkh,r} = \varphi_r R^i_{ljkh} \tag{3}$$

l'espace est nommé récurrent [5]. Dans (3), si l'on contracte en i et j on obtient :

$$R_{jh,r} = \varphi_r R_{jh} \tag{4}$$

Un espace V_n qui vérifie (4) est nommé Ricci récurrent [4]. Il résulte qu'un espace récurrent est toujours Ricci-récurrent, la réciproque n'étant pas toujours vraie [2].

Si l'on écrit pour l'espace V_n l'identité de Bianchi

$$R^i_{jkh,r} + R^i_{jhr,k} + R^i_{jrk,h} = 0 \tag{5}$$

et si l'on tient compte de (3), on obtient

$$\varphi_r R^i_{jkh} + \varphi_k R^i_{jhr} + \varphi_h R^i_{jrk} = 0 \tag{6}$$

Un espace V_n récurrent vérifie la relation (6).

Les espace V_n symétriques dans lesquels on peut déterminer un vecteur covariant φ_r tel que la relation (6) ait lieu, et les espaces récurrents, ont été nommés, par A. G. Walker [5], espaces K_n^*.

Un espace K_n^* est nommé simple, s'il admet $n-2$ champs de vecteurs parallèles.

On dit qu'un espace de Riemann V_n est une plan-extension d'un espace de Riemann V_p, s'il est le produit d'un V_p et d'un espace euclidien E_{n-p}, $V_n = V_p \times E_{n-p}$. On peut écrire sa métrique

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 \tag{7}$$

où ds_1^2 est la métrique de l'espace V_p et ds_2^2 une métrique euclidienne $n-p$ dimensionelle.

Si la métrique d'un V_n a la forme

$$ds^2 = \sum_{ij=1}^{p} g_{ij}dx^i dx^j + \sum_{k=1}^{n-p} dx^k dx^{p+k} \tag{8}$$

on dit que l'espace est une nulle-extension d'un espace V_p.

Pour les espaces K_n^* simples Walker [5] a donné la suivante classification :

Tout espace K_n^* simple est :

a) soit une plan-extension d'un V_2, $V_n = V_2 \times E_{n-2}$

b) soit une plan-extension d'un V_3 qui est une nulle-extension d'un V_2

c) soit une plan-extension d'un V_4 qui est une nulle-extension d'un V_2

Les espaces V_2, V_3 et V_4 qui interviennent dans cette classification sont des espaces K_2^*, K_3^* et K_4^*. Pour les espaces K_3^* et K_V^* on donne aussi les formes canoniques des métriques, respectivement

$$ds^2 = \psi(x^1,x^2)\ \ (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + 2dx^1dx^3 \tag{9}$$

$$ds^2 = \psi\ (x^1,\ x^2)\ (dx^1)^2 + 2dx^1dx^3 + 2dx^2 \mathrm{d}x^4 \tag{10}$$

Les espaces (9) et (10) sont des espaces symétriques dans les sens de Cartan si et seulement si $\frac{\partial^2\psi}{\partial[x^2]^2} = \text{constant}$; dans tout les autres cas ils sont des espaces récurrents.

Pour les espaces K_n^*, $n > 3$, qui ne sont pas simples, A.G. Walker [5] a montré que le système de coordonées peut être choisi tel que la métrique de K_n^* ait la forme

$$ds^2 = \psi(dx^1)^2 + 2dx^1\ dx^2 + K_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta \tag{11}$$

où $\psi = \theta a_{\alpha\beta}x^\alpha x^\beta + \chi_\alpha x^\alpha$, $a_{\alpha\beta}$ et $K_{\alpha\beta}$ sont des constantes et θ, χ_a sont des fonctions de x^1. Les espaces V_n de métrique (11) sont des espaces K non simples si $\theta \neq 0$ et le rang $(a_{\alpha\beta}) > 1$; ils sont symétriques si $\theta =$ const., et récurrents dans tous les autres cas.

Nous nous proposons d'étudier la classe des espaces K_n^*.

On sait que la classe d'un espace riemannian V_n avec l'élément linéaire (1) est un entier positif q, tel que la métrique soit réalisée sur une surface à n dimensions d'un espace E_{n+q}

$$y^i = y^i(x^1, x^2, \ldots, x) \quad (i = 1, \ldots, n, n+1, \ldots, n+q) \tag{12}$$

et que la réalisation ne soit pas possible dans un E_m avec $m < n + q$.

D'après le théorème de Schöfli toute variété riemannienne V_n peut être plongée dans un $E_{\frac{n(n+1)}{2}}$, donc pour la classe nous avons.

$$q \leqslant \frac{n(n-1)}{2} \tag{13}$$

Comme on a montré dans [3], Gauss, Codazzi et Ricci ont donné pour la détermination du plongement, donc de la classe, un système mixte d'équations aux derivées partielles, qui présente une grande difficulte pour l'intégration.

Pour donner des délimitations dans le problème de la classe des espaces K_n^* on etablit les transformations (12) qui permettent d'écrire la métrique de l'espace K_n^* sous la forme euclidienne. Ainsi on obtient aussi des représentations analitiques, paramétriques de la variété qui réalise la métrique.

D'après ce qui précède, il résulte que si $V_n = V_p \times E_{n-p}$ la classe de V_n coïncide avec la classe de V_p, donc on a :

PROPOSITION *1*. Toute plan-extension d'un V_p a la même classe que V_p.

En tenant compte de cette proposition et du fait que pour un V_2 non euclidien, de (13) il résulte $q = 1$,on a :

PROPOSITION *2*. Tous les espaces K_n^* simples, qui ne sont pas euclidiens, de la première catégorie de la classification de Walker, ont la classe $q = 1$.

Pour les autres espaces K_n^* simples, d'après la première proposition, il résulte qu'il est suffisant d'étudier la classe des espaces K_3^* et K_4^*, donnés par (9) et (10).

Pour les espaces K_3^* on a $ds^2 = \psi\,(x^1, x^2)\,(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + 2dx^1dx^3$.

Si la fonction $\psi\,(x^1, x^2)$ est une fonction arbitraire de x^1 et x^2, les transformations

$$\begin{aligned} y^1 &= \sqrt{\psi(x^1, x^2)}\,\cos\,x^1 & y^4 &= x^2 \\ y^2 &= \sqrt{\psi(x^1, x^2)}\,\sin\,x^1 & y^5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + x^3) \\ y^3 &= i\sqrt{\psi(x^1, x^2)} & y^6 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(x^1 - x^3) \end{aligned} \tag{14}$$

permettent d'écrire l'élément linéaire sous la forme euclidienne Le plongement ayant lieu dans un E_6, pour la classe on a $q \leqslant 3$, fait qui était connu aussi par le théorème de Schläfli.

Si la fonction $\psi(x^1, x^2)$ est fonction seulement de x^2 on a

$$
\begin{aligned}
y^1 &= \sqrt{\psi(x^2)}\cos x^1 & y^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + x^3) \\
y^2 &= \sqrt{\psi(x^2)}\sin x^1 & y^5 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(x^1 - x^3)
\end{aligned}
\qquad (15)
$$

$$y^3 = \int \sqrt{1 - \left(\sqrt{\psi(x^2)}\right)'^2}\, dx^2$$

donc pour la classe on a $q \leqslant 2$.

Si $\psi(x^1, x^2) = (x^2)^2 \varphi(x^1)$ on a

$$
\begin{aligned}
y^1 &= x^2 \cos \int \sqrt{\varphi(x^1)}\, dx^1 & y^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + x^3) \\
y^2 &= x^2 \sin \int \sqrt{\varphi(x^1)}\, dx^1 & y^4 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(x^1 - x^3)
\end{aligned}
\qquad (16)
$$

donc pour la classe on a $q = 1$.

Si la fonction $\psi(x^1, x^2)$ se réduit à $(x^2)^2$ l'espace K_3^* est symétrique dans le sens de Cartan, et de (16) on déduit les transformations qui permettent d'écrire l'élément linéaire sous la forme euclidienne:

$$
\begin{aligned}
y^1 &= x^2 \cos x^1 & y^3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + x^3) \\
y^2 &= x^2 \sin x^1 & y^4 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(x^1 - x^3)
\end{aligned}
\qquad (17)
$$

donc $q = 1$

Pour les espaces K_4^* de metrique $ds^2 = \psi(x^1, x^2)(dx^1)^2 + 2dx^1\, dx^3 + 2dx^2\, dx^4$ si la fonction $\psi(x^1, x^2)$ est une fonction arbitraire de x^1, x^2, on a les transformations

$$
\begin{aligned}
y^1 &= \sqrt{\psi(x^1, x^2)}\cos x^1 & y^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + x^3) \\
y^2 &= \sqrt{\psi(x^1, x^2)}\sin x^1 & y^5 &= \frac{i}{\sqrt{2}}(x^1 - x^3) \\
y^3 &= i\sqrt{\psi(x^1, x^2)} & y^6 &= \frac{}{\sqrt{2}}(x^2 + x^4)
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

$$y^7 = \frac{i}{\sqrt{2}}(x^2 - x^4)$$

donc $q \leqslant 3$.

Si $\psi(x^1,x^2) = (x^2)^2\,\varphi\,(x^1)$ on a :

$$
\begin{aligned}
y^1 &= x^2 \cos\int\sqrt{\varphi(x^1)}\;dx^1 & y^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\,(x^1 + x^3) \\
y^2 &= x^2 \sin\int\sqrt{\varphi(x^1)}\;dx^1 & y^5 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\,(x^1 - x^3) \\
y^3 &= x^4 & y^6 &= i\,(x^2 - x^4)
\end{aligned}
\tag{19}
$$

donc $q \leqslant 2$.

Si la fonction $\psi\,(x^1,\,x^2)$ se réduit à $(x^2)^2$ l'espace K_4^* est symétrique dans le sens de Cartan, et on a :

$$
\begin{aligned}
y^1 &= x^2 \cos\,x^1 & y^4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + x^3) \\
y^2 &= x^2 \sin\,x^1 & y^5 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\,(x^1 - x^3) \\
y^3 &= i(x^2 - x^4) & y^6 &= x^4
\end{aligned}
\tag{20}
$$

donc pour la classe on a $q \leqslant 2$. Ainsi on a :

PROPOSITION *3.* Les espaces K_n^* simples de deuxième et troisième catégorie, ont la classe tout au plus égale à trois si la fonction $\psi\,(x^1,\,x^2)$ est arbitraire. Ils sont de classe un dans le cas (16) et (17)et de classe tout au plus égal à deux dans le cas (15), (19) et (20).

Pour les espaces K_n^* qui ne sont pas simples de métrique (11) les transformations

$$
\begin{aligned}
y^1 &= \sqrt{\psi - 1}\,\cos\,x^1 & y^6 &= x^3 \\
y^2 &= \sqrt{\psi - 1}\,\sin\,x^1 & y^7 &= x^4 \\
y^3 &= \sqrt{1 - \psi} & &- - - \\
y^4 &= x^1 + x^2 & y^{n+3} &= x \\
y^5 &= ix^2 & &
\end{aligned}
\tag{21}
$$

permettent d'écrire l'élément linéaire sous la forme euclidienne. Le plongement ayant lieu dans un E_{n+3} pour la classe on a $q \leqslant 3$, et donc on a :

PROPOSITION *4.* Les espaces K_n^* non-symples sont de classe tout au plus égale à trois.

De ces quatre propositions on peut déduire la suivante

THÉORÈME: *Tous les espaces K_n^*, sont de classe tout au plus égale à trois, ils pouvant être aussi de classe un ou deux si la fonction ψ qui intervient dans les formes canoniques (9), (10), (11), a des formes particulières.*

(Manuscrit reçu le 1 février 1972)

BIBLIOGRAPHIE

1. C a r t a n, E., *Sur la possibilité de plonger un espace riemannian donné dans un espace euclidien*, „Ann. Soc. Pol. Math.", **6** (1927), 1—7.
2. C h a k i, M. C., *Some theoreme on recurrent and Ricci-recurrent space*, „Rendiconti del Sem. Math. della Univ. di Padova", **XXVI**, (1956), 168—176.
3. E n g h i ş, P., *Asupra clasei spaţiilor riemanniene V_3 cu grup de mişcări netranzitiv*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser . Math.-Phys." f. 1 (1963), 25—32.
4. P a t e r s o n, E. M., *Some theorems on Ricci-recurrent spaces*, „Journ. London Math. Soc.", **27** (1952), 287—295.
5. W a l k e r, A. G., *On Ruse' s spaces of recurrent curvature*, „Proc. London Math. Soc.", **2** (1950), 36—64.

ASUPRA CLASEI SPAŢIILOR K_n^*

(R e z u m a t)

În lucrare se studiază clasa spaţiilor K_n^*, după notaţia lui W a l k e r [5]. Se arată că orice spaţiu K_n^* are clasa cel mult trei, ea putînd fi mai mică decît trei dacă funcţia ψ care intervine în formele canonice (9), (10) şi (11) are forme particulare.

О КЛАССЕ ПРОСТРАНСТВ K_n^*

(Р е з ю м е)

В работе изучается класс пространств K_n^* согласно обозначению В а л к е р а [5]. Показано, что любое пространство K_n^* имеет самое большее класс 3, причем этот класс может быть меньше, чем 3, если функция ψ, участвующая в канонических формах (9), (10) и (11), имеет частные формы.

GRUPURI ($G.S$) CU SISTEM DE GENERATORI INVOLUTIVI (I)

ANGELA VASIU

Însemnătatea mare a grupurilor de transformări pentru tratarea problemelor de geometrie a fost recunoscută de la sfîrşitul secolului trecut. F. Klein, în *Programul de la Erlangen,* concepe geometria ca studiul proprietăţilor invariante la un grup de transformări. De atunci sistemele de axiome ale mai multor geometrii se bazează pe noţiuni din teoria grupurilor.

Acest lucru a fost posibil în urma stabilirii faptului că geometria poate fi transpusă în grupul automorfismelor sale generat de simetrii. Pentru geometria metrică plană au fost date mai multe sisteme de axiome bazate pe proprietăţi grupale [2], [5], [6], [7], [8].

În această notă se dă un sistem de axiome al geometriei absolute a spaţiului în baza proprietăţilor grupale, diferit atît prin formulare cît şi prin gradul de generalitate faţă de cele date în [1], [3] şi [4].

1. Sistemul de axiome. Fie G un grup care admite un sistem de generatori S format numai din elemente involutive. Elementele lui S le notăm cu literele mici ale alfabetului latin $a, b, c, \ldots$, iar elementele lui G cu literele mici ale alfabetului grecesc $\alpha, \beta, \ldots$

Fie:

$$M = \{\alpha \mid \alpha = abc,\ a,\ b,\ c \in S,\ abc \overline{\in} S\}.$$

DEFINIŢIA *1. 1.* Dacă $\alpha \in M$ atunci submulţimea elementelor lui S:

$$P(\alpha) = \{x \mid x\}\ x \in S,\ \alpha x \in S^2\}$$

o numim un *snop.*

DEFINIŢIA *1.2.* Două snopuri distincte $P(\alpha)$ şi $P(\beta)$ se numesc *jonctibile* dacă există $x, y \in S$, $x \neq y$ astfel ca $x, y \in P(\alpha) \cap P(\beta)$.

DEFINIŢIA *1.3.* Un snop $P(\alpha)$ cu proprietatea că oricare ar fi $\beta, \gamma \in M$ cu $P(\beta) \neq P(\gamma)$, mulţimea $P(\alpha) \cap P(\beta) \cap P(\gamma) \neq \emptyset$ se numeşte *snop propriu.*

DEFINIŢIA *1.4.* Un snop $P(\alpha)$ se numeşte *nesingular* dacă oricare ar fi $a, b \in P(\alpha)$ există un element $c \in P(\alpha)$ şi $abc \,\overline{\in}\, S$ astfel $ac \neq ca$. În caz contrar snopul se numeşte *singular*.

Asupra grupului G impunem următoarele axiome:

AXIOMA *A. Din* $x_1, x_2, x_3 \in P(\alpha) \cap P(\beta)$ *cu proprietatea* $P(\alpha) \neq P(\beta)$ *rezultă* $x_1x_2x_3 \in S$.

AXIOMA *B. Pentru* $x_1, x_2 \in S$, $x_1 \neq x_2$ *există* $P(\alpha)$ *şi* $P(\beta)$ *cu* $P(\alpha) \neq P(\beta)$ *astfel ca* $x_1, x_2 \in P(\alpha) \cap P(\beta)$.

AXIOMA C. *Există un snop propriu nesingular* $P(\gamma)$ *şi un element* $u \in S$ *astfel ca* $\gamma u \,\overline{\in}\, S^2$ *şi* $au \neq ua$ *pentru cel puţin un element* $a \in P(\gamma)$.

DEFINIŢIA *1.5.* Dacă $x,y \in S$ şi $x \neq y$ atunci submulţimea elementelor lui S notată prin $D(x,y)$;

$$D(x,y) = \{z \mid xyz \in S\}$$

o numim *fasciculul* determinat de elementele x şi y.

2. Primele consecinţe ale sistemului de axiome.

TEOREMA *2.1. Dacă* $a, b \in S$ *atunci* $aba \in S$.

Demonstraţie. Conform axiomei B pentru $a,b \in S$, $a \neq b$ există perechea $\alpha, \beta \in M$ astfel ca $P(\alpha) \neq P(\beta)$ şi $a,b \in P(\alpha) \cap P(\beta)$. Avem deci $a,b,a \in P(\alpha) \cap P(\beta)$, iar conform axiomei A avem $aba \in S$. Pentru $a = b$, $aba = aaa = a \in S$.

COROLAR *1. Sistemul de generatori* S *este invariant faţă de automorfismele interne ale lui* G, *adică din* $a \in S$, $\alpha \in G$ *rezultă* $a^\alpha = \alpha^{-1} a\alpha \in S$.

COROLAR *2. Oricare ar fi* $\alpha \in M$, $\alpha = abc$ *avem* $a \neq b \neq c \neq a$.

COROLAR *3. Dacă* $\alpha \in M$, $\beta \in G$ *atunci* $\alpha^\beta \in M$.

COROLAR *4. Dacă* $\alpha = abc \,\overline{\in}\, S$ *atunci* $a, b, c \in P(\alpha)$.

TEOREMA *2.2. Dacă* $abc \,\overline{\in}\, S$ *şi* $a, b, c \in P(\alpha) \cap P(\beta)$ *rezultă* $P(\alpha) = P(\beta)$.

Demonstraţie. Presupunem $P(\alpha) \neq P(\beta)$ atunci din $a,b,c \in P(\alpha) \cap P(\beta)$ conform axiomei A rezultă $abc \in S$, contrar ipotezei, rezultă deci $P(\alpha) = P(\beta)$.

Se poate deci afirma că intersecţia a două snopuri distincte nu poate conţine trei elemente a,b,c cu $abc \,\overline{\in}\, S$ sau, cu alte cuvinte, că trei elemente a,b,c cu $abc \,\overline{\in}\, S$ individualizează un singur snop. În acest caz snopul $P(\alpha)$ îl vom nota şi prin $P(a,b,c)$ sau $P(abc)$.

TEOREMA *2.3. Dacă* $x \in P(\alpha)$, $\alpha = abc$ *şi* $xabc = zt$ *avem* $z, t \in P(\alpha)$ *şi* $xzt \,\overline{\in}\, S$.

Demonstrație, $x\alpha = zt$ implică $\alpha t = xz$ şi deci $t \in P(\alpha)$.

Din $x\alpha = zt = ztzz = t'z$ avem $\alpha z = xt'$ şi deci $z \in P(\alpha)$.
Afirmația a doua rezultă din: $xzt = abc \,\overline{\in} S$.

TEOREMA 2.4. *Dacă $x,y, z, t \in P(abc)$ atunci $xyzt \in S^2$.*

Demonstrație. Dacă trei elemente dintre $xyzt$ au produsul în S demonstrația este evidentă. Presupunem că $xyz \,\overline{\in}\, S$. Avem conform corolarului 4 al teoremei 2. 1 $x,y,z \in P(xyz)$ şi prin ipoteza $x, y, z \in P(abc)$ rezultă conform teoremei 2.2 că $P(abc) = P(xyz)$. Deoarece prin ipoteza $t \in P(abc)$ avem $t \in P(xyz)$ şi deci $xyzt \in S^2$.

Următoarea teoremă ne dă o completare a axiomei A.

TEOREMA 2.5. *Dacă $x,y,z \in P(\alpha)$ atunci de asemenea $xyz \in P(\alpha)$.*

Demonstrație. Pentru demonstrația acestei teoreme va trebui să arătăm că $\alpha\, xyz \in S^2$ dacă $x,y,z \in P(\alpha)$. Din $\alpha x = uv \in S^2$ conform teoremei 2.3 $u, v \in P(\alpha)$. Avem deci $u, v,y,z \in P(\alpha)$. Pe baza teoremei precedente $uvyz \in S^2$ dar $uvyz = \alpha\, xyz$ ceea ce demonstrează teorema.
Ca o consecință a axiomei A putem stabili:

TEOREMA 2.6. *Dacă $x \neq y$ şi $x, y \in P(\alpha) \cap P(\beta)$ cu $P(\alpha) \neq P(\beta)$ atunci $P(\alpha) \cap P(\beta) \subseteq D(x,y)$.*

Demonstrație. Într-adevăr, pentru orice $z \in P(\alpha) \cap P(\beta)$ avem $xyz \in S$ conform axiomei A şi deci $z \in D(x,y)$.

TEOREMA 2.7. *Din $abx_i \in S$ pentru $i=1,2, 3$ cu $a \neq b$ rezultă $x_1x_2x_3 \in S$.*

Demonstrație. Fie $S_0 = \{x | \, xab \,\overline{\in}\, S\}$ şi $x_0 \in S_0$ şi presupunem $x_1x_2x_3 \,\overline{\in}\, S$. Avem $x_0abx_1 \in S^2$, $x_0\, abx_2 \in S^2$, $x_0abx_3 \in S^2$ pe baza ipotezei, iar $x_0abx_0 \in S^2$ ca o consecință a teoremei 2.1. Conform teoremei 2.4 obținem $x_0x_1x_2x_3 \in S^2$. Am obținut în acest fel $S_0 \subseteq P(x_1x_2x_3)$, ceea ce este în contradicție cu axioma B.

Vom demonstra acum o teoremă din care va rezulta că definiția fasciculului $D(x,y)$ nu depinde de alegerea elementelor $x \neq y$ din fascicul.

Teorema 2.8. *Fie a,b,x,y cu $a \neq b$ şi $x \neq y$ atunci avem $x,y \in D(a,b)$ dacă şi numai dacă $D(x,y) = D(a,b)$.*

Demonstrație. Să observăm mai întîi că $x,y \in D(x,y)$ deoarece $xyx \in S$ şi $xyy = x \in S$.

Fie acum $x,y \in D(a,b)$ şi un $z \in D(a,b)$ atunci conform teoremei 2.6 rezultă $xyz \in S$ din $abx \in S$, $aby \in S$ şi $abz \in S$, ceea ce înseamnă că $z \in D(x,y)$. Am arătat prin aceasta că $D(a,b) \subseteq D(x,y)$.
Avem de asemenea $a, b \in D(a, b) \subseteq D(x,y)$ şi putem folosi acelaşi raționament schimbînd perechea x,y cu a,b şi obținem $D(x,y) \subseteq D(a,b)$.
În particular avem $D(x,y) = D(y,x)$.

COROLAR. *Două fascicule distincte* D_1, D_2 *au cel mult un element comun.*

Următoarea teoremă este o completare a teoremei 2.6.

TEOREMA 2.9. *Din* $x,y,z \in D(a,b)$ *rezultă* $xyz \in D(a,b)$.

Demonstrație. Dacă $x = y$ proprietatea este evidentă. Putem presupune deci că $x \neq y$. Atunci conform teoremei precedente avem $D(a,b) = D(x,y)$. Din: $(yx)\ (xyz) = z \in S$ rezultă $xyz \in D(y,x) = D\ (x,y) = D\ (a,b)$ ceea ce demonstrează teorema.

Un cuplu $(G.S)$ care verifică sistemul de axiome îl numim grup de mişcări sau de transformări. Elementele lui S le numim simetrii, iar elementele lui G mişcări. Mişcările sînt concepute aici ca elementele unui grup abstract şi nu ca transformări ale unui anumit domeniu.

3. Spaţiul asociat grupului dat G. Asociem grupului abstract G şi sistemului de generatori S o structură geometrică, numită spaţiul de incidenţă asociat perechii (G.S) pe care-l notăm prin $\mathfrak{S}$ (G.S). Spaţiul de incidenţă asociat va consta din ansamblul ($\mathfrak{P}$, $\mathfrak{D}$, S, $\in$) al mulţimii snopurilor, fasciculelor, sistemului de generatori S şi relaţia de apartenenţă ($\in$) între elementele lui S şi cele ale lui $\mathfrak{P}$ şi $\mathfrak{D}$. Elementele lui S le numim plane, elementele lui $\mathfrak{P}$ le numim puncte, iar cele ale lui $\mathfrak{D}$ drepte.

Vom numi snopurile proprii puncte proprii. Incidenţa între puncte, drepte şi spaţii este definită prin relaţia de apartenenţă. În $\mathfrak{S}$ $(G.\ S)$ vom folosi pentru relaţia „$\in$" de apartenenţă din G şi notaţia „I" de incidenţă.

DEFINIŢIA 3.1. Dacă un plan $a \in D$ spunem că planul a trece prin dreapta D sau că dreapta D şi planul a sînt incidente şi notăm prin aID sau DIa.

DEFINIŢIA 3.2. Dacă planul $a \in P$ spunem că planul a trece prin punctul P sau că punctul P aparţine planului a sau că punctul P şi planul a sînt incidente şi notăm prin PIa sau aIP.

DEFINIŢIA 3.3. Trei puncte P_1, P_2, P_3 se spun coliniare dacă există x,y cu $x \neq y$ astfel ca $x,\ y \in P_1 \cap P_2 \cap P_3$.

DEFINIŢIA 3.4. Dacă $a,b, \in P$ şi $a \neq b$ se spune că dreapta determinată de planele a, b trece prin punctul P sau că punctul P şi dreapta D sînt incidente şi notăm PID sau DIP.

Din teoremele de la punctul 2 reiese că spaţiul asociat grupului este o structură de incidenţă în care prin două puncte distincte trece cel mult o dreaptă (conform teoremei 2. 6); prin trei puncte necoliniare trece cel mult un plan (conform definiţiei 3.3); printr-o dreaptă şi un punct neincident cu ea trece cel mult un plan. Două plane distincte sînt incidente totdeauna cu o singură dreaptă (conform teoremei 2.8).

DEFINIŢIA 3.5. Două plane a şi b, $a \neq b$ se numesc perpendiculare şi notăm $a \perp b$ sau $b \perp a$ dacă produsul ab este involutiv.

4. Deplasările spațiului asociat $\mathcal{S}$ (G, S).

DEFINIȚIA 4.1. Prin transformarea unui element $\alpha \in G$ printr-un element $\gamma \in G$ înțelegem următoarea aplicație notată exponențial α^γ:

$$\begin{aligned} G &\to G \\ \alpha &\mapsto \gamma^{-1}\alpha\gamma \end{aligned} \tag{1}$$

Deoarece sistemul de generatori S este un complex invariant prin transformarea (1), S se transformă bijectiv în S.

Pentru a putea introduce noțiunea de deplasare a spațiului grupal asociat vom da definiția transformării punctelor și dreptelor.

Fie $P(\alpha)$ un punct și $D(x,y)$ o dreaptă, iar γ un element din G, atunci definim:

DEFINIȚIA 4.2. $P(\alpha)^\gamma = \{x^\gamma | \, x \in P(\alpha)\}$

$$D(x, y)^\gamma = \}z^\gamma | \, z \in D(x, y)\}$$

Sistemul de generatori S fiind invariant, mulțimile $P(\alpha)^\gamma$ și $D(x,y)^\gamma$ sînt submulțimi de elemente din S.

În cele ce urmează vom demonstra că mulțimile $P(\alpha)^\gamma$ și $D(x,y)^\gamma$ sînt puncte, respectiv drepte. Pentru aceasta este suficient să arătăm că $P(\alpha)^d$ și $D(x,y)^d$ reprezintă un punct, respectiv o dreaptă, ceea ce va rezulta din următoarea teoremă:

TEOREMA 4.1. $P(\alpha)^d = P(\alpha^d)$; $D(x, y)^a = D(x^a, y^a)$.

Demonstrație. Avem $P(\alpha)^d = \{x^d | \alpha x \in S^2\}$. Să arătăm mai întîi că dacă $\alpha \; x \in S^2$ atunci $\alpha^d x^d \in S^2$.

Fie $\alpha x = bc$ atunci

$\alpha^d x^d = d\alpha ddxd = d\alpha xd = dbcb = dbddcd = b'c' \in S^2$, adică avem proprietatea că din $x^d \in P(\alpha^d)$ rezultă $P(\alpha)^d \supseteq P(\alpha^d)$.

Invers dacă $y \in P(\alpha^d)$ avem $\alpha^d y \in S^2$ și fie $\alpha^d y = ab$ atunci $(\alpha^d y)^d = (ab)^d = dabd = a'b' \in S^2$. Deci $d^2\alpha d^2 dyd = \alpha y^d = a'b' \in S^2$, de unde avem și incluziunea inversă $P(\alpha^d) \subseteq P(\alpha)^d$.

Fie $z \in D(x, y)$ atunci $xyz \in S$ și fie $xyz = b$ atunci $x^a y^a z^a = (xyz)^a = b^a = b' \in S$ și deci $D(x, y)^a \subseteq D(x^a y^a)$.

Invers fie $z \in D(x^a, y^a)$ deci avem $x^a y^a z = c$ atunci $(x^a y^a z)^a = a^2xa^2a^2ya^2az = xyz^a = c^a = d$ și deci avem și incluziunea inversă $D(x^a, y^a) \subseteq D(x, y)^a$.

Rezultă că aplicația (1) este o transformare biunivocă în mulțimea planelor, dreptelor și punctelor spațiului asociat $\mathcal{S}$ (G.S) care păstrează incidențele.

DEFINIŢIA 4.3. O transformare definită prin (1) o numim o deplasare a spaţiului asociat $\mathbb{S}$ $(G.S)$.

Pentru $\gamma = a$ numim deplasarea corespunzătoare o simetrie a spaţiului în raport cu planul a. Planele x şi transformatul său $x^a = axa$ se zic simetrice faţă de planul a.

TEOREMA 4.2. Aplicaţia (1) invariază perpendicularitatea a două plane.

Demonstraţie. Pentru demonstraţie e suficient să considerăm numai cazul $\gamma = a$. Din $x \neq y$ rezultă $x^a \neq y^a$ şi $xy = yx$ implică $x^a y^a = axaaya = axya = ayxa = ayaaxa = y^a x^a$.

DEFINIŢIA 4.4. O dreaptă $D(x,y)$ cu proprietatea $D(x,y)^a = D(x,y)$ şi $a \overline{\in} D(x,y)$ se numeşte perpendiculară pe planul a şi notăm $D(x, y) \perp a$ sau $a \perp D(x, y)$.

TEOREMA 4.3. *Dacă în transformarea (1) $\gamma = a$ atunci planul a rămîne fix prin transformarea (1). De asemenea punctele şi dreptele incidente cu a, planele perpendiculare pe a şi dreptele perpendiculare pe planul a sînt elemente fixe ale transformării (1).*

Demonstraţie. Planul a este fix deoarece $a^a = aaa = a$. Dacă $a \in P(\alpha)$ atunci pentru orice plan $x \in P(\alpha)$ conform teoremei 2.5. $axa \in P(\alpha)$ şi deci $P(\alpha)^a \subseteq P(\alpha)$, de unde rezultă imediat că $P(\alpha)^a = P(\alpha)$.

În mod analog pentru o dreaptă $D(x,y)$ cu proprietatea $D(x, y) \ni a$ pentru orice $z \in D(x,y)$ avem $a,z,a \in D(x,y)$ şi deci conform teoremei 2.9 avem $aza \in D(x, y)$ adică $D(x, y)^a = D(x, y)$.

Pentru partea a doua a teoremei fie x un plan perpendicular pe planul a, adică $xa = ax$ şi deci $x^a = x$. Deci un plan perpendicular pe planul a rămîne fix printr-o simetrie faţă de planul a.

Invers, un plan fix printr-o transformare (1) cînd $\gamma = a$ şi $x \neq a$ este perpendicular pe planul a. Într-adevăr din $x^a = x$ rezultă $axa = x$ şi deci $xa = ax$, adică $x \perp a$.

TEOREMA 4.4. *Dreptele de forma $D(x,y)$ cu $x,y \perp a$ sînt perpendiculare pe planul a.*

Demonstraţie. Pentru demonstraţie, avînd în vedere definiţia 4.4, va trebui să arătăm că $D(x,y)^a = D(x,y)$. Avem $x^a = x, y^a = y$ şi deci $D(x,y) = D(x^a, y^a) = D(x, y)^a$, conform teoremei 2.8.

DEFINIŢIA 4.5. Un punct $P(\alpha)$ cu proprietatea că oricare ar fi $x \in P(\alpha)$, x este perpendicular pe planul a se numeşte un pol al planului a sau un punct polar al planului a.

TEOREMA 4.5. Dacă $P(\alpha)$ este un punct propriu atunci $P(\alpha)^\delta$ este de asemenea un punct propriu oricare ar fi $\delta \in G$.

Demonstrație. Pentru demonstrație este suficient să arătăm că $P(\alpha^a)$ este un punct propriu dacă $P(\alpha)$ este un punct propriu. Pentru aceasta fie $\beta, \gamma \in M$ cu $P(\beta) \neq P(\gamma)$ atunci știm, conform corolarului 3 al teoremei 2.1, că $\beta^a, \gamma^a \in M$. Deoarece $P(\alpha)$ este un punct propriu conform definiției sale există un plan $z \in P(\alpha) \cap P(\beta^a) \cap P(\gamma^a)$. Fie $u = z^a$ atunci rezultă că $u \in P(x^a) \cap P(\beta) \cap P(\gamma)$, ceea ce înseamnă că $P(\alpha^a)$ este un punct propriu.

TEOREMA 4.6. *Aplicația (1) $\alpha \mapsto \alpha^\gamma$ este un endomorfism al grupului G. Mulțimea transformărilor (1) formează un grup, G^*.*

Demonstrație. Într-adevăr:

$$(\alpha\beta)^\gamma = \gamma^{-1}\alpha\beta\gamma = \gamma^{-1}\alpha\gamma\gamma^{-1}\beta\gamma = \alpha^\gamma\beta^\gamma$$

Pentru partea a doua a teoremei fie $\gamma_1, \gamma_2 \in G$, atunci produsul a două transformări (1) pentru γ egal cu γ_1, respectiv γ_2 este de asemenea o transformare de tip (1) și anume este transformarea definită de $\gamma = \gamma_1\gamma_2$. Inversa unei transformări de tipul (1) este definită prin: $\alpha \mapsto \gamma\alpha\gamma^{-1}$.

Dacă asociem unui element $\gamma \in G$ endomorfismul (1) definit prin γ pe care-l notăm $\tilde{\gamma}$ obținem un omomorfism φ al grupului G pe grupul G^*, deoareces $\widetilde{\alpha_1\alpha_1} = \tilde{\alpha}_1\tilde{\alpha}_2$.

Din teorema următoare vom desprinde în ce caz acest omomorfism este un izomorfism. Fie C centrul grupului G.

TEOREMA 4.7. $G^* \cong G/C$.

Demonstrație. Din teoria grupurilor avem proprietatea că grupul automorfismelor interioare G^* al unui grup G este izomorf cu grupul cît al lui G față de nucleul omomorfismului φ.

Fie σ un element al nucleului omomorfismului φ, adică $\tilde{\sigma}(\alpha) = \alpha$, $\forall \alpha \in G$. Avem: $\tilde{\sigma}(\alpha) = \sigma^{-1}\alpha\sigma = \alpha$ adică $\alpha \in C$, centrul grupului.

Invers, orice element al centrului aparține nucleului corespondenței noastre.

Dacă centrul C al grupului G este trivial atunci grupurile G și G^* sînt izomorfe. În acest caz teoria dedusă din grupul G care verifică sistemul de axiome dat este aceeași cu geometria spațiului asociat $\mathcal{S}$ (G.S), relațiile grupale transpunîndu-se în proprietăți geometrice, și o numim geometria fără centru. Ea servește ca fundament comun pentru diferite geometrii metrice ale spațiului.

În cazul în care C conține și alte elemente diferite de elementul unitate, teoria dedusă din G se va numi o geometrie cu centru.

(Intrat în redacție la 15 octombrie 1972)

BIBLIOGRAFIE

1. Ahrens, J., *Begründung der absoluten Geometrie des Raumes aus dem Spiegelungsbegriff*, „Math. Zeitschr", **71** (1959).
2. Bachmann, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, „Grundlehren d. Math. Wiss.", **96** (1959).
3. Dicuonzo, V., *Su una classe de spezi metrici generalizzati*, „Rend. di Mat. e delle sue appl.", **XXIV**, 11–14.
4. Dicuonzo, V., *Sulla construzione gruppale di una geometria metrica a debole struttura d'incidenzo*, „Rend. di Mat. e delle sue appl.", **XXV**, 593–603.
5. Karzel, H., *Ein Axiomensystem der absoluten Geometrie*, „Arch. Math.", **6** (1955), 66–76.
6. Karzel, H., *Verallgemeinerte absolute Geometrien und Lotherngeometrien*, „Arch. Math.", **6** (1955), 284–295.
7. Lingenberg, R., *Über Gruppen mit einem invarianten System involutorischer Erzeugender, in dem der allgemeine Satz von den drei Spiegelungen gilt, I, II, III, IV*, „Math. Ann.", **137** (1959), 26–41, 83–106; **142** (1961), 184–224; **158** (1965), 297–325.
8. Sperner, E., *Ein gruppentheoretischer Beweis des Satzes von Desargues in der absoluten Axiomatik*, „Arch. Math.", **5** (1954), 458–468.
9. Vasiu, A., *Fundamentarea geometriei absolute metrice a spațiului în baza proprietăților grupale*, Teză de doctorat, Cluj. (1972).

ГРУППЫ (G. S) С СИСТЕМОЙ ИНВОЛЮТИВНЫХ ГЕНЕРАТОРОВ (I)

(Резюме)

В работе дается система аксиом для абстрактной группы, допускающей систему генераторов S, составленную только из инволютивных элементов. К паре $(G.S)$, называемой группой движений, присоединяется геометрическая структура, называемая пространством, присоединенным к группе G и обозначенным через $\mathcal{S}$ $(G.\ S)$. Пространства $\mathcal{S}$ $(G.S)$ независимы от аксиом упорядочения, непрерывности и транзитивности.

Если центр C группы G является тривиальным, то доказывается, что теория, выведенная из группы G, удовлетворяющей данной системе аксиом, совпадает с геометрией присоединенного пространства $\mathcal{S}$ $(G.S)$, причем групповые соотношения становятся геометрическими свойствами. Интерпретированная таким образом система аксиом становится системой аксиом для абсолютной геометрии пространства.

ON $(G.S.)$ GROUPS WITH A SYSTEM OF INVOLUTIVE GENERATORS (I)

(Summary)

A system of axioms is given for an abstract group which admits a system of generators S consisting only of involutive elements. A geometric structure, called the space associated to the group G and noted $\mathcal{S}$ $(G.S.)$ is associated to the $(G.S)$ couple, called a group of motions. The $\mathcal{S}$ $(G.S.)$ spaces are independent of axioms of ordination, continuity and transitivity.

If the centre C of the group G is trivial, it is demonstrated that the theory deduced from the group G which verifies the given system of axioms is the same as the geometry of the $\mathcal{S}$ $(G.S)$ associated space, the group relations being transposed in geometric properties. The system of axioms thus interpreted becomes a system of axioms for the absolute geometry of space.

UNE DÉFINITION AXIOMATIQUE DE L'INTÉGRALE (I)

MARCEL RĂDULESCU

Dans plusieurs articles [4,5,6,7] l'auteur a défini et a étudié l'intégrale M_*. On sait toutefois que dans la théorie de l'intégrale [1,2,3] sont utilisées des définitions axiomatiques. Dans cette note on donne une définition axiomatique de l'intégrale qui est verifiée par l'intégrale M_*.

1. La fonctionnelle intégrale. Soit $B \subset \mathbf{R}$, un ensemble borné et $a = \inf B$, $b = \sup B$; on dira que B est une base si $m(B) = b - a$. Pour préciser que B est une base de l'intervalle $[a,b]$, on écrira au lieu de B, $B(a,b)$. Soient B_1, B_2 deux bases; si $B_1 \subset B_2$ alors B_1 sera nommé une sousbase de B_2. Nous dirons que $\mathfrak{B}$ ou $\mathfrak{B}(a,b)$ est *une classe génératrice des bases de l'intervalle* $[a,b]$ si les conditions suivantes sont satisfaites:

b_1. Il existe une base $B(a,b) \in \mathfrak{B}$.

b_2. *Si* $B \in \mathfrak{B}$ et B' *est une sousbase de* la base B alors $B' \in \mathfrak{B}$.

b_3. *Si* $B \in \mathfrak{B}$ *alors* $B \subset [a,b]$.

Soit $\mathfrak{F}$ une classe de fonctions définies sur des bases d'une classe génératrice $\mathfrak{B}$ (a,b) de bases. Si $B' \subset B \in \mathfrak{B}$, B' est une sousbase de B et la fonction $f \in \mathfrak{F}$ définie sur B, alors nous noterons par $f_{B'}$ la restriction de f à B'.

DÉFINITION 1. *L'ensemble* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}$ *s'appelle domaine d'intégrabilité, si les conditions suivantes sont satisfaites*:

d_1. *Il existe pour* $f \in \mathfrak{F}$, *la base* $B(a,b) \in \mathfrak{B}$ *de sorte que* $f: B \to \mathbf{R}$ *et* $(f_{B'}, B') \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ *pour une sousbase* B' *de* B.

d_2. *Si* $(f,B) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, *alors* $(\alpha f,B) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$.

d_3. *Si* (f,B_1), $(g,B_2) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$, *alors* $(f + g, B_1 \cap B_2) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$.

d_4. *N'importe quelle serait la fonction linéaire sur* $B \in \mathfrak{B}$: $f(x) = \alpha x + \beta$, $x \in B$, *alors* $(f,B) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$.

Une classe de fonctions $\mathfrak{F}$ définies presque partout sur $[a,b,]$, pour laquelle il existe une classe génératrice de bases $\mathfrak{B}$ (a,b) de sorte que $\mathfrak{F}_{\mathfrak{B}} \subset \mathfrak{F} \times \mathfrak{B}$. est un domaine d'intégrabilité, on dit qu'elle peut être organisée comme un domaine d'intégrabilité. Un exemple de classe de fonctions qui peut être organisée comme un domaine d'intégrabilité, est la classe S des fonctions définies presque partout sur $[a,b]$ et qui sont sommables. Dans ce cas $[a,b] \in \mathcal{B}(a,b)$, et donc, n'importe quelle serait la sous-base $B \subset [a,b]$, on a $B \in \mathcal{B}(a,b)$. En général, si $[a,b] \in \mathcal{B}(a,b)$, on écrira $\mathcal{F}$ au lieu de $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$.

Soit $B = B(a,b)$ une base et $A \subset [a,b]$ un ensemble fermé. Nous allons noter par i_A l'ensemble des points isolés de l'ensemble A. On dit que l'ensemble A segmente la base B si les extremités des intervalles contigus de l'ensemble A qui n'appartiennent pas à l'ensemble i_A, appartiennent à l'ensemble B. Si pour l'intervalle $[u,v]$, $u, v \in A$, l'ensemble $A \cap]u,v[$ est vide ou fini, on dit que $[u,v]$ est un intervalle contigu de l'ensemble A par rapport à B. Soit $[a_i, b_i]$, $i \in I$ les intervalles contigus de l'ensemble A par rapport à B ; on désignera par B_i : $B_i = B \subset [a_i, b_i]$, $i \in I$.

Si $A \subset [a, b]$ est un ensemble mesurable et $x \in]a,b[$, soit $A_h = A \subset [x - h, x + h]$, $h > 0$. On considère

$$\nu(A,x) = \lim_{h \to 0} \frac{m(A_h)}{2h} .$$

Dans ce cas $0 \leqslant \nu(A,x) \leqslant 1$. Si $\nu(A,x) > 0$, le point x est de densité positive.

DÉFINITION 2. *Une fonctionnelle*

$$I_B(f) : \mathcal{F}_{\mathcal{B}} \to \mathbf{R}, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(a,b)$$

définie sur un domaine d'intégrabilité, avec des valeurs réelles, est nommée fonctionnelle intégrale, si elle vérifie les axiomes suivantes :

1°. *Si* $(f,B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, $B = B(u,v)$, *et* $c \in B$ *alors*

$$I_{\mathcal{B}}(f) = I_{B'}(f) + I_{B''}(f) \tag{1.1}$$

où $B' = B \subset [u,c]$, $B'' = B \subset [c,v]$.

2°. *Pour* $(f,B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ *et* $\alpha \in \mathbf{R}$, *nous avons*

$$I_B(\alpha f) = \alpha I_B(f). \tag{1,2}$$

3°. *Soient* (f,B_1), $(g,B_2) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, $B_1 = B_1(u,v)$, $B_2 = B_2(u,v)$, $[u,v] \subset \subset [a,b]$ *et* $B_3 = B_1 \cap B_2$; *alors*

$$I_{B_3}(f + g) = I_{B_1}(f) + I_{B_2}(g). \tag{1,3}$$

4°. *Si et seulement si* $f : B \in \to \mathbf{R}$ *est une fonction linéaire,* $f(x) = \alpha x + + \beta$, $x \in B$; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *pour n'importe quelle sousbase* $B' = B'(u,v) \subset B$, *nous avons*

$$\mathfrak{I}_{B'}(f) = \frac{f(u) + f(v)}{2}(v - u). \tag{1,4}$$

5°. *Soit* $(f,B) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$, *A un ensemble fermé qui segmente la base* $B \in \mathfrak{B}$ *et* $[a_i, b_i]$, $i \in I$, *les intervalles contigus de l'ensemble A par rapport á B, de sorte que* $f(x) = 0$, $x \in A \cap B$ *alors*

$$\mathfrak{I}_B(f) = \sum_{i \in I} \mathfrak{I}_{B_i}(f), \quad B_i = B \cap [a_i, b_i]. \tag{1,5}$$

6°. *Il existe pour* $(f,B) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$, $B = B(u,v)$, $[u,v] \subset [a,b]$ *et* $x \in B \cap]a,b[$, *un ensemble* $A_x \subset [a, b]$ *sur lequel la fonction f est bornée et* $\nu(A_x, x) = 1$, *de sorte que, n'importe quel serait l'ensemble fermé* $A \subset A_x$ *qui segmente la base B et* $\nu(A,x) > 0$, *la limite*

$$\lim_{h \to 0} \sum_{x-h}^{x+h}{}_i \mathcal{F}_{B_i}(f) = 0, \ h > 0, \ x - h, \ x + h \in A_x \cap B \tag{1,6}$$

existe.

Dans la relation précédente $[a_i, b_i]$, $i \in I$ sont des intervalles contigus de l'ensemble A par rapport à l'ensemble B et $B_i = B \cap [a_i, b_i]$. On comprend par $\sum_{x-h}^{x+h}{}_i$ la somme étendue aux indices $i \in I$ pour qui $x - h \leqslant a_i < b_i \leqslant x + h$. Si $a_i < x - h < b_i$, alors $B_i = B \cap [x - h, b_i]$ et si $a_i < x + h < b_i$, alors $B_i = B \cap [a_i, x + h]$.

Une classe de fonctions $\mathcal{F}$ définies presque partout sur $[a,b]$, qui peut être organisée comme un domaine d'intégrabilité, $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$, sur laquelle on définit une fonctionnelle intégrale sera nommée une classe fonctionnellement intégrable. Une fonction $f \in \mathcal{F}$ qui appartient à une classe fonctionnellement intégrable sera nommée de même fonctionnellement intégrable. Il est facile de voir que la classe S des fonctions sommables sur $[a,b]$ est fonctionnellement intégrable.

DÉFINITION 3. *Une fonctionnele réelle*

$$\overline{\mathfrak{I}}_{\mathfrak{B}}(f) : \mathcal{F}_{\mathfrak{B}} \to \mathbf{R}, \ B = B\,(a,b)$$

définie sur un domaine d'intégrabilité qui vérifie 1°, 2°, 3°, 4° *est nommée fonctionnelle quasiintégrale.*

On définit, d'une manière analogue, avec des fonctions fonctionnellement intégrables, des fonctions fonctionnellement quasiintégrables.

PROPOSITION 1. *Soit* $\mathcal{F}$ *une classe de fonctions fonctionnellement quasiintégrable* $(f,B) \in \mathcal{F}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\ (a, b)$ *et* $B'\ (u,v) \subset B(u,v)$, $[u,v] \subset [a,b]$ *une sousbase de B, alors*

$$\overline{\mathfrak{I}}_{B'}(f) = \overline{\mathfrak{I}}_B(f).$$

Démonstration. Soient $g: B \to \mathbf{R}$, $\psi: B \to \mathbf{R}$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in B' \\ 0 & x \in B \setminus B' \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x \in B' \\ f(x) & x \in B \setminus B' \end{cases}$$

alors $g(x) = f(x) - \psi(x)$, $x \in B$. Il résulte de d_4 que $(-\psi, B') \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$. On déduit alors de d_3 que $(g, B') \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$, et selon les axiomes 3° et 4°

$$\bar{\mathfrak{I}}_{B'}(g) = \bar{\mathfrak{I}}_B(f) + \bar{\mathfrak{I}}_{B'}(-\psi) = \bar{\mathfrak{I}}_B(f). \tag{1,8}$$

Parce que $f(x) = g(x) + \psi(x)$, $x \in B'$, il résulte de d_3 et de l'axiome 3° que $(f, B') \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ et

$$\bar{\mathfrak{I}}_{B'}(f) = \bar{\mathfrak{I}}_{B'}(g) + \bar{\mathfrak{I}}_{B'}(\psi) = \bar{\mathfrak{I}}_{B'}(g).$$

De la relation (1,8) il résulte la relation (1,7).

PROPOSITION 2. *Soit $\mathfrak{F}$ une classe de fonctions fonctionnellement quasi-intégrable, et $f \in \mathfrak{F}$, de sorte que (f, B_1), $(f, B_2) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(a,b)$, $B_1 = B_1(u,v)$, $B_2(u,v)$, $[u,v] \subset [a,b]$, alors*

$$\bar{\mathfrak{I}}_{B_1}(f) = \bar{\mathfrak{I}}_{B_2}(f).$$

Pour le démontrer, on remarque que $B_1 \cap B_2$ est une sousbase autant de B_1 que de B_2 et on applique ensuite (1,7).

2. La primitive fonctionnelle. On peut définir pour une fonction $f: B \to \mathbf{R}$, $B = B(a,b)$ fonctionnellement quasiintégrable $(f,B) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(a,b)$, la fonction $\bar{F}: B \to \mathbf{R}$

$$\bar{F}(x) = \bar{F}_f(x) = \bar{\mathfrak{I}}_{Bx}(f),\ Bx = B \cap [a,x],\ x \in B,\ x \neq a,\ \bar{F}_f(a) = 0.$$

Cette fonction sera nommée : primitive quasiintégrale. Si f este fonctionnellement intégrable, la fonction $F: B \to \mathbf{R}$

$$F(x) = F_f(x) = \mathfrak{I}_{Bx}(f),\ Bx = B \cap [a,x],\ x \in B,\ x \neq a,\ F_f(a) = 0.$$

sera nommée : primitive fonctionnelle.

THÉORÈME 1. *La primitive quasiintégrale de la fonction f fonctionnellement quasiintégrable, est uniquement déterminée pour $x \in B$.*

Démonstration. Soit $(f.B) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ fonctionnellement quasiintégrable. Supposons qu'il existe deux primitives quasiintégrables $\bar{F}_1(x) = \bar{\mathfrak{I}}_{Bx}(f)$, $\bar{F}_2(x) = \bar{\mathfrak{I}}_{Bx}(f)$. Il résulte de d_2 et de l'axiome 2°, que $(-f, B) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ et

$$\bar{\mathfrak{I}}_{Bx}(-f) = -\bar{\mathfrak{I}}_{Bx}(f). \tag{2,1}$$

Soit O_B la fonction identiquement égale à zéro sur B. Nous avons $O_B = f(x) + [-f(x)]$, $x \in B$. Il résulte des axiomes 3°, 4° et de (2,1) que

$$\overline{\mathfrak{J}}_{Bx}(O_B) = \overline{\mathfrak{J}}_{Bx}(f) + \overline{\mathfrak{J}}_{Bx}(-f) = \overline{\mathfrak{J}}_{Bx}(f) - \overline{\mathfrak{J}}_{Bx}(f) = \\ = \overline{F}_2(x) - \overline{F}_1(x) = 0,\ x \in B.$$

Il résulte de la vérification des axiomes 1°, 2°, 3°, 4° pour la primitive quasiintégrale F_f attachée à une fonction $(f, B) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ fonctionnellement quasiintégrable, les propriétés suivantes.

Pour n'importe quels $x', x'' \in B$, $x' < x''$, l'egalité

$$\overline{\mathfrak{J}}_{x'Bx''}(f) = \overline{F}_f(x'') - \overline{F}_f(x') \tag{2,2}$$

a lieu. N'importe quel serait $\alpha \in \mathbf{R}$, nous avons

$$\overline{F}_{\alpha f}(x) = \overline{\mathfrak{J}}_{Bx}(\alpha f) = \alpha\overline{\mathfrak{J}}_{Bx}(f) = \alpha\overline{F}_f(x),\ x \in B. \tag{2,3}$$

Si (f, B_1), $(g, B_2) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$, $B_1 = B_1(a, b)$, $B_2 = B_2(a, b)$, on déduit de l'axiome 3°

$$\overline{F}_{f+g}(x) = \overline{F}_f(x) + \overline{F}_g(x),\ x \in B_3 = B_1 \cap B_2. \tag{2,4}$$

Pour une fonction linéaire $f : B \to \mathbf{R}$, $B = B(u,v)$, $[u,v] \subset [a,b]$ nous avons

$$\overline{F}_f(x) - \overline{F}_f(u) = \overline{\mathfrak{J}}_{Bx}(f) = \frac{f(u) + f(x)}{2}(x - u), \tag{2,5}$$

$x \in B$, $Bx = B \cap [u,x]$. Réciproquement, si (2,5) a lieu, pour n'importe quelle sousbase $B' = B'(u,v) \subset B$, alors

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),\ x \in B. \tag{2,6}$$

PROPOSITION 3. *Soit $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ un domaine d'intégrabilité. Si pour $(f, B) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ il existe $\overline{F}_f : B \to \mathbf{R}$, de sorte que les relations (2,2) — (2,6) soient verifiées, alors on peut définir sur $\mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$ une fonctionnelle quasiintégrale $\overline{\mathfrak{J}}_{\mathfrak{B}}(f)$ et $\overline{F}_f$ est la primitive quasiintégrale qui correspond à f.*

On considère, pour le démontrer, la relation $\overline{\mathfrak{J}}_{Bx}(f) = \overline{F}_h(x) - \overline{F}_f(a)$, $x \in B = B(a, b) \in \mathfrak{B}$. Il est facile de vérifier alors que les axiomes 1°, 2°, 3°, 4° sont satisfaits.

LEMME *Si pour la primitive quasiintégrale $\overline{F}_f : B \to \mathbf{R}$ d'une fonction $f : B \to \mathbf{R}$, $B = B(a, b)$, $(f, B) \in \mathcal{F}_{\mathfrak{B}}$, fonctionnellement quasiintégrable, il existe une fonction $\overline{F}_f^* : [a, b] \to \mathbf{R}$ absolument continue sur [a, b] de sorte que $\overline{F}_f^*(x) = \overline{F}_f(x)$, $x \in B$ alors f est sommable et*

$$\overline{F}_f(x) = \int_a^x f(t)\, dt.$$

Démonstration. Par hypothèse il existe une fonction sommable $f^* : [a, b] \in \mathbf{R}$ de sorte que $\overline{F}_f(x) = \overline{F}_f^*(x) = \int_a^x f^*(t)\,dt$. On considère la fonction $g(x) = f(x) - f^*(x)$, $x \in B$. Cette fonction est fonctionnellement quasiintégrable et $\overline{\mathfrak{J}}_{Bx}(g) = \overline{F}_f(x) - \overline{F}_f^*(x) = 0$, $x \in B$. Il résulte de (2,6) que $g(x) = 0$, $x \in B$ et donc $f(x) = f^*(x)$; $x \in B$.

THÉORÈME 2. *Soit $\overline{\mathfrak{J}}_B(f) : \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}} \to \mathbf{R}$ une fonctionnelle quasiintégrale de sorte que n'importe quel serait $(f,B) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$, $B = B(a, b) \in \mathfrak{B}$, et la primitive quasiintégrale $\overline{F}_f$, il existe une fonction continue $\overline{F}_f^* : [a, b] \to \mathbf{R}$, de sorte que $\overline{F}_f^*(x) = \overline{F}_f(x)$, $x \in B$. Dans ces conditions la fonctionnelle $\overline{\mathfrak{J}}(f)$ vérifie l'axiome* 5°.

Démonstration. Soit $(f, B) \in \mathfrak{F}_{\mathfrak{B}}$ de sorte qu'il existe un ensemble fermé A qui segmente la base B et $f(x) = 0$, $x \in A \cap B$. On considère la primitive quasiintégrale $\overline{F}_h$ et la fonction continue $\overline{F}_f^*$ qui lui correspond. Il est evident que $\overline{F}_f^*$ est uniformément continue sur $[a, b]$. Pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta_i > 0$, $i \in \mathbf{N}$, de sorte que si x', $x'' \in B$ et $|x'' - x'| < \eta_i$, alors

$$|\overline{F}_f(x'') - \overline{F}_f(x')| = |\overline{F}_f^*(x'') - \overline{F}_f^*(x')| < \frac{\varepsilon}{2^i}. \tag{2,7}$$

On peut supposer que $\eta_{i+1} < \eta_i$, $i \in \mathbf{N}$. S'il existe ε_0 de sorte que pour $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, a lieu la relation

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i < \infty, \tag{2,8}$$

alors, parce que $\eta_i > 0$, $i \in \mathbf{N}$, il résulte $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i = \eta$. Soit $[x_k', x_k'']$, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, un système d'intervalles de sorte que $\sum_{k=1}^{n} (x_k'' - x_k') < \eta$. On choisit les points x_j^k, $y_j^k \in [a, b]$, $x_j^k < y_j^k$, $x_1^k = x_k'$, $y_{p_k}^k = x_k''$, $j \in \{1, 2, \ldots, p_k\}$, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, de sorte qu'il existe un seul intervalle $[x_j^k, y_j^k]$ pour lequel $\eta_{i+1} < y_j^k - x_j^k < \eta_i$. Dans ce cas

$$\sum_{k=1}^{n} |\overline{F}_f^*(x_*'') - \overline{F}_f^*(x_k')| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_k} |\overline{F}_f^*(y_j^k) - \overline{F}_f^*(x_f^*)| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2_i} = \varepsilon,$$

donc $\overline{F}_f^*$ est absolument continue. Alors, en vertu du lemme, nous avons

$$\mathfrak{J}_B(f) = \overline{F}_f(b) - \overline{F}_f(a) = \int_a^b f(u)\,du = \int_A f(u)\,du + \int_A f(u)\,du =$$

$$\sum_i [\overline{F}_f(b_i) - \overline{F}_f(a_i)] = \sum_i \overline{\mathfrak{J}}_{Bi}(f)$$

où $[a_i, b_i]$ sont les intervalles contigus de l'ensemble A par rapport à la base B.

Supposons que (2,8) n'a pas lieu pour n'importe quel $\varepsilon < \varepsilon_0$, donc que $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i^n$ est infinie pour une infinité de $\varepsilon_n > 0$, $\lim \varepsilon_u = 0$. Pour $\varepsilon = \varepsilon_n$, il existe un nombre fini d'intervalles $[x_j^n, y_j^n]$, $i \in \{1,2, \ldots, k_n\}$ de sorte, que $x_1^n = a$, $y_j^n = x_{j+1}^n$, $x_{k_n}^n < b \leqslant y_{k_n}^n$ et

$$y_j^n - x_j^n = \eta_{j+1}^n,\ j \in \{1,2, \ldots, k_u\}. \tag{2,9}$$

On considère les points $\bar{x}_j^n$, $\bar{y}_j^n$, définis comme il suit. Si $x_j^n \in (A \setminus i_A) \cap B$ alors $\bar{x}_j^n = \bar{y}_{j-1}^n = x_j^n$. Si $x_j^n \in [a_i, b_i]$ où $[a_i, b_i]$ est un intervalle contigu à l'ensemble A par rapport à B, alors $\bar{y}_{j+1}^n = a_i$, $\bar{x}_j^n = b_i$. Si $x_j^n \notin B$ et $x_j^n \notin i_A$, alors on considère l'intervalle $[x_j^n - \alpha_j, x_j^n + \alpha_j]$ où

$$\alpha_j < \min(\eta_j^n, \eta_{j-2}^n - \eta_{j-1}^n). \tag{2,10}$$

S'il existe un intervalle contigu $[a_i, b_i]$ de A par rapport à B, de sortie que $[a_i, b_i] \subset [x_j^n - \alpha_j, x_j^n + \alpha_j]$ alors $\bar{y}_{j-1}^n = a_i$, $\bar{x}_j^n = b_i$. S'il n'existe pas un tel intervalle, soit $x_j \in [x_j^n - \alpha_t, x_j^n + \alpha_j] \cap B$, alors $\bar{x}_j^n = \bar{y}_{j-1}^n = x_j$. On obtient $a = \bar{x}_1^n < \bar{y}_1^n \leqslant \bar{x}_2^n < \bar{y}_2^n \leqslant \ldots \leqslant \bar{x}_{k_n'}^n < \bar{y}_{k_n'}^n = b$ où $k_u' \leqslant k_n$. On observe que si $\bar{y}_{j-1}^n < \bar{x}_j^n$, alors $[\bar{y}_{j-2}^n, x_j^n]$ est un intervalle contigu de l'ensemble A par rapport à B. Soit $B_j = B \cap [\bar{y}_{j-1}^n, \bar{x}_j^n]$, $j \in \{2,3, \ldots, k_n'\}$. Si $\bar{y}_{j-1}^n = x_j^n$ alors nous convenons que $\mathfrak{J}_{B_j}(f) = 0$. Il résulte de (2,9) et (2,10) que

$$\bar{y}_j^n - \bar{x}_j^n < \eta_j^n,\ j \in \{1,2, \ldots, k_n'\}. \tag{2,11}$$

Soit $B_j' = B \cap [\bar{x}_j^n, \bar{y}_j^n]$, $j \in \{1,2, \ldots, k_j\}$, alors $\bar{\mathfrak{J}}_B(f) = \sum_{j=1}^{k_n'} \bar{\mathfrak{J}}_{B_j}(f) + \sum_{j=1}^{k_n'} \bar{\mathfrak{J}}_{B_j'}(f)$. On déduit de (2,11) et (2,7)

$$|\bar{\mathfrak{J}}_B(f) - \sum_{j=1}^{k_n'} \bar{\mathfrak{J}}_{B_j}(f)| \leqslant \sum_{i=1}^{k_n'} |\bar{\mathfrak{J}}_{B_j'}(f)| = \sum_{j=1}^{k_n'} |\bar{F}_f(\bar{y}_j^n) - \bar{F}_f(\bar{x}_j^n)| < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^i} = \varepsilon_n. \tag{2,12}$$

Mais $\lim_{n \to \infty} \eta_1^n = 0$ car, en cas contraire $\bar{F}_j(x)$ serait constante. Il résulte que $\lim_{n \to \infty} k_n' = +\infty$. Soit $[a_i, b_i]$ un intervalle contigu de l'ensemble A par rapport à B. Il existe N tel que pour $n > N$, $\eta_1^n < b_j - a_i$. Il résulte alors, qu'il existe un intervalle $[\bar{y}_{j-1}^n, \bar{x}_j^n]$ qui coïncide avec $[a_i, b_i]$. Mais alors dans la somme $\sum_{j=1}^{k_n'} \bar{\mathfrak{J}}_{B_j}(f)$ se trouve de même le terme concernant la base $B \cap [a_i, b_i]$. On déduit, alors, en tenant compte de (2,12) que $\bar{\mathfrak{J}}_B(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \bar{\mathfrak{J}}_{B_i}(f)$.

La primitive fonctionnelle vérifie les propriétés (2,2) — (2,6). En plus elle vérifie, de même, les deux propriétés suivantes:

Soit $(f,B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$, de sorte qu'il existe un ensemble fermé A qui segmente la base B et $f(x) = 0$, $x \in A \cap B$. Dans ce cas, il résulte de l'axiome 5° que

$$F_f(x) - F_f(a) = \mathcal{J}_{B_x}(f) = \sum_{a}^{x}{}_i \mathcal{J}_{B_i}(f) = \sum_{a}^{a}{}_i [F_f(b_i) - F_f(a_i)]. \qquad (2,13)$$

On déduit de l'axiome 6°, une propriété d'absolue continuité locale, pour la primitive fonctionnelle.

Pour n'importe quel $x \in B \cap\ ]a,b[$, il existe un ensemble A_x sur lequel f est borné et $\nu(A x,x) = 1$, tels que n'importe quel serait l'ensemble fermé $A \subset A_x$ qui segmente la base B et $\nu(A,x) > 0$, a lieu la relation

$$\lim_{h \to 0} \sum_{x+h_i}^{x-h} [F_e(b_i) - F_f(a_i)] = 0. \qquad (2,14)$$

THÉORÈME 3. *Soit $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ un domaine d'intégrabilité. Si pour $(f,B) \in \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ il existe $F_f : B \to \mathbf{R}$ de sorte que les relations* (2,2) — (2,6) *et* (2,13), (2,14) *soient vérifiées, alors on peut définir sur $\mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ une fonctionnelle intégrale $\mathcal{J}_B(f)$ et F_f est la primitive intégrale qui correspond à f.*

On considère $\mathcal{J}_{B_x}(f) = F_e(x) - F_f(a)$, $x \in B = B(a,b) \in$ et on peut vérifier immédiatement que les axiomes 1°—6° sont satisfaits.

(Manuscrit reçu le 5 octobre 1972)

BIBLIOGRAPHIE

1. Halmos, P. R., *Measure theory*, New York, 1950.
2. Lebesgue, H., *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*, Paris, 1928.
3. Luzin, N. N., *Integral i trigonometriceskij rjad*, Moskva, 1951.
4. Rădulescu, M., *O generalizare a integralei*, Cluj, 1968.
5. Rădulescu, M., *Une définition de l'intégrale*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Phys.", f.1, 1969, 23—34.
6. Rădulescu, M., *L'intégrale M_**, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech.", f.1 1970, 23—34.
7. Rădulescu, M., *La primitive M_* d'une fonction intégrable M_**, „Studia Univ. Babeş, Bolyai, ser. Math. -Mech.", f.1, 1971, 49—59.
8. Saks, S., *Theory of te integral*, New York, 1964.

O DEFINIŢIE AXIOMATICĂ A INTEGRALEI (I)

(Rezumat)

În această notă se consideră un domeniu de integrabilitate ca fiind o parte a produsului cartezian dintre o clasă de baze şi o clasă de funcţii reale definite pe aceste baze. O funcţională definită pe un domeniu de integrabilitate este funcţională integrală dacă satisface la şase axiome. Pentru primitiva funcţională corespunzătoare acestei definiţii în lucrare se dau mai multe proprietăţi.

ОДНО АКСИОМАТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛА (I)

(Резюме)

Рассматривается область интегрируемости как часть декартова произведения между одним классом базисов и одним классом действительных функций, определенных на этих базисах. Функционал, определенный в области интегрируемости, является интегральным функционалом, если удовлетворяет шести аксиомам.

В работе дано несколько свойств функциональной примитивы, соответствующей этому определению.

PROBLEMA LUI DIRICHLET PENTRU UN SISTEM ELIPTIC

P. SZILAGYI

1. În lucrarea de față se studiază problema la limită

$$Bu + \lambda u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2i\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + \lambda u = 0 \text{ în } \Omega,\ u\Big|_{\partial\Omega} = f, \tag{1}$$

($u = u_1 + iu_2, f_1 = f_1 + if_2$) unde Ω este un domeniu simplu conex mărginit, care are proprietatea că există o transformare conformă $z = z(\omega)$ definit pe o vecinătate a discului $|\omega| \leqslant 1$, care transformă discul $|\omega| < 1$ în domeniul Ω. λ este un număr complex, arbitrar dat, diferit de 0. Presupunem că $f \in C(\partial\Omega)$, iar soluția o căutăm în $C_2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.

2. Soluția generală a ecuației $Bu + \lambda u = 0$. Dacă introducem operatorul diferențial

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}i\frac{\partial}{\partial y} \tag{2}$$

atunci ecuația $Bu + \lambda u = 0$ va avea forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2} + 4\lambda u = 0. \tag{3}$$

Determinăm la început două soluții w_1 și w_2 ale ecuației (3) pentru care

$$W(w_1, w_2) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 \\ \frac{\partial w_1}{\partial_z} & \frac{\partial w_2}{\partial_z} \end{vmatrix} = A = \text{cost.} \neq 0$$

și arătăm că orice soluție a ecuației (3) este de forma

$$u(x, y) = w_1(x, y)\varphi(z) + w_2(x, y)\psi(z), \quad z = x + iy, \tag{5}$$

unde φ și ψ sînt funcții olomorfe în Ω.

Fie deci u o soluţie a ecuaţiei (3) iar w_1, w_2 două funcţii pentru care avem îndeplinită condiţia $W(w_1, w_2) \neq 0$. Introducem funcţiile

$$v_1 = -u\frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} + w_1\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}, \quad v_2 = u\frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} - w_2\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}. \tag{5}$$

Avem

$$\frac{\partial v_1}{\partial \bar{z}} = -u\frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{z}^2} - \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} + w_1\frac{\partial^2 w_1}{\partial \bar{z}^2} = 4\lambda u w_1 - 4\lambda w_1 u = 0.$$

Analog se obţine $\frac{\partial v_2}{\partial \bar{z}} = 0$. Prin urmare v_1 şi v_2 sînt funcţii analitice. Fie $v_1 = A\psi(z)$, $v_2 = A\varphi(z)$. Rezolvînd sistemul

$$-u\frac{\partial w_1}{\partial \bar{z}} + w_1\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = A\psi(z), \quad u\frac{\partial w_2}{\partial \bar{z}} - w_2\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = A\varphi(z)$$

obţinem $u = \varphi w_1 + \psi w_2$.

Se poate arăta uşor că oricum am alege funcţiile olomorfe φ şi ψ, funcţia u definită prin (4) este soluţie a ecuaţiei (3), deci (4) este soluţia generală a lui (4).

Determinăm în continuare o pereche de soluţii w_1 şi w_2 care satisfac condiţia $W(w_1, w_2) \neq 0$. Căutăm soluţii de forma $w = e^{\alpha x + \beta y}$ (α, β numere reale). Avem

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} + 4\lambda w = \frac{1}{4} e^{\alpha x + \beta y}\left[(\alpha + i\beta)^2 + 16\lambda\right] = 0.$$

De aici rezultă $\alpha + i\beta = \pm 4\sqrt{-\lambda}$. Alegem

$$w_1 = e^{\alpha x + \beta y}, \quad w_2 = e^{-\alpha x - \beta y} \quad (\alpha = 4 Re\sqrt{-\lambda}, \quad \beta = 4\; Im\sqrt{-\lambda}.)$$

Avem atunci $W(w_1, w_2) = -(\alpha + i\beta) = -4\sqrt{-\lambda} \neq 0$ dacă $\lambda \neq 0$. Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei (3) este

$$u(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}\varphi(z) + e^{-\alpha x - \beta y}\psi(z), \tag{6}$$

unde φ şi ψ sînt funcţii analitice arbitrare.

3. Rezolvarea problemei omogene.

$$\mathrm{B}u + \lambda u = 0 \quad \text{în} \quad \Omega, \; u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{7}$$

Vom determina în (6) funcţiile olomorfe φ şi ψ astfel ca φ, $\psi \in C(\bar{\Omega})$ şi

$$u|_{\partial\Omega} = [e^{\alpha x + \beta y}\varphi(z) + e^{-\alpha x - \beta y}\psi(z)]|_{\partial\Omega} = 0. \tag{8}$$

Folosind transformarea conformă $z = z(\omega)$ care transformă discul unitate în Ω, ultima condiţie ne dă

$$\varphi[z(\omega)]\, e^{(\alpha - i\beta)z(\omega) + (\alpha + i\beta)\overline{z(\omega)}} + \psi[z(\omega)] = 0 \qquad \text{pentru } |\omega| = 1. \tag{9}$$

Fie

$$\varphi_1(\omega) = \varphi[z(\omega)]\, e^{(\alpha-\beta i)z(\omega)}, \quad \psi_1(\omega) = \psi[z(\omega)] \qquad |\omega| \leqslant 1. \tag{10}$$

Este evident că φ_1 şi ψ_1 sînt olomorfe în $|\omega| < 1$ şi continue pentru $|\omega| \leqslant 1$. Rezultă atunci

$$e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}}\, \varphi_1(\omega) + \psi_1(\omega) = 0 \qquad \text{pentru } |\omega| = 1. \tag{11}$$

Astfel rezolvarea problemei (7) este echivalentă cu găsirea funcţiilor φ_1 şi ψ_1. Demonstrăm următoarea afirmaţie:

TEOREMA 1. *Problema omogenă* (7) *are soluţie nebanală atunci şi numai atunci dacă funcţia* $e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)}$ *este raţională. În acest caz problema are o infinitate de soluţii.*

Demonstraţie. Dacă $e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)} = \dfrac{P(\omega)}{Q(\omega)}$ unde P şi Q sînt polinoame (P şi Q nu au zerouri într-o vecinătate a lui $|\omega| \leqslant 1$), atunci pe $|\omega| = 1$ avem

$$e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}} = \frac{\overline{P}\left(\dfrac{1}{\omega}\right)}{\overline{Q}\left(\dfrac{1}{\omega}\right)} = \frac{P_1(\omega)}{Q_1(\omega)}, \tag{12}$$

unde P_1 şi Q_1 sînt de asemenea polinoame. Alegem

$$\varphi_1(\omega) = F(\omega)Q_1(\omega), \quad \psi_1(\omega) = -F(\omega)P_1(\omega), \tag{13}$$

unde F este o funcţie arbitrară olomorfă în $|\omega| < 1$ şi continuă în $|\omega| \leqslant 1$. Astfel

$$\begin{aligned} u(\omega) &= e^{-\alpha x-\beta y} F(\omega)\,\{Q_1(\omega)\, \overline{e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)}} - P_1(\omega)\} = \\ &= e^{-\alpha x-\beta y} F(\omega)\, \frac{Q_1(\omega)\,\overline{P(\omega)} - P_1(\omega)\,\overline{Q(\omega)}}{\overline{Q(\omega)}} \end{aligned} \tag{14}$$

este soluţia problemei (7) oricare ar fi F, funcţie olomorfă în $|\omega| < 1$ şi continuă pe $|\omega| \leqslant 1$.

Invers, să presupunem că (7) are soluţie nebanală. Atunci există φ_1 şi ψ_1 olomorfe în $|\omega| < 1$ şi continue pe $|\omega| \leqslant 1$ astfel ca (11) să fie adevărate. În acest caz

$$e^{(\alpha-i\beta)\overline{z(\omega)}} = -\frac{\psi_1(\omega)}{\varphi_1(\omega)} \qquad \text{pentru } |\omega| = 1.$$

Pentru $z(\omega)$ avem

$$z(\omega) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j\, \omega^j, \quad \overline{z(\omega)} = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{A}_j\, \bar{\omega}^j, \quad \bar{z}\left(\frac{1}{\omega}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{A}_j\, \frac{1}{\omega^j}.$$

Fie

$$G(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{\psi_1(\omega)}{\varphi_1(\omega)} & \text{pentru} \quad |\omega| \leqslant 1. \\ e^{(\alpha+i\beta)\bar{z}\left(\frac{1}{\omega}\right)} & \text{pentru} \quad |\omega| > 1. \end{cases}$$

Din presupunerile făcute rezultă că G este o funcție meromorfă în tot planul complex și are un număr finit de poli. Aceasta înseamnă că $G(\omega)$ este rațională pe tot planul complex (2), iar din faptul că $e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)}$ este rațională pe $|\omega| = 1$ — cum s-a văzut mai înainte — obținem că (7) are o infinitate de soluții nebanale.

4. Rezolvarea problemei lui Dirichlet cu condiția neomogenă pe frontieră. Rezolvăm aici problema (1). Folosind soluția generală a ecuației $Bu + \lambda u = 0$, condiția la limită $u|_{\partial\Omega} = f$ va fi satisfăcută atunci și numai atunci dacă

$$\varphi[z(\omega)]\, e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)+(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}} + \psi[z(\omega)] = f_1[z(\omega)], \qquad (\omega) = 1, \qquad (14)$$

unde $z = z(\omega)$ este transformarea conformă a discului $|\omega| < 1$ în Ω folosit în punctul 1, iar $f_1(z) = e^{\alpha x+\beta y} f(z)$. Folosind notațiile din punctul 3 din (14) rezultă

$$e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}}\varphi_1(\omega) + \psi_1(\omega) = f_1(\omega) \qquad |\omega| = 1. \qquad (15)$$

În continuare vom folosi spațiile de tip Hardy H_2 și G_2. Cum se știe, H_2 este mulțimea funcțiilor analitice φ în $|\omega| < 1$ pentru care $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$ unde c_n sînt coeficienții dezvoltării $\varphi(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, iar G_2 este mulțimea funcțiilor analitice φ din $|\omega| > 1$ pentru care $\varphi(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n z^{-n}$ și $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |d_n|^2 < +\infty$. Fie $L_2^{(1)}$ subspațiul spațiului $L_2(|\omega| = 1)$ construit pe baza $\{e^{in\varphi}\}_{n=0}^{\infty}$, iar $L_2^{(2)}$ subspațiul construit pe baza $\{e^{-in\varphi}\}_{n=1}^{\infty}$. Este evident că $L_2^{(1)}(|\omega| = 1) = L_2^{(1)} \oplus L_2^{(2)}$. Este cunoscut că funcțiile din H_2 au limită aproape peste tot cînd $|\omega| \to 1$ și funcția limită este din $L_2^{(1)}$ și invers, orice element din $L_2^{(1)}$ este limita a.p.t. a unei funcții din H_2. Același lucru este adevărat pentru spațiile G_2 respectiv $L_2^{(2)}$ [2].

Urmele funcțiilor din H_2 pe $|\omega| = 1$ (adică elementele lui $L_2^{(1)}$) pot fi caracterizate și astfel [3]: Condiția necesară și suficientă ca $g \in L_2$ $(|\omega| = 1)$ să aparțină lui $L_2^{(1)}$: este necesar și suficient ca

$$g(\omega) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \omega}\, d\zeta \qquad \forall |\omega| = 1. \qquad (16)$$

În mod analog, condiţia necesară şi suficientă ca $g \in L_2(|\omega| = 1)$ să aparţină lui $L_2^{(2)}$ este necesar şi suficient ca

$$g(\omega) = -\frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta \quad \forall |\omega| = 1. \tag{17}$$

Astfel, dacă $L_2(|\omega| = 1) \ni g = g_1 + g_2$, $g_1 \in L_2^{(1)}$, $g_2 \in L_2^{(2)}$ atunci

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{g(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta = g_1 - g_2$$

Mai mult, dacă $g_1 \in L_2^{(1)}$ şi $g_2 \in L_2^{(2)}$ atunci

$$\frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{g_1(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta = 0 \text{ pentru } |\omega| > 1 \text{ şi } \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{g_2(\zeta)}{\zeta - \omega} \zeta d = 0 \text{ pentru } |\omega| < 1. \tag{18}$$

Menţionăm că φ_1 şi ψ_1 din (15) sînt funcţii olomorfe în $|\omega| < 1$ şi continue în $|\omega| \leqslant 1$, prin urmare φ_1, $\psi_1 \in H_2$. [5] Astfel

$$\psi_1(\omega) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\psi_1(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta \qquad |\omega| = 1. \tag{16'}$$

Din (15) şi 16') găsim că φ_1 trebuie să satisfacă ecuaţia integrală

$$e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}} \varphi_1(\omega) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\zeta)}} \varphi_1(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta = f_1(\omega) - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta \qquad |\omega| = 1. \tag{19}$$

Funcţia φ_1 se caută sub forma

$$\varphi_1(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta \qquad |\omega| < 1, \ \mu \in C(|\zeta| = 1). \tag{20}$$

Pe baza formulei Plemelj [3] avem atunci

$$\varphi_1(\omega) = \frac{1}{2} \mu(\omega) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta \qquad |\omega| = 1. \tag{21}$$

(19) şi (21) ne dau

$$e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}} \left[\mu(\omega) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta\right] - \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}}}{\zeta - \omega} \left[\mu(\zeta) + \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\mu(\tau)}{\tau - \zeta} d\tau\right] d\zeta =$$

$$= 2f_1(\omega) - \frac{2}{\pi i} \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta - \omega} d\zeta \qquad |\omega| = 1.$$

Folosind formula lui Poincaré-Beltrand [3] găsim

$$\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\zeta)}}}{\zeta-\omega}\left[\int\limits_{|\tau|=1} \frac{\mu(\tau)d\tau}{\tau-\zeta}\right]d\zeta - \pi^2 e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}}\mu(\omega) +$$

$$+\int\limits_{|\tau|=1} \mu(\tau)\left[\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\zeta)}}}{(\zeta-\omega)(\tau-\zeta)}d\zeta\right]d\tau.$$

Însă

$$\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\zeta)}}d\zeta}{(\zeta-\omega)(\tau-\zeta)} = \frac{1}{\tau-\omega}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\zeta)}}}{\zeta-\omega}d\zeta + \frac{1}{\tau-\omega}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\zeta)}}}{\tau-\zeta}d\zeta = -$$

$$-\frac{\pi i}{\tau-\omega}e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\zeta)}} + \frac{\pi i}{\tau-\omega}e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}}.$$

Aici am folosit faptul că pe cercul $|\omega| = 1$ are loc dezvoltarea $e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}} = e^{(\alpha+i\beta)\overline{z}\left(\frac{1}{\omega}\right)} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n\omega^{-n}(\Sigma|B_n|^2<+\infty)$ și că pentru funcțiile din $L_2^{(1)}$ și $L_2^{(2)}$ sînt adevărate reprezentările (16) și (17). Astfel din (22) obținem

$$\frac{1}{i\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}} - e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\zeta)}}}{\zeta-\omega}\mu(\zeta)d\zeta = f_1(\omega) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta-\omega}d\zeta. \tag{23}$$

Ecuația omogenă atașată este

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\omega)}} - e^{(\alpha+i\beta)\overline{z(\zeta)}}}{\zeta-\omega}\mu(\zeta)d\zeta = 0. \tag{24}$$

Este evident că orice element $\mu_2 \in L_2^{(2)}$ satisface ecuația (24), însă acestea nu influențează valoarea lui φ_1 în $|\omega| < 1$ (vezi formulele (17) și (18).).

Dacă (24) are soluție diferită de funcția nulă în $L_2^{(1)}$, atunci φ_1 determinată de (20) și ψ_1 corespunzător din (11) ne va da o soluție a problemei omogene (7). Însă de aici rezultă că $e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)}$ este rațională. Prin urmare, dacă ultima funcție nu este rațională, atunci problema (1) pentru un $f \in C(\partial\Omega)$ sau nu are soluție sau are soluție unică.

Aici vom considera numai cazul cînd $e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)}$ este rațională. Ne interesează care sînt acele funcții f pentru care problema (14) are soluție. $e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)}$ fiind o funcție rațională, nucleul ecuației este degenerat. În acest caz pe baza unui rezultat al lui Neguyen Tya Hop asupra ecuațiilor integrale de tip Fredholm, de speța I, ecuația (23) este normal rezolvabilă. Aceasta înseamnă că (23) are soluţie atunci şi numai atunci, dacă

$$\mathcal{F}(\omega) = f_1(\omega) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta-\omega}\,d\zeta.$$

este ortogonal pe orice soluţie a ecuaţiei integrale conjugate omogene

$$(K^*\nu)(\omega) = \int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha-i\beta)z(\zeta)} - e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)}}{\zeta-\omega}\,\nu(\zeta)\,d\zeta = 0 \tag{25}$$

Notăm cu $N(K^*)$ mulţimea soluţiilor din $L_2(|\zeta| = 1)$ ale ecuaţiei (25).

Fie $\nu = \nu_1 \oplus \nu_2$, $\nu_1 \in L_2^{(1)}$, $\nu_2 \in L_2^{(2)}$. Avem atunci

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha-i\beta)z(\zeta)}}{\zeta-\omega}\,\nu_1(\zeta)\,d\zeta + \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha-i\beta)z(\zeta)}}{\zeta-\omega}\,\nu_2(\zeta)\,d\zeta =$$

$$= e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\nu_1(\zeta)}{\zeta-\omega}\,d\zeta + e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{\nu_2(\zeta)}{\zeta-\omega}\,d\zeta.$$

De aici pe baza formulelor (16) şi (17) obţinem

$$\nu_2(\omega)e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)} = -\frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{e^{(\alpha-i\beta)z(\zeta)}}{\zeta-\omega}\,\nu_2(\zeta)\,d\zeta$$

Aceasta înseamnă că $\nu = \nu_1 \oplus \nu_2 \in N(K^*)$ atunci şi numai atunci, dacă $\nu_2(\omega_1)\, e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)} \in L_2^{(2)}$. Soluţiile ecuaţiei (25) vor fi $\nu = \nu_1 \oplus \nu_2$ cu $\nu_1 \in L_2^{(1)}$ arbitrar şi $\nu_2 \in L_2^{(2)}\, e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)} \in L_2^{(2)}$.

Ecuaţia integrală (23) este rezolvabilă atunci şi numai atunci, dacă

$$\mathcal{F} \perp N(K^*) = L_2^{(1)} \oplus \left\{\left(L_2^{(2)}e^{-(\alpha-i\beta)z(\omega)}\right) \cap L_2^{(2)}\right\}.$$

Însă $f_1 = f_1^{(1)} \oplus f_1^{(2)}$, $f_1^{(1)} \in L_2^{(1)}$, $f_1^{(2)} \in L_2^{(2)}$ şi

$$\mathcal{F}(\omega) = f_1(\omega) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\zeta|=1} \frac{f_1(\zeta)}{\zeta-\omega}\,d\zeta = 2f_1^{(2)}.$$

Prin urmare (23) este rezolvabil atunci şi numai atunci, dacă

$$f_1^{(2)} \perp \left\{\left(L_2^{(2)}e^{-(\alpha-i\beta)z(\omega)}\right) \cap L_2^{(2)}\right\}. \tag{26}$$

Am ajuns astfel la următorul rezultat

TEOREMA 3. *Dacă $e^{(\alpha-i\beta)z(\omega)}$ este o funcţie raţională, atunci problema* (14) *poate să aibă soluţie numai atunci, dacă condiţia de ortogonalitate* (26) *este satisfăcută.*

(Intrat în redacţie la 25 ianuarie 1972)

BIBLIOGRAFIE

1. W a l s h, I. L., *Interpolation and approximation by rational functions in thecomplex domain*, Amer. Math. Soc., New-York, 1935.
2. P r i v a l o v, I. M., *Graniciniie svoistva analiticeskih funkții*, Gostehizd, Moskva-Leningrad, 1950.
3. V e k u a, I. N., *Obobșcenie analiticeskih funkții*, Gos. Izd. Fiz.—Mat. lit., Moskva, 1959.
4. N g u y e n T y a H o p., *O normalnoi razreșimosti zadaci Dirichlet dlea odnoi ellipticeskoi sistemî*, „Differențialnîie uravnenia", II, 1966, 2, 214—225.

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(Р е з ю м е)

В статье изучается граничная задача $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \lambda u = 0$ в $\Omega, u|_{\partial\Omega} = 0$. Показано, что однородная задача имеет различное от нуля решение тогда, и только тогда, когда функция $e^{(\alpha - i\beta)z(\omega)}$ является рациональной, где $z = z(\omega)$ — конформное преобразование круга $|\omega| < 1$ в односвязной области Ω. Неоднородная задача имеет решение тогда, и только тогда, когда $f_1^2 \perp \left\{\left(L_2^{(2)} e^{-(\alpha - i\beta)z(\omega)}\right) \cap L_2^{(2)}\right\}$, где $L_2^{(2)}$ является подпространством $L_2(|\omega| = 1)$, построенным на основе $\left\{e^{-in\varphi}\right\}_{n=1}^{\infty}$, и $f_1^{(2)}$ есть проекция функции $f_1 = e^{(\alpha x + \beta y}f(z)$ на $L_2^{(2)}$.

THE DIRICHLET PROBLEM FOR AN ELLIPTIC SYSTEM

(S u m m a r y)

The paper discusses the boundary-value problem $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2i \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} + \lambda u = 0$ in Ω, $u|_{\partial\Omega} = 0$. It is shown that the corresponding homogeneous problem has nonzero solutions if and only if the function $e^{(\alpha - i\beta)z(\omega)}$ is rational; here $z = z(\omega)$ is the conformal mapping of $|\omega| < 1$ in the simply connected domain Ω. The non-homogeneous problem has a solution if and only if $f_1^2 \perp \left\{\left(L_2^{(2)} e^{-(\alpha i - \beta)z(\omega)}\right) \cap L_2^{(2)}\right\}$ where $L_2^{(2)}$ is the subspace of $L_2(|\omega| = 1)$ constructed on the basis $\left\{e^{-in\varphi}\right\}_{n=1}^{\infty}$ and $f_1^{(2)}$ is the projection of $f_1 = e^{\alpha x + \beta y}$ f(z) on $L_2^{(2)}$.

SUR L'EFFICACITÉ DES QUELQUES PROCÉDÉS MONTE CARLO D'ÉCHANTILLON STRATIFIÉ POUR LE CALCUL DES INTÉGRALES

ELENA FRĂŢILĂ-OANCEA

Le travail cherche des conditions pour augmenter l'efficacité de la méthode d'échantillon stratifié [2] et antithétique variée [3], par comparaison à la méthode Monte Carlo primitive ; et aussi pour augmenter l'efficacité de la méthode antithétique variée sur celle de la méthode d'échantillon stratifié.

1. La méthode d'échantillon stratifié. On considère l'intégrale définie

$$I = \int_a^b f(x)\, dx \tag{1}$$

et la division $a = a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, a_m = b$.

THÉORÈME 1. *Soit l'estimation*

$$I_2 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{l_k}{n_k} \sum_{i=1}^{n_k} f(x_i^k) \tag{2}$$

correspondante au procédé d'échantillon stratifié, où $a_{k+1} - a_k = b_k - a_k = l_k$, $0 < l_k \leqslant 1$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, et $\{x_k^i\}_{=1,\ldots,n}$ *est un échantillon de volume* n_k *effectué sur une variable aléatoire uniforme sur* $[a_k, b_k]$, $k = 0, \ldots, m-1$, et $\sum_{k=0}^{m-1} n_k = n$.

Si

$$\frac{n_k}{l_k} = \frac{n}{m}, \quad k = 0, \ldots, m-1, \tag{3}$$

alors l'estimation I_2 est plus efficace que l'estimation correspondante à la méthode Monte Carlo primitive :

$$I_1 = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i), \tag{4}$$

où $\{x_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, est un échantillon de volume n effectué sur une variable aléatoire uniforme sur $[a, b]$.

Démonstration. L'efficacité d'un procédé d'intégration [4] auquel correspond pour l'intégrale I une estimation $\tilde{I}$, est $\frac{1}{n D^2 \tilde{I}}$, où n est le volume d'échantillon utilisé dans le calcul de $\tilde{I}$, et $D^2\tilde{I}$ est la variance de $\tilde{I}$.

Par conséquent, pour agrandir l'efficacité d'estimation I_2 comparativement à I_1, en gardant le même volume d'échantillon, on doit avoir $D^2 I_2 < D^2 I_1$.

La variance de I_1 est : $D^2 I_1 = \frac{1}{n}\left[(b-a)\int_a^b f^2 du - I^2\right]$, et pour I_2

$$D^2 I_2 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{n_k}\left\{(b_k - a_k)\int_{a_k}^{b_k} f^2 du - \left(\int_{a_k}^{b_k} f du\right)^2\right\},$$

Alors

$$D^2 I_1 - D^2 I_2 = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{m-1}\int_{a_k}^{b_k} f^2 du - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{b_k - a_k}{n_k}\int_{a_k}^{b_k} f^2 du +$$

$$+ \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{n_k} - \frac{1}{n}\right)\left(\int_{a_k}^{b_k} f du\right)^2 - \frac{2}{n}\sum_{\substack{k,h=0 \\ k \neq h,\, k<h}}^{m-1}\int_{a_k}^{b_k} f du \int_{a_h}^{b_h} f du$$

doit être nonnégative.

On désigne

$$A_1 = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{b-a}{n} - \frac{b_k - a_k}{n_k}\right)\int_{a_k}^{b_k} f^2 du$$

$$A_2 = \sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{1}{n_k} - \frac{1}{n}\right)\left(\int_{a_k}^{b_k} f du\right)^2 - \frac{2}{n}\sum_{\substack{h,h=0 \\ k \neq h,\, k<h}}^{m-1}\int_{a_k}^{b_k} f du \int_{a_h}^{b_h} f du$$

Pour que A_1 soit nonnégative, il doit que

$$\frac{b-a}{n} - \frac{b_k - a_k}{n_k} \geqslant 0,\ k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

c'est-à-dire :

$$m\frac{b-a}{n} \geqslant \frac{b_0 - a_0}{n_0} + \ldots + \frac{b_{m-1} - a_{m-1}}{n_{m-1}}$$

donc $m > 1$. Puisque l' échantillon est stratifié on a $m > 1$, et par conséquent $A_1 > 0$.

Puis de la relation (3) on a $\frac{1}{n_k} = \frac{m}{nl_k}$ et A_2 devient :

$$A_2 = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m - l_k - 1 + 1}{l_k n}\left(\int_{a_k}^{b_k} f du\right)^2 - \frac{2}{n}\sum_{\substack{k,h=0\\k\neq h,\ k<h}}^{m-1} \int_{a_k}^{b_k} f du \int_{a_h}^{b_h} f du$$

ou

$$A_2 \geqslant \sum_{k=0}^{m-1} \frac{m - 1 + 1 - l_k}{l_k n}\left(\int_{a_k}^{b_k} f du\right)^2 - \sum_{\substack{k,h=0\\k\neq h,\ k<h}}^{m-1} \frac{2}{n\sqrt{l_k l_n}} \int_{a_k}^{b_k} f du \int_{a_h}^{b_h} f du,$$

parce que $0 < l_k < 1,\ k = 0,\ \ldots,\ m - 1$,

Par conséquent

$$A_2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{\substack{k,h=0\\k\neq h}}^{m-1}\left(\frac{1}{\sqrt{l_k}}\int_{a_k}^{b_k} fdu - \frac{1}{\sqrt{l_h}}\int_{a_k}^{b_h} fdu\right)^2 - \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1-l_k}{l_k}\left(\left(\int_{a_k}^{b_k} fdu\right)^2\right) > 0$$

donc $D^2 I_1 - D^2 I_2 > 0$, et le théorème est démontré.

Dans le cas $n_k = \frac{n}{m}$, les intervalles partiels l_k sont aussi égaux, de longueur l et chacun contient le même nombre de valeurs d'échantillon, on a

$$A_2 = \sum_{h=0}^{m-1}\frac{m-1}{n}\left(\int_{a_k}^{b_k} fdu\right)^2 - \frac{2}{n}\sum_{\substack{k,h=0\\k\neq h}}^{m-1}\int_{a_k}^{b_k} fdu \int_{a_h}^{b_h} fdu = \frac{1}{n}\sum_{\substack{h,k=0\\k\neq h}}^{m-1}\left(\int_{b_k}^{b_k} fdu - \int_{a_h}^{b_h} fdn\right)^2 > 0$$

et le théorème reste valable.

2. La méthode des variables antithétiques. Par un changement de variable, l'intégrale (1) devient :

$$I = (b-a)\int_0^1 f[a + (b-a)v]\,dv. \tag{5}$$

L'estimateur correspondant à cette intégrale (5), obtenu par la méthode Monte Carlo primitive, sera : $I'_1 = \frac{b-n}{n} \sum_{i=1}^{n} f[a + (b-a)\ \xi'_i]$, où ξ'_i, $i = 1, \ldots, n$, sont des variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$.

En passant à l'échantillon stratifié, on considère la division $\Delta : \alpha_0 = 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m = 1$, et on a pour l'intégrale (5), l'estimation

$$I'_2 = \sum_{j=1}^{m} \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} f[\alpha_{j-1} + (\alpha_j - \alpha_{j-1})\ x_j^k], \tag{6}$$

où $\{x_j^k\}$, $k = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, m$, sont des échantillons de volume n_j effectués sur des variables aléatoires indépendantes ξ'_j, $j = 1, \ldots, m$, uniformes sur $[0,1]$, et $\Sigma n_j = n$. On note que (6) est une estimation non-biaisée de I.

La méthode antithétique variée [3] utilise l'estimateur correspondant à (6) pour l'augmentation de l'efficacité, en diminuant la variance par le choix convenable, soit des quelques variables aléatoires ξ'_j corrélées, soit en déterminant dans une corrélation donnée, certaines conditions relativement aux variables ξ'_j, telles que la corrélation soit négative.

1. Supposons que entre ξ'_j, $j = 1, \ldots, m$, on a la relation $\xi'_j = 1 - \xi_1$, $j = 2, \ldots, m$, ξ_1 étant une variable aléatoire aussi uniforme sur $[0,1]$.

Dans ce cas l'estimation (6) devient :

$$I_3 = \sum_{j=2}^{m} \frac{h_j}{n_j} \sum_{k=1}^{n_j} f[\alpha_j - h_j x_1^k) - \frac{h_1}{n_1} \sum_{k=1}^{n_1} f(\alpha_0 + h_1 x_1^k),$$

où $h_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$.

THÉORÈME 2. *Si la division Δ est telle que $f(x)$ est monotone, nondécroissante x*, dérivable et $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, $j = 1, \ldots, m$, et si*

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j\neq k}}^{m} (\delta'^2_{jk} - m_j m_k) \leqslant 0,$$

où δ'^2_{jk} est l'extrémité supérieure de l'intervalle $d^2_{jk} = [\delta^2_{jk}, \delta'^2_{jk}]$ obtenue de $d_{jk} = [\delta_{jk}, \delta'_{jk}] = [f_{j-1}, f_j] \cap [f_{k-1}, f_k]$ avec la notation $f_j = f(\alpha_j)$, et $m_j = \min(f_{j-1}, f_j)$, $j = 1, \ldots, m$, alors l'estimation I_3 est plus efficace que l'estimation I'_2 correspondante à l'échantillon stratifié (donné par (6)).

* Cette propriété de nondécroissance de f n'est pas proprement dit nécessaire, car sur l'intervalle où f est décroissante on prend pour fonction d'intégration $y = -f(x)$, et puis on revient à la valeur initiale d'intégrale en changeant le signe.

Démonstration. Pour que l'estimation I_3 soit plus efficace que I'_2, il faut avoir

$$D^2 I_3 < D^2 I'_2.$$

La variance de I_3 est

$$D^2 I_3 = \sum_{j=2}^{m} \frac{h_j^2}{n_j} D^2 f(\alpha_j - h_j \xi_1) + \frac{h_1}{n_1} D^2 f(\alpha_0 + h_1 \xi_1) +$$

$$+ 2 \sum_{\substack{j,\, k=2 \\ j \neq k}}^{m} h_j h_k C f(\alpha_j - h_j \xi_1) f(\alpha_k - h_k \xi_1) +$$

$$+ 2 \sum_{j=2} h_1 h_j C f(\alpha_j - h_j \xi_1) f(\alpha_0 + h_1 \xi_1).$$

Dans le calcul de $D^2 f(\alpha_j - h_j \xi_1)$ intervient la densité de probabilité de variable aléatoire $\zeta_j = f(\eta_j)$, $\eta_j = \alpha_j - h_j \xi_1$, où η_j est une variable aléatoire uniforme sur $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$. En conformité de [1], cette densité de probabilité sera :

$$\rho_j(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_j |f'(f^{-1}(y))|}, & y \in [f_{j-1}, f_j] \\ 0, & y \notin [f_{j-1}, f_j]. \end{cases}$$

Alors

$$\frac{h_j^2}{n_j} D^2 f(\alpha_j - h_j \xi_1) = \frac{h_j^2}{n_j} \left\{ \int_{f_{j-1}}^{f_j} u^2 \rho_j(u)\, du - \left(\int_{f_{j-1}}^{f_j} u \rho_j(u)\, du \right)^2 \right\} \geqslant 0,$$

et aussi pour $D^2 f(\alpha_0 + h_1 \xi_1)$.

La corrélation $C_{jk} = h_j h_k C f(\alpha_j - h_j \xi_1) f(\alpha_k - h_k \xi_1)$ sera

$$C_{jk} = h_j h_k [M f(\alpha_j - h_j \xi_1) f(\alpha_k - h_k \xi_1) - M f(\alpha_j - h_j \xi_1) \cdot M f(\alpha_k - h_k \xi_1)].$$

La densité de probabilité de variable aléatoire $f(\eta_j) f(\eta_k)$ est d'après [1]:

$$\rho_{f_j f_k}(u) = \rho_{jk}(u) = \int_{d_{jk}} \rho_j(x)\, \rho_k\left(\frac{u}{x}\right) \frac{dx}{|x|},$$

où $d_{jk} = [\delta_{jk}, \delta'_{jk}] = [f_{j-1}, f_j] \cap [f_{k-1}, f_k]$, avec la condition $x \neq 0$ sur d_{jk}. On remarque que $\rho_{jk}(u)$ est nulle pour $u \notin d_{jk}^2$.

Par conséquent

$$C_{jk} = h_j h_k \int_{d_{jk}^2} u^2 \rho_{jk}(u)\, du - \left(h_j \int_{f_{j-1}}^{f_j} u \rho_j(u)\, du \right) \left(h_k \int_{f_{k-1}}^{f_k} u \rho_k(u)\, du \right) \qquad (8)$$

En appliquant à la première intégrale de (8), la formule de moyenne du calcul intégral, puisque la fonction $\rho_{jk}(u) \geqslant o$ pour $u \in d^2_{jk}$, et u est bornée sur d^2_{jk}, on a:

$$h_j h_k \int_{d^2_{jk}} u^2 \rho_{jk}(u)\, du = h_j h_k \Omega_{jk}, \text{ où } \delta^2_{jk} \leqslant \Omega_{jk} \leqslant \delta'^2_{jk}, \text{ et } \int_{d^2_{jk}} \rho_{jk}(u)\, du = 1.$$

Analoguement, $h_j \int_{f_{j-1}}^{f_j} u \rho_j(u)\, du = h_j \omega_j$, où $m_j \leqslant \omega_j \leqslant M_j$, m_j, M_j étant respectivement min $[f_{j-1}, f_j]$, max $[f_{j-1}, f_j]$, et $\int_{f_{j-1}}^{f_j} \rho_j(u)\, du = 1$. Donc, il résulte

$$C_{jk} = h_j h_k (\Omega_{jk} - \omega_j \omega_k).$$

Pour que $D^2 I_3 < D^2 I'_2$, il faut avoir $\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{m} c_{jk} \leqslant o$, (car tous les autres termes de $D^2 I_3$ et $D^2 I'_2$, sont égaux), c'est-a-dire:

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{m} (\Omega_{jk} - \omega_j \omega_j) \leqslant o. \tag{9}$$

Et parce que

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{m} (\Omega_{jk} - \omega_j \omega_k) < \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{m} (\delta'^2_{jk} - m_j m_k),$$

il résulte que pour que l'efficacité de I_3 soit plus grande que celle de I'_2 il faut avoir:

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{m} (\delta'^2_{jk} - m_j m_k) \leqslant o,$$

et le théorème est démontré.

Si la fonction f de (5) est monotone sur l'intervalle d'intégration, alors $\rho_{jk} = o$ pour tout $j, k = 1, \ldots, m, j \neq k$, et la condition (7) devient: $\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{u} m_j m_k \geqslant o$. Donc on a:

THÉORÈME 3. *Si la fonction f de (5) est monotone sur l'intervalle d'intégration, dérivable et avec la dérivation $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, $j = 1, \ldots, m$ et si*

$$\sum_{\substack{j,\, k=1 \\ j \neq k}}^{m} m_j m_k \geqslant 0, \tag{10}$$

où $m_j = \min\ [f_{j-1}, f_j]$, *alors l'estimation I_3 est plus efficace que I'_2.*

Dans ce cas on peut déterminer la division Δ telle que la condition (10) soit accomplie.

2. Le cas $\xi' = a + b\ \xi_1$, $j = 2, \ldots, m$, a, b des constantes réelles quelconques, et ξ_1 une variable aléatoire uniforme sur $\left[-\frac{a}{b}, \frac{1-a}{b}\right]$, se traite analoguement à celui du point *1*, le théorème *2* reste valable.

3. Le cas où les variables $\xi'_j = \xi_1$, $j = 1, \ldots, m$, ξ_1 uniforme sur $[0, 1]$, la corrélation $C_{jk} = 0, j \neq k$, j, $k = 1, \ldots, m$, et donc $D^2 I_3 = D^2 I'_2$, c'est à dire les deux estimations ont la même efficacité.

Remarque. Il résulte des théorèmes 1 et 2, dans les conditions du théorème 2, $D^2 I_3 < D^2 I'_2 < D^2 I'_1$, et par conséquent l'estimateur I_3 de la méthode antithétique variée, est plus efficace que celui correspondant à l'échantillon stratifié et à la méthode Monte Carlo primitive.

(Manuscrit reçu le 25 janvier 1972)

BIBLIOGRAPHIE

1. Ciucu, G., *Elemente de teoria probabilităţilor şi statistică matematică*, Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.
2. Hammersley, J. M., Handscomb, D. C., *Monte Carlo Methods*, Methuen's Monographs, London, 1964.
3. Hammersley, J. M., Handscomb, D. C., *A new Monte Carlo technique antithetic variates*, „Proc. Cambridge Phil. Soc.," **52**, (1956), 449–475.
4. Stoka, M., Theodorescu, R., *Probabilitate şi geometrie*, Ed. ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

ASUPRA EFICIENŢEI UNOR PROCEDEE MONTE CARLO DE SELECŢIE STRATIFICATĂ PENTRU CALCULUL INTEGRALELOR

(Rezumat)

Lucrarea stabileşte condiţii pentru mărirea eficienţei metodei de selecţie stratificată [2] şi antitetic variată [3], comparativ cu metoda Monte Carlo primitivă; precum şi mărirea eficienţei metodei antitetic variată, faţă de metoda de selecţie stratificată.

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ МОНТЕ КАРЛО ОТНОСИТЕЛЬНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ СЕЛЕКЦИИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

(Резюме)

В работе установлены условия для повышения эффективности метода стратифицированной и антитетически разнообразной селекции [2], [3], по сравнению с примитивным методом Монте Карло, а также для повышения эффективности антитетически разнообразного метода по отношению к методу стратифицированной селекции.

ASUPRA REZOLVĂRII ECUAȚIILOR OPERAȚIONALE NELINIARE PRINTR-O METODĂ ANALOGĂ CU A HIPERBOLELOR TANGENTE

S. GROZE

1. Studiul problemei rezolvării unei ecuații operaționale, folosind principiul majorantei [1], cu ajutorul metodei hiperbolelor tangente caracterizată de algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n \left[I - \frac{1}{2} \Gamma_n P''(x_n)\, \Gamma_n P(x_n)\right]^{-1} P(x_n)$$

unde $\Gamma_n = [P'(x)]^{-1}$, iar I operatorul identic al spațiului, a fost făcut de către *R. A.* Ș a f i e v [2], presupunînd existența derivatelor de tip Fréchet pînă la ordinul trei.

B. J a n k ó [3] aplică această metodă, îmbunătățind condițiile date în [2] prin renunțarea la existența derivatelor de tip Fréchet de ordinul III.

În lucrarea de față se reia studiul amintit, înlocuind derivatele în sens Fréchet cu diferențe divizate ale operatorilor, noțiune mult mai largă decît cea de derivată în sens Fréchet.

2. Fie ecuația operațională

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

unde $P(x)$ este un operator continuu neliniar definit în spațiul supermetric [4] complet X și cu valori în el însuși, θ fiind elementul nul al spațiului.

Pentru rezolvarea ecuației (1) vom utiliza algoritmul [5]

$$x_{n+1} = x_n - \Lambda_n [I - P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Lambda_{n-1} P(x_{n-1}) \Lambda_n]^{-1} P(x_n) \tag{2}$$

unde $\Lambda_n = [P_{x_n, x_{n-1}}]^{-1}$, cunoscut sub denumirea de „metoda analogă metodei hiperbolei tangente".

Concomitent cu ecuația operațională (1) considerăm ecuația reală majorantă

$$Q(z) = 0 \tag{1'}$$

unde $Q(z)$ este o funcţie monotonă, definită pe intervalul I. Acestei ecuaţii îi asociem algoritmul

$$z_{n+1} = z_n - \frac{Q_{z_{n-1}, z_{n-2}} Q(z_n)}{Q_{z_n, z_{n-1}} \cdot Q_{z_{n-1}, z_{n-2}} - Q_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}} \cdot Q(z_n)} \tag{2'}$$

folosind aceeaşi notaţie pentru diferenţele divizate ale funcţiei $Q(z)$ ca şi pentru operatori.

Demonstrăm atunci următoarea

TEOREMĂ. *Dacă pentru aproximaţiile iniţiale* x_0, x_1, x_2, *respectiv* z_0, z_1, z_2, *avem satisfăcute condiţiile*

1°. *Există* $\Lambda = -[P_{x^{(1)}, x^{(2)}}]^{-1}$ *şi* $\rho_{X,X}(\Lambda) = -\frac{1}{Q_{z^{(1)}, z^{(2)}}} < B$ *pentru orice* $x^{(i)} \in S$, $i = 1, 2$, *S fiind definită prin inegalitatea* $\rho_X(x - x_0) \leqslant z' - z_0 \subset I$ *şi avem* $\rho_X(x_i - x_0) \leqslant z_0 - z_i$, $i = -1, -2$

2°. $\rho_X(P(x_i)) \leqslant Q(z_i)$, $i = 0, -1, -2$

3°. $\rho_{X^2, X}(P_{x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}}) \leqslant Q_{z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}}$

$\rho_{X^3, X}(P_{x^{(1)}, x^{(3)}, x^{(3)}, x^{(4)}}) \leqslant Q_{z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}, z^{(4)}}$, $x^{(i)} \in S$, $z^{(i)} \in I$

4°. $Q_{z^{(1)}, z^{(2)}} . Q_{z^{(2)}, z^{(3)}} > Q_{z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}} . Q(z^{(2)})$

atunci ecuaţia (1) admite o soluţie x^*, *limita şirului dat de (2), avînd loc delimitarea*

$$\rho_X(x^* - x_n) \leqslant z^* - z_n, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

z^* *fiind soluţia ecuaţiei (1').*

Demonstraţie. Arătăm pentru început că şirul $\{z_n\}$ dat de algoritmul (2') converge către z^*, soluţia ecuaţiei (1').

Presupunînd $z_{-2} \leqslant z_{-1} \leqslant z_0$, ţinînd seama de algoritmul (2') şi de condiţiile teoremei, deducem $z_1 \geqslant z_0$. Folosind inducţia, rezultă că şirul $\{z_n\}$ este monoton crescător. Să arătăm că este mărginit superior de soluţia ecuaţiei (1).

Considerăm funcţia auxiliară

$$F(z) = z - \lambda Q(z) - \nu Q(z)(z - z_n) \tag{4}$$

λ şi ν urmînd să fie determinaţi în mod convenabil.

Se observă că dacă z^* este o soluţie a ecuaţiei (1'), atunci $F(z^*) = z^*$.

Punînd condiţia ca $F_{z_n, z_{n-1}} = 0$ şi $F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}} = 0$ se obţine

$$\lambda = H^{-1} \cdot Q_{z_{n-1}, z_{n-2}}, \quad \nu = -H^{-1} \cdot Q_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}} \tag{5}$$

unde

$$H = Q_{z_n, z_{n-1}} \cdot Q_{z_{n-1}, z_{n-2}} - Q_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}} Q(z_{n-1}).$$

Ţinînd seama de expresiile lui λ şi ν se arată uşor că

$$F(z_n) = z_{n+1}. \tag{6}$$

În condiţiile teoremei avem $H > 0$ şi deci $\lambda < 0$, $\nu < 0$ şi se arată că $F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, z_{n-3}} \geqslant 0$.

Considerînd relaţia

$$F(z) = F(z_n) + F_{z_n, z_{n-1}}(z - z_n) + F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}}(z - z_n)(z - z_{n-1}) + \\ + F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, }(z - z_n)(z - z_{n-1})(z - z_{n-2}), \tag{7}$$

ţinînd seama de (6) şi de faptul că $F(z^*) = z^*$, deducem

$$z^* = z_{n+1} + F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, z^*_{n-3}}(z^* - z_n)(z^* - z_{n-1})(z^* - z_{n-2}). \tag{8}$$

Deoarece $F_{z_n, z_{n-1}, z_{n-2}, z^*_{n-3}} \geqslant 0$, folosind inducţia, din (8) se deduce

$$z^* - z_{n+1} \geqslant 0$$

deci şirul (2′) este mărginit superior de către z^*. Să arătăm că limita lui este chiar z^*. Pentru aceasta trecem la limită în (2′). Dacă avem $\bar{z} = \lim_{n\to\infty} z_n$, atunci rezultă $Q(\bar{z}) = 0$ şi cum ecuaţia (1′) admite pe z^* ca singură rădăcină, rezultă $z^* = \bar{z}$.

Demonstrăm în continuare că elementul x_1 calculat cu ajutorul algoritmului (2) aparţine sferei S.

Avem $x_1 - x_0 = -\Lambda_0 [I - P_{x_0, x_n, x_{-1}, x_{-2}} \Lambda_{-1} P(x_{-1}) \Lambda_0]^{-1} P(x_0)$, iar în baza condiţiilor teoremei rezultă $\rho_X(x_1 - x_0) \leqslant z_1 - z_0 \leqslant z' - z_0$ deci $x_1 \in S$.

Arătăm că trecînd de la elementele x_0, x_{-1}, x_{-2} la x_1, x_0, x_{-1} condiţia 2° din enunţul teoremei este verificată.

Considerăm operatorul

$$P(x_1) = P(x_0) + P_{x_0, x_{-1}}(x_1 - x_0) + P_{x_0, x_{-1}, x_{-2}}(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1}) + \\ + P_{x_0, x_{-1}, x_{-2}, x_1}(x_1 - x_0)(x_1 - x_{-1})(x_1 - x_{-2})$$

care în baza condiţiilor teoremei, conduce la $\rho_X(P(x_1)) \leqslant Q(z_1)$.

Îndeplinirea condiţiilor 1°, 3° şi 4° rezultă din faptul că $x_1 \in S$.

Folosind inducţia deducem că pentru orice x_n, avem

$$\rho_X(P(x_n)) \leqslant Q(z_n) \tag{9}$$

$x_n \in S$ deoarece ţinînd seama că $\rho_X(x_n - x_{n-1}) \leqslant z_n - z_{n-1}$ avem

$$\rho_X(x_n - x_0) \leqslant z_n - z_0 \leqslant z' - z_0.$$

Putem stabili inegalitatea $\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leqslant z_{n+p} - z_n$ de unde se deduce, în baza rezultatelor obţinute privitor la şirul $\{z_n\}$ că $\{x_n\}$ admite o singură limită x^*, pentru care avem $\rho_X(x^* - x_n) \leqslant z^* - z_n$ deci relaţia (3).

Rămîne să arătăm că x^* este o soluţie a ecuaţiei operaţionale considerate. Pentru aceasta, din (9), în baza continuităţii lui $P(x)$ şi $Q(z)$, se deduce $\rho_X(P(x^*)) \leqslant Q(z^*) = 0$ şi deci $P\ (x^*) = 0$.

Teorema este astfel complet demonstrată.

(Intrat în redacţie la 10 octombrie 1971)

BIBLIOGRAFIE

1. K a n t o r o v i c i, L. V., *Prinţip majorant i metoda Niutona*, DAN, **74**, 1, (1951), 17–20.
2. S a f i e v, R. A., *Ob odnoi modifikaţii metoda kasatelnîh ghiperbol*, „Dokl. AN Azerb. SSR", **19**, 1 (1963), 3–8.
3. J a n k ó, B., *Despre rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare prin metoda hiperbolelor tangente*, „Com. Acad. R.P.R.", 9., **XIII** (1963), 769–771.
4. C o l l a t z, L., *Funktionalanalysis und numerische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, 1964.
5. B a l á z s, M., *Contribuţii la studiul rezolvării ecuaţiilor în spaţii Banach*. Teză de doctorat, 1968.

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ МЕТОДА, АНАЛОГИЧНОГО С МЕТОДОМ КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ

(Р е з ю м е)

Автор изучал вопрос решения некоторого нелинейного операторного уравнения, используя принцип мажоранты [1] при помощи алгоритма [2]. В отличие от проведенного Р. А. С а ф и е в ы м исследования, в котором предполагается существование производных типа Фреше до третьего порядка [2], а также в отличие от исследования, проведенного Б. Я н к о [3], в настоящей работе заменяются производные типа Фреше разделенными разностями операторов — понятие, более широкое, чем понятие производной Фреше.

SUR LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS OPÉRATIONELLES NON-LINÉAIRES PAR UNE MÉTHODE ANALOGUE À CELLE DES HYPERBOLES TANGENTES

(R é s u m é)

Le travail traite du problème de la résolution d'une équation opérationelle non-linéaire utilisant le principe de la majorante [1], à l'aide de l'algorithme (2). À la différence de l'étude entreprise par R. A. S a f i e v, où l'on suppose l'existence des dérivées de type Fréchet jusqu'au troisième ordre [2] et par B. J a n kó [3], le présent travail remplace les dérivées de type Fréchet par les différences divisées des opérateurs, notion beaucoup plus large que celle de dérivée Fréchet.

SUR UNE FORMULE DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE

PARASCHIVA PAVEL

1. Cette note a comme point de départ la formule de dérivation numérique

$$f(x_1) - 2f(x_2) + f(x_3) = h^2 f''(x_2) + R \tag{1}$$

où les noeuds x_1, x_2, x_3 sont en progression arithmétique dont la raison est h.

Nous allons étudier la formule de dérivation numérique

$$\Delta^{n-1} f(x_1) = \sum_{i-1}^{n-1} A_i f''(x_i) + R \tag{2}$$

où $f \in C^{n+1}$ $[x_1, x_n]$ et les noeuds x_1, x_2, ..., x_n sont en progression arithmétique avec la raison h.

La formule de dérivation numérique (2) est une extension de la formule de dérivation numérique étudiée par *D. V.* Ionescu [1].

2. En suivant la méthode du travail [1], nous attachons aux intervalles $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ les fonctions φ_1, φ_2, ..., φ_{n-1} solutions des equations differentielles

$$\varphi_1^{(n)}(x) = 1,\ \varphi_2^{(n)}(x) = -\ C_{n-2}^1,\ \ldots,\ \varphi_{n-1}^{(n)}(x) = (-1)^n\, C_{n-2}^{n-2} \tag{3}$$

satisfaisant aux conditions aux limites

$$\begin{gathered} \varphi_1^{(r)}(x_1) = 1 \quad r = 0,1,\ldots,n-2,\ n-1 \\ \varphi_k^{(r)}(x_k) = \varphi_{k-1}^{(r)}(x_k) \quad r = 0,1,\ldots,n-3, n-1\ ;\ k = 2,3,\ldots,n-1 \\ \varphi_n^{(r)}(x_n) = 0,\ r = 0,1,\ \ldots,\ n-2,\ n-1 \end{gathered} \tag{4}$$

Dans ces conditions, nous avons

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_1^{(n+1)}(x)\, f(x)\, dx = 0\ ;\ \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2^{(n+1}\ (x)\, f(x)\, dx = 0, \ldots \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_{n-1}^{(n+1(}(x)\ f(x)\ dx = 0 \tag{5}$$

et en appliquant la formule généralisée d'intégration par parties nous pouvons écrire

$$[\varphi_1^{(n)}(x) f(x) - \varphi_1^{(n-1)}(x) f'(x) + \ldots + (-1)^n \varphi_1(x) f^{(n)}(x)]_{x_1}^{x_2} =$$

$$= (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x) \; f^{(n+1)}(x) \, dx.$$

$$[\varphi_2^{(n)}(x) f(x) - \varphi_2^{(n-1}(x) f'(x) + \ldots + (-1)^n \varphi_2(x) f^{(n)}(x)]_{x_2}^{x_3} =$$

$$= (-1)^n \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2(x) \; f^{(n+1)}(x) \, dx \tag{6}$$

$$[\varphi_{n-1}^{(n)}(x) f(x) - \varphi_{n-1}^{(n-1)}(x) f'(x) + \ldots + (-1)^n \varphi_{n-1}(x) f^{(n)}(x)]_{x_{n-1}}^{x_n} =$$

$$= (-1)^n \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_{n-1}(x) f(x) \; dx$$

En ajoutant membre à membre ces équations, et en tenant compte des équations différentielles (4) et des conditions aux limites (5) nous obtenons la formule de dérivation numérique (2) avec

$$\begin{aligned} A_2 &= (-1)^n [\varphi_2^{(n-2)}(x_2) - \varphi_1^{(n-2)}(x_2)] \\ A_3 &= (-1)^n [\varphi_3^{(n-2)}(x_3) - \varphi_2^{(n-2)}(x_3)] \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1} &= (-1)^n [\varphi_{n-1}^{(n-2)}(x_{n-1}) - \varphi_{n-2}^{(n-2)}(x_{n-1})] \end{aligned} \tag{7}$$

et

$$R = \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x) \, f^{(n+1)}(x) \, dx \tag{8}$$

où la fonction $\varphi(x)$ coïncide sur les intervalles $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$ . . ., $[x_{n-1}, x_n]$ avec les fonctions $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$, . . ., $\varphi_{n-1}(x)$.

3. L' existence de la formule de dérivation numérique (2) dépend de l'existence de la solution du problème (4)—(5).

Les solutions d'équations différentielles avec les conditions aux limites (5) sont

$$\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i-1} \; C_{n-1}^{i-} \frac{(x - x_i)_+^n}{n!} + \sum_{i=2}^{n-1} \lambda_i \frac{(x - x_i)_+^{n-2}}{(n-2)!} \tag{9}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$u_+ = \begin{cases} u & \text{si} \quad u > 0 \\ 0 & \text{si} \quad u \leqslant 0 \end{cases}.$$

Écrivant que la fonction $\varphi_{n-1}(x)$ donnée par la dernière formule (9) satisfait aux conditions aux limites (5) du point x_n, nous avons les équations suivantes

$$
\begin{array}{llll}
\lambda_2 & +\lambda_3 & +\ldots+\lambda_{n-1} & = 0 \\
\lambda_2(n-2) & +\lambda_3(n-3) & +\ldots+\lambda_{n-1}1 & = 0 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\lambda_2(n-2)^{n-4} & +\lambda_3(n-3)^{n-4} & +\ldots+\lambda_{n-1}1^{n-4} & = 0 \\
\lambda_2(n-2)^{n-3} & +\lambda_3(n-3)^{n-3} & +\ldots+\lambda_{n-1}1^{n-3} & = -(n-3)!\,h^2 \\
\lambda_2(n-2)^{n-2} & +\lambda_3(n-3)^{n-2} & +\ldots+\lambda_{n-1}1^{n-2} & = -\frac{(n-1)!}{2}h^2
\end{array}
\tag{10}
$$

pour déterminer $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Le système d'équations (10) est compatible, puisque son déterminant caractéristique est zéro.

4. La solution des équations (10) est donnée par les formules

$$\lambda_k = (-1)^{k-1}C_{n-3}^{k-2}h^2, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1$$

et d'après les formules (7) et (9) nous avons

$$A_k = (-1)^{n+k-1}C_{n-3}^{k-2}h^2, \quad k = 2, 3, \ldots, n-1 \tag{11}$$

d'où il résulte que la formule de dérivation numérique (2) prend la forme

$$\Delta^{n-1}f(x_1) = \sum_{k=2}^{n-1}(-1)^{n+k-1}C_{n-3}^{k-2}h^2 f''(x_k) + \int_{x_1}^{x_n}\varphi(x)f^{(n+\ )}(x)\,dx$$

$$n \geqslant 3$$

5. Théorème 1. *La dérivée $\varphi^{(n-3)}(x)$ a $n-3$ zéros dans l'intervalle (x_1, x_n).*

La dérivée $\varphi^{(n-3)}(x)$ de la fonction $\varphi_j(x)$ s'écrit sous la forme

$$\varphi_j^{(n-3)}(x) = (-1)^{j-1}\frac{(n-3)(n-4)\ldots(n-j)}{6(j-1)!}\{(n-2)(x-x_j)^3 -$$
$$-3(j-1)(x-x_j)^2 + 3(j-1)(x-x_j) - (j-1)\}$$

On voit facilement que la fonction $\varphi_j^{(n-3)}(x)$ a un seul zéro dans l'intervalle (x_j, x_{j+1}), pour $j = 2, 3, \ldots, n-2$. q.e.d.

Observation. Les fonctions

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_1)^n}{n!}$$

et

$$\varphi_2(x) = (-1)^n\frac{(x-x_n)^n}{n!}$$

sont positives dans l'intervalle (x_1, x_2) respectivement (x_{n-1}, x_n)

THÉORÈME 2. *La fonction $\varphi(x)$ est positive dans l'intervalle* (x_1, x_n).

Pour cela nous démontrerons que la fonction $\varphi(x)$ n'a qu'un seul extremum dans l'intervalle (x_1, x_n).

Nous supposons que la dérivée $\varphi'(x)$ ait trois zéros dans l'intervalle (x_1, x_n). En appliquant successivement le théorème de Rolle aux fonctions $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, ..., $\varphi^{(n-3)}(x)$, et tenant compte des conditions aux limites (5) aux points x_1 et x_n, on arrive à la conclusion que $\varphi^{(n-3)}$ doit avoir $n-1$ zéros dans l'intervalle (x_1, x_n), ce qui est impossible, d'après le théorème 1.

Donc la fonction $\varphi(x)$ a un seul extremum dans l'intervalle (x_1, x_n); elle est positive dans l'intervalle (x_1, x_n).

(Manuscrit reçu le 10 décembre 1972)

BIBLIOGRAPHIE

1. Ionescu, D. V., *Généralisation d'une formule de dérivation numérique de V. N. Fadeeva*, „Annales Polonici Mathematici", **XIV** (1964), 169–181.
2. Ionescu, D. V., *Cuadraturi numerice*, Bucureşti, 1957.
3. Pavel, P., *O extindere a unei formule de derivare numerică a lui V. N. Fadeeva*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mec., f.1., 1972, 47–54.

ASUPRA UNEI FORMULE DE DERIVARE NUMERICĂ

(Rezumat)

În această notă, autorul generalizează formulele de derivare numerică date de D. V. Ionescu [1], studiind cu metoda funcţiei formulele de derivare numerică

$$\Delta^{n-1} f(x_1) = \sum_{i=2}^{n-1} A_i f''(x_i) + R$$

în care coeficienţii A_i sînt daţi de formulele (11), iar restul este pus sub formă de integrală definită

$$R = \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x)\, dx$$

demonstrînd că funcţia φ este pozitivă în intervalul (x_1, x_n).

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

(Резюме)

Автор работы обобщает формулы численного дифференцирования, данные Д. В. Ионеску [1], изучая методом функции φ формулы численного дифференцирования

$$\Delta^{n-1} f(x_1) = \sum_{i=2}^{n-1} A_i f''(x_i) + R,$$

где коэффициенты A_i даны формулами (11), а остаток изображен в виде определенного интеграла

$$R = \int^{n_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x)\, dx.$$

Доказывается, что функция φ является положительной в интервале (x_1, x_n)).

CONSTRUIREA UNEI NOI CLASE DE OPERATORI LINIARI POZITIVI PENTRU APROXIMAREA FUNCȚIILOR DE DOUĂ VARIABILE

FELICIA STANCU

În această lucrare se construiește o nouă clasă de operatori liniari pozitivi, de tip polinomial, care depind de un parametru nenegativ α, definiți pe mulțimea funcțiilor de două variabile, continue pe un domeniu triunghiular. Acești operatori au proprietăți de aproximare uniformă a funcțiilor similare cu operatorii de tip Bernstein corespunzători unui domeniu triunghiular, la care de altfel se reduc în cazul particular cînd parametrul $\alpha = 0$. Rezultatele din această lucrare reprezintă o extindere la două variabile, în alt sens decît cea dată în lucrarea noastră recentă [10], a unor rezultate din lucrarea [9].

1. Se știe [2] că există un polinom unic, P_m, de grad global m, care coincide cu o funcție dată g pe un sistem de noduri din plan (t_i, z_j) $(i = \overline{0,m}$ $j = \overline{0, m - i})$, care formează o rețea triunghiulară. Acest polinom se poate exprima cu ajutorul diferențelor divizate bidimensionale conform formulei

$$P_m(g;\, t,\, z) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (t-t_0)\ldots(t-t_{i-1})(z-z_0)\ldots(z-z_{j-1})\begin{bmatrix} t_0, & t_1, & \ldots, & t_i \\ z_0, & z_1, & \ldots, & z_j \end{bmatrix}; g \Bigg].$$

Să alegem drept funcție g un polinom în două variabile t și z, de grad global m, ai cărei coeficienți pot depinde de un parametru real α, care la rîndul său poate depinde doar de numărul natural m. Coordonatele nodurilor vom presupune că sînt: $t_i = x + i\alpha$, $z_j = y + j\alpha$, (x, y) fiind un punct oarecare, dat, din plan. Folosind puterea factorială

$$u^{[n,\, h]} = u(u-h)\ldots(u-(n-1)h), \quad u^{[0,\, h]} = 1 \ (u \neq 0),$$

polinomul respectiv, pe care îl notăm $\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}$ se va putea reprezenta, în conformitate cu formula precedentă, în felul următor

$$\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(t,z) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (t-z)^{[i,\alpha]} (z-y)^{[j,\alpha]} \frac{\Delta_{\alpha,\alpha}^{i,j}\, \varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x,y)}{i!\, j!\, \alpha^{i+j}}, \tag{1}$$

deoarece restul în formula de interpolare $g(t,z) = P_m(g; t,z) + R_m(g;t,z)$ se poate exprima [2] ca o combinaţie liniară de diferenţe divizate de ordinul $m+1$ şi în cazul considerat aici ele vor fi nule deoarece $g = \varphi_m^{\langle\alpha\rangle}$ are gradul global m. În reprezentarea (1) am ţinut seama de formula care exprimă o diferenţă divizată avînd coordonatele nodurilor echidistante cu ajutorul diferenţelor finite, adică

$$\begin{bmatrix} a, & a+h, & \ldots, & a+rh \\ b, & b+k, & \ldots, & b+sk \end{bmatrix}; g\Bigg] = \frac{\Delta_{h,k}^{r,s}\, g(a,b)}{r!\, s!\, h^r k^s},$$

unde

$$\Delta_{h,k}^{r,s} g(a,b) = \overline{\Delta}_h^r \overline{\overline{\Delta}}_k^s g(a,b) = \sum_{\nu=0}^{r} \sum_{\mu=0}^{s} (-1)^{\nu+\mu} \binom{r}{\nu} \binom{s}{\mu} g(a + \overline{r-\nu}\, h,\ b + \overline{s-\mu}\, k),$$

operatorii diferenţelor finite $\overline{\Delta}$ şi $\overline{\overline{\Delta}}$ acţionînd în raport cu prima, respectiv cu a doua, variabilă de care depinde funcţia g.

Dacă alegem $t = z = 0$ atunci obţinem

$$\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(0,0) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{(-x)^{[i,\alpha]}\, (-y)^{[j,\alpha]}}{i!\, j!\, \alpha^{i+j}}\, \Delta_{\alpha,\alpha}^{i,j}\, \varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x, g).$$

Avînd în vedere că:

$$(-x)^{[i,\alpha]} = (-1)^i x^{[i,-\alpha]}, \quad (-y)^{[j,\alpha]} = (-1)^j y^{[j,-\alpha]},$$

dacă presupunem că $\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(0,0) \neq 0$, putem scrie identitatea

$$\frac{1}{\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(0,0)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^{i+j} \frac{x^{[i,-\alpha]}\, y^{[j,-\alpha]}}{i!\, j!\, \alpha^{i+j}}\, \Delta_{\alpha,\alpha}^{i,j}\, \varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x,y) = 1.$$

2. În continuare vom asocia fiecărei funcţii f, definită pe triunghiul

$$T = \{(u,v) | u \geqslant 0,\ v \geqslant 0,\ u+v \leqslant 1\},$$

operatorul liniar $L_m^{\langle\alpha\rangle}$, depinzînd de parametrul α, definit prin formula

$$(L_m^{\langle\alpha\rangle} f)(x, y) = \tag{2}$$

$$= \frac{1}{\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(0,0)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^{i+j} \frac{x^{[i,-\alpha]}\, y^{[j,-\alpha]}}{i!\, j!\, \alpha^{i+j}}\, \Delta_{\alpha,\alpha}^{i,j}\, \varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x,y) \cdot f((x_{m,i}, y_{m,j}),$$

unde $(x_{m,i}, y_{m,j}) \in T$ $(i, j = \overline{0, m},\ m = 1, 2, \ldots)$.

În ipoteza că $\alpha \geqslant 0$ şi că $\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}$ satisface condiţiile: $\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(0,0) > 0$, $(-1)^{i+j}\, \Delta_{\alpha,\alpha}^{i,j}\, \varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x,y) \geqslant 0$, oricare este $(x,y) \in T$ şi oricare este numărul natural m, iar $i = \overline{0,m}$, $j = \overline{0,\ m-i}$, se constată că $(L_m^{\langle\alpha\rangle})_{m=1}^{\infty}$ reprezintă un şir de operatori liniari polinomiali pozitivi. Se observă că avem $(L_m^{\langle\alpha\rangle} f)(0,0) = f(x_{m,0}, y_{m,0})$.

Este evident că în cazul $\alpha > 0$ putem scrie

$$(L_m^{<\alpha>} f)(x, y) =$$

$$= \frac{1}{\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{-\frac{x}{\alpha}}{i} \binom{-\frac{y}{\alpha}}{j} \Delta_{\alpha,\alpha}^{i,j} \varphi_m^{<\alpha>}(x, y) \cdot f(x_{m,i}, y_{m,j}),$$

unde am folosit notația binecunoscută pentru coeficienții binomiali generalizați: $\binom{\gamma}{k} = \frac{\gamma(\gamma-1)\ldots(\gamma-k+1)}{k!}$, γ fiind un număr real, iar k un întreg nenegativ.

Operatorii definiți la (2) pot fi utili în probleme de aproximare polinomială uniformă a funcțiilor f continue pe triunghiul T.

Exemplu. Presupunînd că $x_{m,i} = i/m, y_{m,j} = j/m$, *iar*

$$\varphi_m^{<\alpha>}(x,y) = (1 - x - y)^{[m,-\alpha]} = (1 - x - y)^{[m,-\alpha]} = (1-x-y)(1-x-y+$$

$$+\alpha)\ldots(1-x-y+\overline{m-1}\alpha), \tag{3}$$

dacă se aplică formula cunoscută din teoria diferențelor

$$\Delta_\alpha^i u^{[r,\alpha]} = r^{[i,1]} \alpha^i u^{[r-i,\alpha]},$$

atunci pentru diferența de ordinul i, cu pasul α, în raport cu prima variabilă se obține

$$\overline{\Delta}_\alpha^i \varphi_m^{<\alpha>}(x,y) = (-1)^m \overline{\Delta}_\alpha^i = (x+y-1)^{[m,\alpha]} = (-1)^i \alpha^i m^{[i,1]} (1-x-y)^{[m-i,-\alpha]}.$$

Aplicînd apoi operatorul Δ_α^j în raport cu cea de a doua variabilă, obținem

$$\Delta_{\alpha,\alpha}^{i,j} \varphi_m^{<\alpha>}(x,y) = (-1)^{i+j} \alpha^{i+j} m^{[i,1]}(m-i)^{[j,1]}(1-x-y)^{[m-i-j,-\alpha]}.$$

În felul acesta ajungem la operatorul $L_m^{<\alpha>}$ definit de egalitatea

$$(L_m^{<\alpha>} f)(x,y) = \tag{4}$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{=-}^{iuj0} \binom{u}{i} \binom{m-i}{j} \frac{x^{[i,-\alpha]} y^{[j,-\alpha]} (1-x-y)^{[m-i-j,-\alpha[}}{1^{[m,-\alpha]}} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right),$$

introdus și studiat anterior în lucrările [7], [8].

Se observă că pentru $\alpha = 0$ obținem operatorul lui Bernstein pentru două variabile și domeniul triunghiular T:

$$(B_m f)(x,y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i} \binom{m-i}{j} x^i y^j (1-x-y)^{m-i-j} f\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right),$$

considerat anterior în lucrările [3], [4], [5], [6].

Fie $\varphi_m = \varphi_m^{\langle 0 \rangle}$. Deoarece

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\Delta^{i,j}_{\alpha,\alpha}\, \varphi_m^{\langle\alpha\rangle}\,(x, y)}{\alpha^{i+j}} = \varphi_m^{(i,j)}\,(x, y),$$

unde

$$\varphi_m^{(i,j)}\,(x, y) = \frac{\partial^j}{\partial y^j}\left(\frac{\partial^i}{\partial x^i}\varphi_m(x, y)\right),$$

se observă că în baza lui (2) se ajunge la operatorul L_m definit de egalitatea

$$(L_m f)\,(x, y) = \frac{1}{\varphi_m(0,0)} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^{i+j} \frac{x^i y^j}{i\,!\,j\,!} \varphi_m^{(i,j)}(x, y) \cdot f(x_{m,i}, y_{m,j})).$$

Dacă se fac aici particularizările

$$\varphi_m(x, y) = (1 - x - y)^m,\quad x_{m,i} = \frac{i + \beta'}{m + \gamma'},\quad y_{m,j} = \frac{j + \beta''}{m + ''},$$

unde $0 \leq \beta' \leq \gamma'$, $0 \leq \beta'' \leq \gamma''$, se ajunge la următoarea generalizare a operatorului lui Bernstein pentru două variabile:

$$(B_m f)\,(x, y\,;\, \beta', \gamma'\,;\, \beta'', \gamma'') =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \binom{m}{i}\binom{m-i}{j} x^i y^j (1 - x - y)^{m-i-j} f\left(\frac{i + \beta'}{m + \gamma'},\ \frac{j + \beta''}{m + \gamma''}\right).$$

Pentru $\varphi_m(0,0) = 1$ şi $x_{m,i} = i/m$, $y_{m,j} = j/m$ se obţine un operator polinominal care constituie o generalizare a operatorului lui Baskakov dat pentru o singură variabilă în lucrarea [1].

3. În continuare ne va fi utilă

LEMA 1. *Diferenţa bidimensională* $\Delta^{r,s}_{-\alpha,-\alpha}$, *cu punctul de plecare* $(x, y) \in T$, *a lui* $L_m^{\langle\alpha\rangle} f$, *care foloseşte nodurile* $\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right)$, *unde* $i = \overline{0, m}$, $j = \overline{0, m - i}$, *se poate reprezenta conform formulei*

$$\Delta^{r,s}_{-\alpha,-\alpha}(L_m^{\langle\alpha\rangle} f)\,(x, y) =$$

$$= \frac{(-1)^{r+s}}{\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}\,(0,0)} \sum_{\nu=0}^{m-r} \sum_{\mu=0}^{m-\nu-s} (-1)^{\nu+\mu} \frac{x^{[\nu,-\alpha]}\, y^{[\mu,-\alpha]}}{\nu\,!\,\mu\,!\,\alpha^{\nu+\mu}} \Delta^{\nu,\mu}_{\alpha,\alpha}\left(\Delta^{r,s}_{-\alpha,-\alpha}\,\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}\,(x, y)\right) \cdot$$

$$\cdot\ \Delta^{r,s}_{\frac{1}{m},\frac{1}{m}}\, f(0,\ 0).$$

Demonstrație. În baza unui rezultat stabilit în [9] putem scrie

$$\overline{\overline{\Delta}}{}^{s}_{-\alpha}\left[\sum_{j=0}^{m-\nu}(-1)^{j}\frac{y^{[j,-\alpha]}}{j!\,\alpha^{j}}\overline{\overline{\Delta}}{}^{j}_{\alpha}\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x,y)\cdot f\left(\frac{\nu}{m},\frac{j}{m}\right)\right]=$$

$$=(-1)^{s}\sum_{\mu=0}^{m-\nu-s}(-1)^{\mu}\frac{y^{[\mu,-\alpha]}}{\mu!\,\alpha^{\mu}}\overline{\overline{\Delta}}{}^{\mu}_{\alpha}(\overline{\overline{\Delta}}{}^{s}_{-\alpha}\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x,y)\,\overline{\overline{\Delta}}{}^{s}_{\frac{1}{m}}f\left(\frac{\nu}{m},0\right).$$

Ținînd seama de acest rezultat și de formula (2), prin aplicarea operatorului $\overline{\Delta}{}^{r}_{-\alpha}$ obținem

$$\Delta^{r,s}_{\alpha,-\alpha}(L_m^{\langle\alpha\rangle}f)(x,y)=\frac{(-1)^{r+s}}{\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(0,0)}(-1)^{\nu}\frac{x^{[\nu,-\alpha]}}{\nu!\,\alpha^{\nu}}\cdot$$

$$\cdot\sum_{\mu=0}^{m-\nu-s}(-1)^{\mu}\frac{y^{[\mu,-\alpha]}}{\mu!\,\alpha}\cdot\overline{\Delta}{}^{\nu}_{\alpha}(\overline{\Delta}{}^{r}_{-\alpha}\overline{\overline{\Delta}}{}^{r}_{\alpha}(\overline{\overline{\Delta}}{}^{s}_{-\alpha}\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x,y))\,\overline{\Delta}{}^{r}_{\frac{1}{m}}\overline{\overline{\Delta}}{}^{s}_{\frac{1}{m}}f(0,0)=$$

$$=\frac{(-1)^{r+s}}{\varphi^{\langle\alpha\rangle}(0,0)}\sum_{\nu=0}^{m-r}\sum_{\mu=}^{m-\nu-s}(-1)^{\nu+\mu}\frac{x^{[\nu,-\alpha]}y^{[\mu,-\alpha]}}{\nu!\,\mu!\,\alpha^{\nu+\mu}}\Delta^{\nu,\mu}_{\alpha,\alpha}(\Delta^{r,s}_{-\alpha,-\alpha}\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x,y)\ \Delta^{r,s}_{\frac{1}{m},\frac{1}{m}}f(0,0).$$

Bazați pe Lema 1 vom putea da o reprezentare a lui $L_m^{\langle\alpha\rangle}f$ cu ajutorul diferențelor funcției f.

TEOREMA 1. *In cazul nodurilor* $\left(\frac{i}{m},\frac{j}{m}\right)$, *unde* $i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,m-i}$, *are loc reprezentarea*

$$(L_m^{\langle\alpha\rangle}f)(x,y)=$$

$$=\frac{1}{\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(0,0)}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}\frac{x^{[i,-\alpha]}y^{[j,-\alpha]}}{i!\,j!\,\alpha^{i+}}(\Delta^{i,j}_{-\alpha,-\alpha}\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(0,0)\ \Delta^{i,j}_{\frac{1}{m},\frac{1}{m}}f(0,0),$$

oricare este $(x,y)\in T$.

Demonstrație. Pe baza formulei de interpolare a lui Biermann corespunzătoare polinomului $L_m^{\langle\alpha\rangle}f$ și nodurilor $(-i\alpha,-j\alpha)$, unde $i=\overline{0,m}$, $j=\overline{0,m-i}$, avem

$$(L_m^{\langle\alpha\rangle}f)(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{m-i}x^{[i,-\alpha]}y^{[j,-\alpha]}\begin{bmatrix}0,-\alpha,\dots,-i\alpha\\0,-\alpha,\dots,-j\alpha\end{bmatrix};L_m^{\langle\alpha\rangle}f\Bigg],$$

întrucît restul corespunzător este identic nul.

Cum nsă

$$\begin{matrix}0,-\alpha,\dots,-i\alpha\\0,-\alpha,\dots,-j\alpha\end{matrix};L_m^{\langle\alpha\rangle}f\Bigg]=\frac{(-1)^{i+j}}{i!\,j!\,\alpha^{i+j}}\Delta^{i,j}_{-\alpha,-\alpha}(L_m^{\langle\alpha\rangle}f)(0,0),$$

putem scrie dezvoltarea

$$(L_m^{<\alpha>} f)(x, y) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (-1)^{i+j} \frac{x^{[i,-\alpha]} y^{[j,-\alpha]}}{i!\,j!\,\alpha^{i+j}} \Delta^{i,j}_{-\alpha,-\alpha}(L_m^{<\alpha>} f)(0, 0).$$

Dacă în formula (5) punem $r = i$, $s = j$, $x = y = 0$, obţinem

$$\Delta^{i,j}_{-\alpha,-\alpha}(L_m^{<\alpha>} f)(0, 0) = \frac{(-1)^{i+j}}{\varphi_m^{<\alpha>}(0, 0)\alpha^{j+i}} \Delta^{i,j}_{-\alpha,-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0, 0) \,.\, \Delta^{i,j}_{\frac{1}{m},\frac{1}{m}} f(0, 0),$$

deoarece va fi diferit de zero numai termenul corespunzător lui $\nu = \mu = 0$. Prin înlocuirea acestui rezultat în egalitatea anterioară se obţine reprezentarea (6) pe care ne-am propus s-o demonstrăm.

4. Fie $e_{i,j}(x, y) = x^i y^j$ $(0 \leqq i + j \leqq 2)$, oricare este $(x, y) \in T$. În vederea stabilirii unei teoreme de convergenţă pentru şirul de operatori $(L_m^{<\alpha>})$ este util să se calculeze $(L_m^{<\alpha>} f)(x, y)$ în cazurile cînd $f = e_{i,j}(0 \leqq i + j \leqq 2)$.

Folosind reprezentarea (6) se găseşte imediat că avem

$$(L_m^{<\alpha>}\varphi_{0,0})(x, y) = 1, \quad (L_m^{<\alpha>} e_{1,0})(x, y) = x \frac{\overline{\Delta}_{-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0, 0)}{\alpha m \varphi_m^{<\alpha>}(0, 0)}, \quad (L_m^{<\alpha>} e_{0,1})(x, y) =$$

$$= y \frac{\overline{\overline{\Delta}}_{-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0, 0)}{\alpha m \varphi_m^{<\alpha>}(0, 0)},$$

$$(L_m^{<\alpha>} e_{2,0})(x, y) =$$

$$= x \frac{\overline{\Delta}_{-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}{\alpha m^2 \varphi_m^{<\alpha>}(0,0)} + x(x + \alpha) \frac{\overline{\Delta}^2_{-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}{\alpha^2 m^2 \varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}, \quad (L_m^{<\alpha>} e_{1,1})(x, y) =$$

$$= xy \frac{\Delta^{1,1}_{-\alpha,-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}{\alpha^2 m^2 \varphi_m^{<\alpha>}(0,0)},$$

$$(L_m^{<\alpha>} e_{0,2})(x, y) = y \frac{\overline{\overline{\Delta}}_{-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}{\alpha m^2 \varphi_m^{<\alpha>}(0,0)} + y(y + \alpha) \frac{\overline{\overline{\Delta}}^2_{-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}{\alpha^2 m^2 \varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}.$$

Putem acum enunţa

TEOREMA 2. *Să presupunem că parametrul nenegativ α depinde de m în aşa fel încît $\alpha = \alpha_m \to 0$ cînd $m \to \infty$ şi că oricare este numărul natural m polinoamele $\varphi_m^{<\alpha>}$ satisfac pe triunghiul T următoarele cerinţe*

$$\varphi_m^{<\alpha>}(0,0) > 0, \ (-1)^{i+j} \Delta^{i,j}_{\alpha,\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(x,y) \geqq 0 \ \ (i = \overline{0,m};\ j = \overline{0,m-i}),$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\overline{\Delta}_{-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}{\alpha\, m\, \varphi_m^{<\alpha>}(0,0)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\overline{\overline{\Delta}}^1_{-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}{\alpha\, m\, \varphi_m^{<\alpha>}(0,0)} = 1,$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\overline{\Delta}^2_{-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}{\alpha^2 m^2 \varphi_m^{<\alpha>}(0,0)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\Delta^{1,1}_{-\alpha,-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}{\alpha^2 m^2 \varphi_m^{<\alpha>}(0,0)} = \lim_{m\to\infty} \frac{\overline{\overline{\Delta}}^2_{-\alpha}\varphi_m^{<\alpha>}(0,0)}{\alpha^2 m^2 \varphi_m^{<\alpha>}(0,0)} = 1.$$

In aceste condiții oricare ar fi funcția f, continuă pe T, șirul polinoamelor $L_m^{<\alpha>} f$, *corespunzătoare nodurilor* $\left(\frac{i}{m}, \frac{j}{m}\right)$ $(i = \overline{0, m}, j = \overline{0, m-i})$, *converge uniform la f pe T.*

Demonstrație. Dacă ținem seama de expresiile explicite date mai sus pentru $L_m^{<\alpha>} e_{i,j}$ $(0, \leqq i + j \leqq 2)$, în ipotezele în care ne-am plasat avem uniform pe T: $\lim\limits_{m\to\infty} L_m^{<\alpha>} e_{i,j} = e_{i,j}$ $(0 \leqq i + j \leqq 2)$.

Apelînd la criteriul lui Bohman-Korovkin de uniform convergență a unui șir de operatori liniari pozitivi, pentru două variabile, se poate trage concluzia că oricare este $f \in C(T)$ avem uniform pe T: $\lim\limits_{m\to\infty} L_m^{<\alpha>} f = f$.

Exemplu. În cazul special de la (3), care ne-a condus la operatorii liniari pozitivi de tip Bernstein de la (4), dacă ținem seama de formula $\overline{\Delta}^{i}_{-\alpha} \varphi_m^{<\alpha>} (x, y) = m^{[i,1]} \alpha^i (1 - x - y + i\alpha)^{[m-i,-\alpha]}$ și de duala sa, se găsește imediat că avem

$$\frac{\overline{\Delta}_{-\alpha} \varphi_m^{<\alpha>} (0,0)}{\alpha m \varphi_m^{<\alpha>} (0,0)} = \frac{\overline{\overline{\Delta}}_{-\alpha} \varphi_m^{<\alpha>} (0,0)}{\alpha m \varphi_m^{<\alpha>} (0,0)} = 1,$$

$$\frac{\overline{\Delta}^2_{-\alpha} \varphi_m^{<\alpha>} (0,0)}{\alpha^2 m^2 \varphi_m^{<\alpha>} (0,0)} = \frac{\Delta^{1,1}_{-\alpha,-\alpha} \varphi_m^{<\alpha>} (0,0)}{\alpha^2 m^2 \varphi_m^{<\alpha>} (0,0)} = \frac{\overline{\overline{\Delta}}^2_{-\alpha} \varphi_m^{<\alpha>} (0,0)}{\alpha^2 m^2 \varphi_m^{<\alpha>} (0,0)} = \frac{m-1}{m(1+\alpha)}.$$

Se observă acum că sînt îndeplinite condițiile din Teorema 2, astfel că putem afirma că șirul de polinoame $(L_m^{<\alpha>} f)_{m=1}^{\infty}$, definite la (4), converge uniform la funcția f pe triunghiul T, în ipoteza că $f \in C(T)$.

(Intrat în redacție la 20 ianuarie 1973)

BIBLIOGRAFIE

1. Baskakov, V. A., *Primer posledovatelnosti lineinîh polojitelnîh operatorov v prostranstve neprerîvnîh funcții*, „DAN SSSR", **113**, 1957, 249–251.
2. Biermann, O., *Über naherungsweise Kubaturen*, „Monatsh. Math. Phys.", **14** (1903), 465–470.
3. Dinghas, A., *Über einige Identitäten vom Bernsteinsche Typus*, „Norske Vid. Selsk. Trondheim", **24** (1951), 96–97.
4. Lorentz, G. G., *Bernstein polynomials*, „Univ. of Toronto Press", Toronto, 1953.
5. Stancu, D. D., *Asupra aproximării prin polinoame de tip Bernstein a funcțiilor de două variabile*, „Comunic. Acad. R.P.R.", **9** (1959), 773–777.
6. Stancu, D. D., *Asupra unor polinoame de tip Bernstein*, „Studii și Cerc. Șt., Matem., Acad. R.P.R., Fil. Iași", **11** (1960), 221–233.
7. Stancu, D. D., *A new class of uniform approximating polynomial operators in two and several variables*, Proceedings of the Conference on Constructive Theory of Functions, Budapest, 1969, 443–455.
8. Stancu, D. D., *On the approximation of functions of two variables by means of a class of linear operators*, Proceedings of the International Conference on Constructive Function Theory, Varna, 1971, 327–336.

9. S t a n c u, D. D., *Approximation of functions by means of some new classes of positive linear operators*, in *Numerische Methoden der Approximationstheorie*, vol. 1, ISNM, vol. 16, Birkhauser Verlag, Basel-Stuttgard, 1972, 187—203.
10. S t a n c u, F., *Aproximarea funcţiilor de două variabile cu ajutorul unor noi clase de operatori liniari pozitivi*, „Analele Univ. Timişoara, Ser. Matem.", **11** (1973) (sub tipar).

ПОСТРОЕНИЕ НОВОГО КЛАССА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ АППРОКСИМИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Р е з ю м е)

В работе строится новый класс положительных линейных операторов, зависящих от неотрицательного параметра α и определенных на множестве функций двух переменных, непрерывных в треугольной области. Эти операторы, обозначенные через $L_m^{\langle\alpha\rangle}$, определены формулой (2), где $\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x, y)$ является полиномом, который может зависеть от параметра α и имеет степень m. В (6) дается представление этих операторов при помощи конечных разностей. Теорема 2 дает условие для сходимости последовательности положительных линейных операторов типа Бернштейна, построенных в этой работе, которые определены на множестве непрерывных функций f на треугольнике $T = \{(u,v) | u \geqslant 0, v \geqslant 0, u + v \leqslant 1\}$.

CONSTRUCTION OF A CLASS OF LINEAR POSITIVE OPERATORS FOR THE APPROXIMATION OF FUNCTIONS OF TWO VARIABLES

(S u m m a r y)

In this paper it is constructed a new class of liniear positive operators, depending on a nonnegative parameter α, defined on the set of functions of two variables, continuous on a triangular domain. These operators, denoted by $L_m^{\langle\alpha\rangle}$, are defined by the formula (2), where $\varphi_m^{\langle\alpha\rangle}(x, y)$ is a polynomial which might depend on the parameter α, having the global degree m.

At (6) we have a representation of these operators by means of finite differences. Theorem 2 gives a criterion for the convergence of the sequence of the linear positive operators, of Bernstein type, constructed in this paper, which are defined on the set of functions f, continuous on the triangle $T = \{(u,v) \mid u \geqslant 0, v \geqslant 0, u + v \leqslant 1\}$.

SUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES DU TYPE DE VOLTERRA DE SECONDE ESPÈCE À L'AIDE DES FONCTIONS SPLINES

MARIA MICULA et G. MICULA

On considère l'équation intégrale de type Volterra de seconde espèce:

$$y(x) = \int_0^x K(x, t, y(t))dt + f(x), \quad x \geqslant 0 \tag{1}$$

ou y est la fonction inconnue, f et K sont des fonctions données. Nous supposons que:

(i) $f: [o, b] \to \mathbf{R}$, est assez régulière.

(ii) $K: [o, b] \times [o, b] \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est assez régulière dans l'ensemble

des variables et elle satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à la variable y, c'est-à-dire, qu'il existe une constante $L > 0$, de manière que:

$$|K(x, t, y_1) - K(x, t, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|, \ \forall (x, t, y_1), \ (x, t, y_2) \in [0, b] \times [0, b] \times \mathbf{R}$$

Ces conditions assurent l'existence et l'unicité de la solution continue $y: [0, b] \to \mathbf{R}$ de l'équation (1) ([2]).

Nous nous proposons de donner une méthode d'approximation de cette solution.

On peut classifier les méthodes d'approximation de la solution de l'équation (1) en trois groupes que nous désignons par *a*), *b*), *c*):

a) Méthodes „*pas-à-pas*" ([3], [10]) qui sont analogues aux méthodes discrètes du multipas pour les équations différentielles ordinaires.

b) Méthodes de type *Runge*-Kutta ([11], [12], [1], [6]).

c) Méthodes „*bloc-à-bloc*" ([13]).

Récemment P. Linz [7], a fait une étude systématique des ces méthodes *a*) et *c*).

L'approximation des solutions des équations intégrales du type de Volterra par des fonctions splines a commencé avec les travaux de H i n g S u m H u n g [4], [5].

Dans cette note, nous construirons une fonction spline polynômiale de degré $m \geqslant 1$ et de classe $C^{m-1}_{[0,b]}$ que nous désignons par $s:[0, b] \to \mathbf{R}$, et qui va approcher la solution de l'équation intégrale (1).

On peut voir que la méthode de l'approximation par des fonctions splines, utilisée pour les équations différentielles ordinaires ([8], [9]) peut être étendue aussi à des équations intégrales du type de Volterra.

Soit Δ une division uniforme de l'intervalle $[0, b]$:

$$\Delta : 0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

avec les noeuds $x_k = kh$ $(nh = b)$.

Nous construirons la première composante de la fonction spline s sur l'intervalle $[0, h]$ de la façon suivante:

$$s(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1'} x + \ldots + \frac{y^{(m-1)}_{(0)}}{(m-1)!} x^{m-1} + \frac{a_0}{m!} x^m, \; x \in [0, h] \qquad (2)$$

où les coefficients $y(0)$, $y'(0)$, ..., $y^{(m-1)}_{(0)}$ sont déterminés par l'équation (1). Le paramètre a_0 sera déterminé de manière que la fonction s satisfasse à l'équation (1) pour $x = h$, ce qui veut dire que

$$s(h) = \int_0^h K(h, t, s(t))dt + f(h)$$

Donc la fonction (2) étant complètement déterminée, nous passons à l'intervalle suivant $[h, 2h]$ et nous définissons la seconde composante de la fonction spline s par

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{s^{(j)}(h)}{j!} (x-h)^j + \frac{a_1}{m!} (x-h)^m, \; x \in [h, 2h]$$

où nous déterminons le paramètre a_1 de manière que l'équation (1) soit satisfaite par s pour $x = 2h$, ce qui veut dire que

$$s(2h) = \int_0^{2h} K(2h, t, s(t))dt + f(2h)$$

En continuant de la même manière sur chaque sous-intervalle de Δ nous obtiendrons la fonction spline s de dégré m, de classe de continuité $C^{(m-1)}_{[0,b]}$, qui est une approximation de la solution y de l'équation (1) et qui satisfait aux égalités:

$$s(kh) = \int_0^{kh} K(kh, t, s(t))dt + f(kh), \quad k = \overline{0,n}$$

Dans ce qui suit nous démontrerons que les paramètres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ peuvent être déterminés d'une manière unique, pour h suffisamment petit.

THÉORÈME. *Si h satisfait à l'inégalité*

$$\frac{hL}{m+1} < 1$$

alors la fonction spline s approximant la solution exacte y existe et est unique.

Démonstration: Sur l'intervalle $[kh, (k+1)h]$, $(k = \overline{0, n-1})$ la fonction s est définie par:

$$s(x) = \sum_{j=0}^{m-1} \frac{s^{(j)}(kh)}{j!}(x-kh)^j + \frac{a_k}{m!}(x-kh)^m \equiv A_k(x) + \frac{a_k}{m!}(x-kh)^m \tag{3}$$

Nous devons démontrer qu'on peut déterminer de manière univoque a_k par la condition:

$$s((k+1)h) = \int_0^{(k+1)h} K((k+1)h, t, s(t))dt + f((k+1)h) \tag{4}$$

En remplaçant l'expression de s de (3) en (4) on obtient pour a_k l'équation suivante:

$$a_k = \frac{m!}{h^m}\left\{\sum_{j=0}^{k} \int_{jh}^{(j+1)h} K\left(jh, t, A_j(t) + \frac{a_j}{m!}(t-jh)^m\right)dt + f((k+1)h\right\} \tag{5}$$

Notons de façon abrégée l'équation (5):

$$a_k = g_k(a_k) \tag{6}$$

Nous démontrerons que dans les conditions du théorème l'opérateur g_k: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $a_k \to g_k(a_k)$ est de contraction et donc qu'il a un point fixe unique.

Soit $a_k', a_k'' \in \mathbf{R}$, et posons $\rho(a_k', a_k'') = |a_k' - a_k''|$

En utilisant la condition de Lipschitz (ii) nous avons:

$$\rho(g_k(a_k'), g_k(a_k'')) = |g_k(a_k') - g_k(a_k'')| \leqslant \frac{hL}{m+1}\rho(a_k', a_k'')$$

Donc si $\frac{hL}{m+1} < 1$, l'équation (5) a une solution unique et la solution approximative spline pour l'équation (1) existe de manière unique. Le théorème est démontré.

Remarque. Le problème de la convergence de la solution approximative spline vers la solution exacte de l'équation (1) reste ouvert.

(Manuscrit reçu le 3 octobre 1972)

BIBLIOGRAPHIE

1. Beltjukov, B. A., *An analogue of Runge-Kutta method for the solution of a nonlinear integral equation of the Volterra type*, „Differential Equations", **I** (1965), 417—433.
2. Davis, H. T., *Introduction to Nonlinear Differential and Integral Equations*, Dover, New-York, 1962.
3. Fox and Goodwin E. T., *The numerical solution of nonsingular integral equations*, „Phil. Trans. Roy. Soc.", **245** (1953), 501—534.
4. Hung, H. S., *Application of linear spline function to the numerical solution of Volterra integral equations of the second kind*, „Comp. Sci. Tech. Rept.", 27, July, 1968.
5. Hung, H. S., *The numerical solution of differential and integral equations by spline functions*, „MRC Tech. Summary Rept." Madison, March 1970, 1053.
6. Laudet M. et Oules, H., *Sur l'intégration numérique des équations intégrales du type de Volterra*, in „Symposium on the Numerical Treatment of Ordinary Diff. Eqs. Integral and Integro-Differential Equations", Birkhauser Verlag, Basel, 1960, 117—121.
7. Linz, P., *The numerical solution of Volterra integral equations by finite difference methods*, MRC Tech. Summary Rept.", Madison, Nov. 1967, 825.
8. Loscalzo, F. R., *On the use of spline functions for the numerical solution of ordinary diff. eqs.*, PhD, Thesis, Univ. of Wisconsin, Madison, 1968.
9. Micula, G., *Contribuţii la integrarea aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul funcţiilor spline*, Teză de doctorat, Univ. din Cluj, 1971.
10. Noble, B., *The numerical solution on nonlinear integral equations and related topics*, in „Nonlinear Integral Equations", ed. by P. M. Anselone, Univ. of Wisconsin Press, Madison, 1964. 215—318.
11. Pouzet, P., *Étude, en vue de leur traitement numérique d'équations intégrales et intégro-différentielles du type de Volterra pour des problémes de conditions initiales*, Thesis, Univ. of Strassbourg, 1962.
12. Pouzet, P., *Méthode d'intégration numérique des équations intégrales et intégro-différentielles du type de Volterra de seconde espèce. Formule de Runge-Kutta*, in „Symposium on the Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-differential Equations", Birkhauser Verlag, Basel, 1960, 362—368.
13. Young, A., *The application of approximate product integration to the numerical solution of integral equations*, „Proc. Roy. Soc. London (A)", **224** (1954), 561—573.

REZOLVAREA NUMERICĂ A ECUAŢIILOR INTEGRALE DE TIP VOLTERRA DE SPEŢA A DOUA CU AJUTORUL FUNCŢIILOR SPLINE

(Rezumat)

În această notă se dă o metodă de rezolvare aproximativă a ecuaţiei integrale de tip Volterra de speţa a doua. Se construieşte o funcţie spline de grad $m \geqslant 1$ şi de clasă C^{m-1} care aproximează soluţia ecuaţiei integrale.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА ВТОРОГО РОДА С ПОМОЩЬЮ „SPLINE" ФУНКЦИЙ

(Резюме)

Даётся метод приближённого решения интегрального уравнения типа Вольтерра второго рода. Конструируется „spline" функция степени $m \geqslant 1$ и класса C^{m-1}, аппроксимирующая решение интегрального уравнения.

MODULUL DE CONTINUITATE ÎN SENS BÖGEL ŞI UNELE APLICAŢII ÎN APROXIMAREA PRINTR-UN OPERATOR BERNSTEIN

ION BADEA

1. Fie E un spaţiu liniar normat şi f o aplicaţie cu valori în E definită pe compactul unitate $D = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$. Oricărei perechi de puncte $(x' y')$, (x'',y'') din D îi asociem elementul de E dat de $f(x'y') - f(x',y'') - f(x'',y') + f(cx'',y'')$.
Aplicaţia $\Delta_{2;f} : D \times D \to E$, care stabileşte această corespondenţă, se numeşte diferenţa bidimensională de tip B ö g e l asociată funcţiei f. Vom spune că aplicaţia f este *B—mărginită* dacă aplicaţia $\Delta_{2;f}$ este mărginită. Familia aplicaţiilor *B—mărginite* este nevidă.

LEMĂ. *Dacă $f : D \to E$ este B—continuă,* [3] *atunci f este B—mărginită.*

Demonstraţia rezultă din identitatea

$$\Delta_{2;f}(x', y' ; x'', y'') = f(x', y') - f(x, 0) - f(0, y') - [f(x', y'') - f(x'', 0) - f(0, y'')] - [f(x'', y') - f(x'', 0) - f(0, y')] + f(x'', y'') - f(x'', 0) - f(0, y'')$$

şi dintr-o lemă cunoscută , [7, p.470], [4].
Presupunem f, *B—mărginită.* Asociem aplicaţiei f o funcţie numerică de două variabile, numită modul de *B—continuitate,* notată $\omega({}_Bf ; ,) \equiv \omega_B(,)$ definită în felul următor:

$$\omega_B : \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+ ; \quad (\mathbf{R}^+ = [0, \infty)) ;$$

$$\delta_i \in \mathbf{R}^+ ; \ i = 1,2 \Rightarrow \omega_B(\delta_1, \delta_2) = \sup\{\|\Delta_{3;f}(x', y' ; x'',y'')\| : |x' - x''| \leqslant \delta_1, |y' - y''| \leqslant \delta_2\}$$

Următoarele patru proprietăţi se demonstrează imediat.

1. $\delta_i \in \mathbf{R}^+ ; i = 1,2 \Rightarrow \omega_B(\delta_{1,0}) = \omega_B(0, \ \delta_2) = 0$

2. Modulul ω_B este funcție nedescrescătoare față de ordonarea produs a lui $\mathbf{R}^2$:

$\delta_i, \ \delta_i^* \in \mathbf{R}^+, \ i = 1,2 ; \ (\delta_1, \delta_2) \leqslant (\delta_1^*, \delta_2^*) \Rightarrow \omega_B(\delta_1, \ \delta_2) \leqslant \omega_B(\delta_1^*, \delta_2^*)$

3. $(u, v, \ (t,\tau) \in D \Rightarrow ||\Delta_{2;f}(u,v; \ t,\tau)|| \leqslant \omega_B(|u - t|, \ |v - \tau|)$

4. Restricția modulului ω_B la $[1, \infty) \times [1, \infty)$ este funcție constantă:

$$\delta_i \in [1, \infty, \ i = 1,2 \Rightarrow \omega_B(\delta_1, \delta_2) = \omega_B(1,1)$$

5. Modulul de continuitate ω_B este funcție subaditivă de tip B:

$$\delta_i, \delta_i^* \in \mathbf{R}^+, \ i = 1,2 \Rightarrow \omega_B(\delta_1 + \delta_1^*, \ \delta_2) \leqslant \omega_B(\delta_1, \ \delta_2) + \omega_B(\delta_1^*, \ \delta_2)$$

$$\omega_B(\delta_1, \ \delta_2 + \delta_2^*) \leqslant \omega_B(\delta_1, \ \delta_2) + \omega_B(\delta_1, \ \delta_2^*)$$

$$\omega_B(\delta_1 + \delta_1^*, \ \delta_2 + \delta_2^*) \leqslant \omega_B(\delta_1, \ \delta_2) + \omega_B(\delta_1, \delta_2^*) + \omega_B(\delta_1^*, \ \delta_2^*)$$

Demonstrație. Din definiția numărului $\omega_B(\delta_1 + \delta_1^*, \ \delta_0)$ rezultă:

$\forall \, \varepsilon > 0, \ \exists \, (x', y'), \ (x'', y''y) \in D \ : |x' - x''| \leqslant \delta_1 + \delta_1^*; \ ||y' - y''| \leqslant \delta_2$
astfel încît avem

$$\omega_B(\delta_2 + \delta_1^*, \ \delta_2) - \varepsilon < ||\Delta_{2;f}(x', \ y' ; \ x'', \ y'')|| \tag{1}$$

Presupunem, pentru fixare, $x' \leqslant x'', \ y' \leqslant y''$.
Demonstrația va rezulta din inegalitatea (1) analizînd următoarele situații posibile:

i) $x'' - x' \leqslant \delta_1$,

ii) $x'' - x' > \delta_1$.

În cazul *i*) putem scrie, pe baza proprietății de monotonie a modulului ω_B:

$$||\Delta_{2;f}(x', \ y' ; \ x'', \ y'')|| \leqslant \omega_B(x'' - x', \ y' - y'') \leqslant \omega_B(\delta_1, \ \delta_2) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_B(\delta_1, \ \delta_2) + \omega_B(\delta_1^*, \ \delta_2)$$

În cazul ii) putem scrie următoarea identitate, observînd mai întîi relația $x' + \delta_1 \in [0, \ 1]$:

$$\Delta_{2;f}(x', \ y' ; \ x'', \ y'') = \Delta_{2;f}(x', y' ; ; \ x' + \delta_1, \ y'') + \Delta_{2;f}(x' + \delta_1, y' ; \ x'', y')$$

Din această identitate rezultă, ținînd seama că $0 < x'' - x' - \delta_1 \leqslant \delta_1^*$:

$$||\Delta_{2;f}(x', \ y' ; \ x'', \ y'')|| \leqslant ||\Delta_{2;f}(x', \ y' ; \ x' + \delta_1, \ y''|| +$$
$$+ ||\Delta_{2;f}(x' + \delta_1, y' ; x'', y'')|| \leqslant \omega_B(\delta_1, y'' - y') + \omega_B(x'' - x' - \delta_1, y'' \, y') \leqslant$$
$$\leqslant \omega_B(\delta_1, \ \delta_2) + \omega_B(\delta_1^*, \ \delta_2)$$

Aşadar în ambele cazuri este adevărată următoarea majorare:

$$||\Delta_{2;f}(x', y'; x'', y'')|| \leqslant \omega_B(\delta_2, \delta_1)|| \leqslant \omega_B(\delta_1, \delta_2) + \omega_B(\delta_1^*, \delta_2) \quad (2)$$

Inegalităţile (1) şi (2) demonstrează teorema.

6. $\delta_1, \delta_2 \in \mathbf{R}^+; p, q \in N; m, n \in N \cup \{0\} \Rightarrow \omega_B(m\delta_1, \delta_2) \leqslant p\omega_B\left(\frac{m\delta_1}{p}, \delta_2\right)$

$$\omega_B(\delta_1, n\delta_2) \leqslant q\omega_B\left(\delta_1, \frac{n\delta_2}{q}\right)$$

$$\omega_B(m\delta_1, n\delta_2) \leqslant pq\omega_B\left(\frac{m\delta_1}{p}, \frac{n\delta_2}{q}\right)$$

Demonstraţie. Din definiţia modulului $\omega_B(m\delta_1, \delta_2)$ rezultă:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists (x', y'), (x'', y'') \in D: |x' - x''_1| \leqslant m\delta_1, |y' - y''| \leqslant \delta_2,$$

astfel încît

$$\omega_B(m\delta_1, \delta_2) - \varepsilon < ||\Delta_{2;f}(x', y'; x'', y'')|| \quad (3)$$

Presupunem, pentru fixare, $x'' - x' \geqslant 0, \quad y'' - y' \geqslant 0$.
Divizăm segmentul $[x', x'']$ în p subsegmente egale cu ajutorul partiţiei $x' = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x = x''$
Putem scrie:

$$\Delta_{2;f}(x', y'; x'', y'') = \sum_{i=0}^{p-1} \Delta_{2;f}(x, y'; x_{i+1}, y'')$$

Rezultă:

$$||\Delta_{2;f}(x', y'; x'', y'')|| \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} ||\Delta_{2;f}(x_i, y'; x_{i+1}, y'')|| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \omega_B(x_{i+1} - x_i, y'' - y') \leqslant \sum_{i=0}^{p-1} \omega_B\left(\frac{x'' - x'}{p}, \delta_2\right) \leqslant p\omega_B\left(\frac{m\delta_1}{p}, \delta_2\right)$$

Inegalitatea (3) şi ultima majorare demonstrează prima relaţie din enunţ. În mod analog se demonstrează a doua inegalitate, iar ultima este un corolar al primelor două inegalităţi. Din proprietatea 6. se deduc unele consecinţe care au aplicaţii în teoria aproximării.

7. $\delta_i \in \mathbf{R}^+; i = 1, 2; m \in N \cup \{0\} \Rightarrow \omega_B(m\delta_1, m\delta_2) \leqslant m^2\omega_B(\delta_1, \delta_2)$

8. $\delta_i \in \mathbf{R}^+; i = 1, 2; m, n \in N \cup \{0\} \Rightarrow \omega_B(m\delta_1, n\delta_2) \leqslant (m \vee n)^2\omega_B(\delta_1, \delta_2)$

unde prin simbolul $a \vee b$ am notat pe cel mai mare dintre numerele reale a şi b.

9. $\delta_i \in \mathbf{R}^+$, $i = 1, 2$; $m, n \in N \cup \{0\} \Rightarrow \omega_B(m\delta_1, \delta_2) \leqslant m\omega_B(\delta_1, \delta_2)$

$$\omega_B(\delta_1, n\delta_2) \leqslant n\omega_B(\delta_1, \delta_2)$$

$$\omega_B(m\delta_1, n\delta_2) \leqslant mn\omega_B(\delta_1, \delta_2)$$

10. $\delta_i \in \mathbf{R}^+$, $i = 1, 2$; $m, n \in N \Rightarrow \omega_B(m\delta_1, n\delta_2) \leqslant (m + n - 1)^2\omega_B(\delta_1, \delta_2)$

Aplicăm 6. cu $p = q = m + n - 1$.
Inegalitatea 10 reprezintă analogul, pentru modulul de *B-continuitate*, al unui rezultat obţinut, pentru cazul real, de A. F. Ipatov, [2].

11. $\lambda_i, \delta_i \in \mathbf{R}^+$, $i = 1, 2$; $\Rightarrow \omega_B(\lambda_1\delta_1, \lambda_2\delta_2) \leqslant (1 + \alpha)^2\omega_B(\delta_1, \delta_2)$

unde α poate lua una din următoarele valori:

$$]\lambda_1[\vee]\lambda_2[,\ ]\lambda_1[\vee[\lambda_2],\ ]\lambda_1[\vee\lambda_2,\ [\lambda_1]\vee]\lambda_2[,\ [\lambda_1]\vee[\lambda_2],$$
$$[\lambda_1]\vee\lambda_2,\quad \lambda_1\vee]\lambda_2[,\ \lambda_1\vee[\lambda_2],\ \lambda_1\vee\lambda_2,$$
$$[\lambda_1]+[\lambda_2],\quad [\lambda_1]+\lambda_2,\ \lambda_1+[\lambda_2],\ \lambda_1+\lambda_2$$

Pentru semnificaţia simbolurilor][şi [] se va vedea lucrarea [11]. Este suficient să demonstrăm inegalitatea de mai sus pentru $\alpha =]\lambda_1[\vee]\lambda_2[$. Putem scrie, pe baza monotoniei modulului ω_B şi a proprietăţii 7.:

$$\omega_B(\lambda_1\delta_1, \lambda_2\delta_2) \leqslant \omega_B(\overline{1 +]\lambda_1[}\delta_1, \overline{1 +]\lambda_2[}\delta_2) \leqslant$$
$$\leqslant \omega_B(\overline{1 +]\lambda_1[\vee]\lambda_2[}\delta_1, \overline{1 +]\lambda_1[\vee]\lambda_2[}\delta_2) \leqslant$$
$$\leqslant (1 +]\lambda_1[\vee]\lambda_2[)^2\omega_B(\delta_1, \delta_2).$$

Inegalitatea 11, cu $\alpha =]\lambda_1[\vee]\lambda_2[$, constituie analogul, pentru modulul de *B—continuitate*, al unei inegalităţi, obţinută, în alt mod, pentru funcţii reale de m variabile reale, de Schurer în lucrarea [10].

12. $\lambda_i, \delta_i \in \mathbf{R}^+$, $i = 1, 2 \Rightarrow \omega_B(\lambda_1\delta_1, \lambda_2\delta_2) \leqslant (1 + \alpha)(1 + \beta)\omega_B(\delta_1, \delta_2)$
unde perechea (α, β) poate lua una din următoarele valori:

$$(]\lambda_1[,]\lambda_2[),\ (]\lambda_1[, [\lambda_2]),\ (]\lambda_1[,]\lambda_2[),\ ([\lambda_1],]\lambda_2[),\ ([\lambda_1], [\lambda_2]),$$
$$([\lambda_1], \lambda_2),\ (\lambda_1,]\lambda_2[),\ (\lambda_1, [\lambda_2]),\ ((\lambda_1, \lambda_2)$$

Este suficient să demonstrăm inegalitatea dată pentru $\alpha =]\lambda_1[$, $\beta =]\lambda_2[$. Aplicînd proprietatea 5. de subaditivitate şi inegalitatea 9, rezultă:

$$\omega_A(\lambda_1\delta_1, \lambda_2\delta_2) \leqslant \omega_B(\delta_1 +]\lambda_1[\delta_1, \delta_2 +]\lambda_2[\delta_2) \leqslant \omega_B(\delta_1, \delta_2) +$$
$$+ \omega_B(\delta_1,]\lambda_2[\delta_2) + \omega_B(]\lambda_1[\delta_1, \delta_2) + \omega_B(]\lambda_1[\delta_1,]\lambda_2[\delta_2) \leqslant$$
$$\leqslant (1 +]\lambda_1[)(1 +]\lambda_2[)\omega_B(\delta_1, \delta_2)$$

13. $\lambda_i \in (0, \infty)$; $\delta_i \in \mathbf{R}^+$, $i = 1, 2 \Rightarrow \omega_B(\lambda_1\delta_1, \lambda_2\delta_2) \leqslant$

$$\leqslant (1 +]\lambda_1[+]\lambda_2])^2\omega_B(\delta_1, \delta_2)$$

14. $\lambda_1 \geqslant 1,\ \lambda_2 < 1;\ \delta_1,\ \delta_2 \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \omega_B(\lambda_1\delta_1,\ \lambda_2\delta_2) \leqslant$
$\leqslant (1 + [\lambda_2]]\lambda_2[)^2\omega_B(\delta_1,\ \delta_2)$

15. $\lambda_1 > 1,\ \lambda_2 \geqslant 1;\ \delta_1,\ \delta_2 \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \omega_B(\lambda_1\delta_1,\ \lambda_2\delta_2) \leqslant$
$\leqslant (1 +]\lambda_1[[\lambda_2])^2\omega_B(\delta_1,\ \delta_2)$

16. $\lambda_2 < 0,\ \lambda_2,\ \delta_1,\ \delta_2 \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \omega_B(\lambda_1\delta_1,\ \lambda_2\delta_2) \leqslant$
$\leqslant (1 +]\lambda_1[+ [\lambda_2])^2\omega_B(\delta_1,\ \delta_2)$

17. $\lambda_2 < 0;\ \lambda_1,\ \delta_1,\ \delta_2 \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \omega_B(\lambda_1\delta_1,\ \lambda_2\delta_2) \leqslant (1 + [\lambda_2) +]\lambda_2[)^2\omega_B(\delta_1, \delta_2 \leqslant$
$\leqslant (1 + \lambda_1 +]\lambda_2[)^2\omega_B(\delta_1,\ \delta_2).$

18. $\lambda_1 < 0;\ \lambda_2,\ \delta_1,\ \delta_2 \in \mathbf{R}^+ \Rightarrow \omega_B(\lambda_1\delta_1,\ \lambda_2\delta_2) \leqslant$
$\leqslant (1 +]\lambda_1[+ \lambda_2)^2\omega_B(\delta_1,\ \delta_2).$

Cu ajutorul modulului de *B-continuitate* se poate caracteriza uniform *B-continuitatea*, [7; p. 470].

Fir I şi J două intervale (nevide) ale axei reale şi $f: I \times J \to E$ o funcţie *B-mărginită*.

TEOREMA 1. *Aplicaţia f, cu valori în E, definită pe produsul $I \times J$ al planului, este uniform B-continuă dacă şi numai dacă*

$$\lim_{\substack{\delta_1 \\ \delta_2} \to 0+} \omega_B(\delta_1,\ \delta_2) = 0$$

Demonstraţie. Să presupunem aplicaţia f uniform *B—continuă* pe intervalul bidimensional $I \in J$; rezultă:

$\forall \varepsilon < 0,\ \exists(\varepsilon) < 0,\ \forall x(',\ y'),\ (x'',\ y'') \in I \times J: |x' - x''| \leqslant \eta(\varepsilon),\ |y' - y''| \leqslant \eta(\varepsilon)$, astfel încît

$$||\Delta_{2;f}(x',\ y',\ x'',\ y'')|| < \varepsilon,$$

Notăm cu η_0 numărul $\frac{1}{2}\eta(\varepsilon) < 0$. Fie $\delta_i \in (0,\ \eta_0),\ i = 1,\ 2.$

Rezultă:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\eta_0(\varepsilon) > 0,\ \forall(x',\ y'),\ (x'',\ y'') \in I \times J: |x' - x''| \leqslant \delta_1,$$
$$|y' - y''| \leqslant \delta_2 \Rightarrow ||\Delta_2\ (x',\ y';\ x'',\ y'')|| < \varepsilon.$$

Deducem

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists\eta_0(\varepsilon) > 0,\ \forall\delta_i \in (0,\ \eta_0(\varepsilon)),\ i = 1,2 \Rightarrow \omega_B(\delta_1,\ \delta_2) \leqslant \varepsilon$$

Suficienţa se demonstrează asemănător.

2. Vom aplica acum modulul de *B-continuitate* introdus mai sus la studiul unui operator de tip B e r n s t e i n asociat unei aplicaţii f definită pe D

cu valori în spaţiul normat E. Pentru fiecare pereche de numere naturale (m, n) asociem aplicaţiei f o nouă funcţie, $\mathcal{H}_{m,n}(f)$, a cărei valoare în punctul $(x, y) \in D$, $\mathcal{H}_{m,n}(f; x, y)$, este elementul din E dat de următoarea sumă

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left(f\left(x, \frac{k}{n}\right) + f\left(\frac{i}{m}, y\right) - f\left(\frac{i}{m} \frac{k}{n}\right)\right)p_{m,i}(x)\, p_{n,k}(y)$$

unde $p_{m,o}(0) = p_{m,m}(1) = 1$ iar pentru celelalte valori ale perechii (i, x) avem $p_{m,i}(x) = C_m^i x^i(1 - x)^{m-i}$.

Notăm cu $\mathcal{H}_{m,n}$ operatorul de tip B e r n s t e i n care stabileşte această corespondenţă. Ordinul de aproximare al funcţiei f prin şirul $(\mathcal{H}_{m,n})$ este dat de următoarea propoziţie care extinde o cunoscută teoremă a acad. T i b e r i u P o p o v i c i u, [8], [9].

TEOREMA 2. *Dacă $f: D \to E$, este B-mărginită, avem:*

$$\sup_{(x,y)\in D}\|f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f; x, y)\| \leqslant \left(\frac{3}{2}\right)^2 \omega_B\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Demonstraţie. Cu ajutorul identităţii $\sum_{i=0}^{m} p_{m,i}(t) = 1$ putem scrie:

$$\begin{aligned}\|f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f; x, y)\| &\leqslant \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left\|\Delta_{2;f}\left(x, y; \frac{i}{m}, \frac{k}{n}\right)\right\| p_{m,i}(x)p_{n,k}(y) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\omega_B\left(\left|x - \frac{i}{m}\right|, \left|y - \frac{k}{n}\right|\right)p_{m,i}(x)p_{n,k}(y)\end{aligned} \tag{2.1}$$

Fie $\delta > 0$, $i = 1, 2$ numere reale independente de indicii de sumare i şi k. Aplicînd inegalitatea 12. cu $\alpha = \lambda_1 = \dfrac{\left|x - \frac{i}{m}\right|}{\delta_1}$, $\beta = \lambda_2 = \dfrac{\left|y - \frac{k}{n}\right|}{\delta_2}$ obţinem:

$$\omega_B\left(\left|x - \frac{i}{m}\right|, \left|y - \frac{k}{n}\right|\right) \leqslant \left(1 + \frac{\left|x - \frac{i}{m}\right|}{\delta_1}\right)\left(1 + \frac{\left|y - \frac{k}{n}\right|}{\delta_2}\right)\omega_B(\delta_1, \delta_2). \tag{2.2}$$

Din inegalităţile (2.1) şi (2.2) rezultă:

$$\begin{aligned}&\|f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f; x, y)\| \leqslant \\ &\leqslant \omega_B(\delta_1, \delta_2)\left(1 + \frac{1}{\delta_1}\sum_{i=0}^{m}\left|x - \frac{i}{m}\right|p_{m,i}(x)\right)\left(1 + \frac{1}{\delta_2}\sum_{k=0}^{n}\left|y - \frac{k}{n}\right|p_{n,k}(y)\right)\end{aligned} \tag{2.3}$$

Alegînd $\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$, $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$, obținem, ținînd seama [9] de următoarea inegalitate:

$$\sqrt{m}\sum_{i=0}^{m}\left|x - \frac{i}{m}\right|p_{m,i}(x) \leqslant \frac{1}{2} \tag{2.4}$$

$$||f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f;\ x, y)|| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 \omega_B\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \tag{2.5}$$

Teorema este demonstrată.

COROLAR. *Dacă $f: D \to E$ este B-continuă, atunci $\mathcal{H}_{m,n} \xrightarrow{u} f$ într-adevăr, aplicația f fiind B-continuă pe compactul D, este* [7; p. 407] *uniform B-continuă.* Teorema 1 și inegalitatea (2.5) demonstrează afirmația făcută.

Observație. În lucrarea [1], E. Dobrescu și I. Matei demonstrează, pentru funcții cu valori reale, teorema de aproximare uniformă dată de corolarul precedent în ipoteza că funcția f este *B-continuă* și *B-mărginită*. Lema demonstrată la începutul acestei lucrări arată că proprietatea de *B-continuitate* implică *B-mărginirea*, astfel încît ultima restricție impusă funcției f este superfluă.

TEOREMA 3. *Dacă $f: D \to R$, posedă derivată de ordinul întîi în sensul lui Bögel, care este B-mărginită, avem evaluarea:*

$$\sup_{(x,y)\in D}|f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f;\ x, y)| \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\right)\omega_{1,B}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

unde $\omega_{1,B}$ este modulul de B-continuitate atașat B-derivatei.

Demonstrație. Cu ajutorul identității $\sum_{i=0}^{n} p_{n,i}(t) = 1$ putem scrie:

$$f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f;\ x, y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\Delta_{2;f}\left(x, y;\ \frac{i}{m}, \frac{k}{n}\right)p_{m,i}(x)p_{n,k}(y) \tag{3.1}$$

Aplicînd analogul lui Bögel, [6], al formulei creșterilor finite, obținem:

$$\Delta_{2;f}\left(x, y;\ \frac{i}{m}, \frac{k}{n}\right) = f'(\xi_i, \eta_k)\left(\frac{i}{m} - x\right)\left(\frac{k}{n} - y\right) \tag{3.2}$$

unde ξ_i, η_k sînt, respectiv, puncte interioare intervalelor de extremități x și $\frac{i}{m}$, y și $\frac{k}{n}$.

Putem scrie următoarea identitate

$$f'(\xi_i, \eta_k) = \Delta_{2,f'}(x, y;\ \xi_i, \eta_k) + f'(x, \eta_k) + f'(\xi_i, y) - f'(x, y) \tag{3.3}$$

Ţinînd seama de (3.2), (3.3) relaţia (3.1) devine:

$$f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f; x, y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \Delta_{2,f'}(x, y; \xi_i, \eta_k) \cdot \tag{3.4}$$

$$\cdot \left(\frac{i}{m} - x\right)\left(\frac{k}{n} - y\right) p_{m,i}(x)\, p_{n,k}(y) + S_{m,n}(x, y)$$

unde

$$S_{m,n}(x, y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{0=k}^{n} (f'(x, \eta_k) + f'(\xi_i, \eta y) - f'(x, y) \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{i}{m} - x\right)\left(\frac{k}{n} - y\right) p_{m,i}(x)\, p_{n,k}(y).$$

Avînd în vedere identitatea cunoscută, $\sum_{i=0}^{m}\left(\frac{i}{m} - x\right) p_{m,i}(x) = 0$, se deduce uşor că $S_{m,n}(x, y) = 0$.

Relaţia (3.4) se scrie

$$f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f; x, y) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \Delta_{2,f'}(x, y; \xi_i, \eta_k) \cdot \tag{3.5}$$

$$\cdot \left(\frac{i}{m} - x\right)\left(\frac{k}{n} - y\right) p_{m,i}(x)\, p_{n,k}(y).$$

Fie $\delta_i < 0$, $i = 1, 2$ numere reale independente de indicii i şi k. Din (3.5) şi (2.2) obţinem, ţinînd seama de proprietatea de monotonie a modulului de *B-continuitate* şi de inegalităţile $|x - \xi_i| \leqslant \left|x - \frac{i}{m}\right|$, $|y - \eta_k| \leqslant \left|y - \frac{k}{n}\right|$ deduse din (3.2):

$$|f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(d; x, y)| \leqslant \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} |\Delta_{2,f'}(x, y; \xi_i, \eta_k)| \cdot \tag{3.6}$$

$$\cdot \left|x - \frac{i}{m}\right|\left|y - \frac{k}{n}\right| p_{m,i}(x)\, p_{n,k}(y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \omega_{1,B}(|x - \xi_i|, |y - \eta_k|) \left|x - \frac{i}{m}\right|\left|y - \frac{k}{n}\right| p_{m,i}(x)\, p_{n,k}(y) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \omega_{1,B}\left(\left|x - \frac{i}{m}\right|, \left|y - \frac{k}{n}\right|\right)\left|x - \frac{i}{m}\right|\left|y - \frac{k}{n}\right| p_{m,i}(x)\, p_{n,k}(y) \leqslant$$

$$\leqslant \omega_{1,B}(\delta_1, \delta_2)\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\left(1 + \frac{i}{\delta_1}\left|x - \frac{i}{m}\right|\right)\left(1 + \frac{i}{\delta_2}\left|y - \frac{k}{n}\right|\right) \cdot$$

$$\cdot \left|x - \frac{i}{m}\right|\left|y - \frac{k}{n}\right| p_{m,i}(x)\, p_{n,k}(y)$$

Alegînd $\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{m}}$, $\delta_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}$, putem scrie, aplicînd (2.4):

$$|f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f; x, y)| \leqslant \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\right) \omega_{1,B}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Teorema este demonstrată.

Pentru aplicațiile cu valori în spațiul normat E, avem un rezultat analog.

TEOREMA 4. *Dacă $f: D \to E$, admite pe D, B-derivată de ordinul întîi, notată f', avem evaluarea:*

$$\|f - \mathcal{H}_{m,n} f\|_0 \leqslant \frac{3\|f'\|_0}{4\sqrt{mn}} + \left(\frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\right) \omega_{1,B}\left(\frac{1}{\sqrt{m}}, \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

unde $\omega_{1,B}$ este modulul de B-continuitate atașat derivatei f', iar pentru

$$h: D \to E,\ \|h\|_0 = \sup\{\|h(t, \tau)\| : (t, \tau) \in D\}.$$

Demonstrație. Cu ajutorul identității $\sum_{i=0}^{m} p_{m,i}(r) = 1$ putem scrie

$$\|f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f; x, y)\| \leqslant \sum_{i=0}^{m} \left\| \Delta_{2,f'}\left(x, y; \frac{i}{m}, \frac{k}{n}\right)\right\| p_{m,i}(x)\, p_{n,k}(y) \quad (4.1)$$

Aplicînd o teoremă de medie cunoscută, [5], obținem:

$$\left\|\Delta_{2,f}\left(x, y; \frac{i}{m}, \frac{k}{n}\right)\right\| \leqslant \|f'(\xi_i, \eta_k)\| \left|x - \frac{i}{m}\right| \left|y - \frac{k}{n}\right| \quad (4.2)$$

unde ξ_k, η_k sînt, respectiv, puncte interioare intervalelor de extremități x și $\frac{i}{m}$, y și $\frac{k}{n}$.

Din identitatea (3.3) și din proprietatea de monotonie a modulului de B-*continuitate*, rezultă:

$$\|f'(\xi_i, \eta_k)\| \leqslant 3\|f'\|_0 + \omega_{1,B}\left(\left|x - \frac{i}{m}\right|, \left|y - \frac{k}{n}\right|\right) \quad (4.3)$$

Avînd în vedere inegalitățile (2.4), (4.2) și (4.3), relația (4.1) devine:

$$\|f(x, y) - \mathcal{H}_{m,n}(f; x, y)\| \leqslant \frac{3\|f'\|_0}{4\sqrt{mn}} + \quad (4.4)$$

$$+ \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} \omega_{1,B}\left(\left|x - \frac{i}{m}\right|, \left|y - \frac{k}{n}\right|\right)\left|x - \frac{i}{m}\right|\left|y - \frac{k}{n}\right| p_{m,i}(x)\, p_{n,k}(y).$$

Raționamentul se continuă ca la teorema 3. Teorema este demonstrată.

(Intrat în redacție la 1 februarie 1972)

BIBLIOGRAFIE

1. D o b r e s c u, E., M a t e i, I., *Aproximarea prin polinoame de tip Bernstein a funcțiilor bidimensional continue*, „Analele Univ. Timișoara", IV, 1966, 85—90.
2. I p a t o v, A. F., *Ofenka progreșnosti i poriadok priblijenia funkții dvuh peremennîh polinomami S. N. Bernșteina*, „Uci. Zap. Petrovo Gos. Un-ta, Fiz.-Mat. Nauki", **IV**, 4, 1955, 31—48.
3. N i c o l e s c u, L. J., *Asupra unei teoreme de medie*, „St. Cerc. Mat.", **16**, 8, 1964, 987—995.
4. N i c o l e s c u, L. J., *Asupra unei extensiuni a criteriului de compacitate al lui Arzela*, „Bul. St. Mat.-Fiz., **VII**, 3, 1955.
5. N i c o l e s c u, L. J., *On a weak value theorem*, „Rev. Roum. Math. pures et appl,", **X**, 2, 1965, 145—148.
6. N i c o l e s c u, M., *Contribuții la o analiză de tip hiperbolic a planului*, „St. Cerc. Mat.", **III**, 1—2, 1952, 7—51.
7. N i c o l e s c u, M., *Analiză matematică*, Ed. Tehnică, București, 1958.
8. P o p o v i c i u, T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur*, „Mathematica", (Cluj), **10**, 1935, 49—54.
9. P o p o v i c i u, T., *Sur l'approximation des fonctions continues d'une variable réelle par des polynomes*, „Ann. Sci. de l'Univ. de Jassy", **28**, 1, 1942, 208.
10. S c h u r e r, F., *On the order of approximation with generalized Bernstein polynomials*, „Procc. A, Math. Sci,", LXV, 4, 484—488.
11. B a d e a, I., *Modul de oscilație pentru funcții de două variabile și unele aplicații în aproximarea prin operatori Bernstein*, „Analele Univ. Craiova", 2.

МОДУЛЬ НЕПРЕРЫВНОСТИ В СМЫСЛЕ БЁГЕЛЯ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ В ПРИБЛИЖЕНИИ ПОСРЕДСТВОМ ОПЕРАТОРА БЕРНШТЕЙНА

(Р е з ю м е)

В работе изучается модуль непрерывности в смысле Бёгеля для функций двух переменных и доказываются некоторые теоремы, дающие оценку порядка приближения посредством оператора типа Бернштейна.

LE MODUL DE *B*-CONTINUITÉ ET QUELQUES APPLICATIONS DANS L'APPROXIMATION PAR UN OPERATEUR DU TYPE BERNSTEIN

(R é s u m é)

Dans ce travail l'auteur étudie quelques propriétés concernant le modul de *B*-continuité pour des fonctions de deux variables réelles qui prennent des valeurs dans un espace linéaire normé et démontre quelques théorèmes qui donnent des évaluations de l'ordre d'approximation par un opérateur de type Bernstein.

ON SIMILARITY SOLUTIONS OF AN UNSTEADY LAMINAR BOUNDARY LAYER ALONG A FLAT PLATE

S. GHOSHAL

1. Introduction. Starting from Prandtl and Blasius, many have obtained exact solutions of the boundary layer equations for a flat plate for forced convection. These methods are based on the technique of similarity solution. In this technique the partial differential equations governing the motion are always, by suitable transformations, reduced to a set of ordinary differential equations in terms of the "similarity variables" which is a function of the original independent variables. Then these ordinary partial differential equations are solved numerically, giving velocity and temperature profiles and from these important boundary layer characteristics can be obtained. These transformations and the solutions are valid for certain specific surface conditions. Previous authors have all dealt with specific cases, it is still uncertain whether they have exhausted all possible similarity solutions. But in the present paper, a unified analysis of the unsteady laminar boundary layer equations for a flat plate for a forced convection has been made from which as particular cases the existing solutions for steady cases can be deduced. This method indicates the possibility of new solutions and may also be used to check the accuracy of the solutions deduced earlier.

The numerical solutions of the new cases have not been attempted here.

2. The equations governing the motion of an unsteady incompressible fluid inside the boundary layer along a flat plate are given by

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \;\ldots\;\ldots\;\ldots \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u_\infty\frac{\partial u_\infty}{\partial x} + \frac{\partial u_\infty}{\partial t} \;\ldots \tag{2}$$

$$PC_p\left[\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + v\frac{\partial T}{\partial y}\right] = k\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \;\ldots \tag{3}$$

with the boundary conditions:

$$\left.\begin{array}{l} y=0,\ u=v=0,\ T=T_{\infty}(x,t) \text{ and } y\to\infty,\ u\to u_{\infty} \\ T\to T_{\infty} \\ \text{we introduce the variables} \\ \xi = x/L,\ \eta = y\sqrt{R}/L\ \Phi_1(x,t) \\ \text{and} \\ \psi = (Lu(x,\ t)/\sqrt{R})\ \Phi_1(x,\ t)f(\eta),\ R = \textit{Reynolds number} \\ U_{\infty}L/\nu \quad U_{\infty} = \textit{typical velocity},\ L = \textit{Length}, \end{array}\right\} \tag{4}$$

and

$$T - T_{\infty} = \theta_{\omega} \cdot \theta_1 \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \tag{5}$$

so that

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = u_{\infty}(x,\ t)f'(\eta) \ \ldots \ \ldots \ \ldots \tag{6}$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\ (L/\sqrt{R})\ (u_{\infty x}\ \Phi_1(x,\ t)f(\eta) + u_{\infty}\ \Phi_{1x} f(\eta) - \eta u_{\infty}\ f'\Phi_{1x})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_{\infty x} f' - \frac{\Phi_{1x}}{\Phi_1} u_{\infty} f'' \cdot \eta$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u_{\infty}\ f''\ \sqrt{R}/[L\ \Phi_1(x,\ t)]$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f'\ u_{\infty t}(x,\ t) - f''(\Phi_{1t}/\Phi_1)\ \eta \cdot u_{\infty}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{\infty} f''' R/(L^2\ \Phi_1^2)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \sigma_{\omega t}\ \sigma_1 - \theta_{\omega}\ \theta_1'\ \eta(\Phi_{1t}/\Phi_1).$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \theta_{\omega x}\ \theta_1 - \theta_{\omega}\ \theta_1' \cdot \eta(\Phi_{1x}/\Phi_1)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \theta_{\omega}\ \theta_1'\ \sqrt{R}/(L\Phi_1)\ ; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \theta_{\omega}\ \theta_1''\ R/(L\ \Phi_1^2)$$

Substituting these in (2) and (3), and simplifying,

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f'^2) + \nu(1 - f') + \delta\eta f'' = 0 \ldots \quad (7)$$

$$\frac{1}{p_r}\,\theta_1'' + (\eta\delta + \alpha f)\,\theta_1' - (\varepsilon + \omega f')\,\theta_1 = kf''^2 \ldots \quad (8)$$

where,

$$\left.\begin{aligned}
\alpha &= \frac{L\Phi_1}{U_\infty}(u_{\infty x}\Phi_1 + u_\infty\Phi_{1x}) = \frac{L}{U_\infty}\Phi_1\frac{\partial}{\partial x}(u_\infty\Phi_1)\\
\beta &= Lu_{\infty x}\Phi_1^2/U_\infty\\
\nu &= u_{\infty t}L\Phi_1^2/(\bigcap_\infty u_\infty)\\
\delta &= L\Phi_{1t}\Phi_1/U_\infty\\
\varepsilon &= \theta_{\omega t}L\Phi_1^2/(\bigcap_\infty \theta_\omega).\\
\omega &= L u_\infty\theta_{\omega x}\Phi_1^2/(\bigcap_\infty\theta_\omega)\,;\ k = -u_\infty^2/(\varphi\,\theta_\omega)
\end{aligned}\right\} \quad (9)$$

The boundary conditions are:
at

$$\eta = 0,\ f = f' = 0\,;\ \theta_1 = 1 \ \ldots \quad (10)$$
$$\eta \to \infty\ f' \to 1\,;\ \theta \to 0$$

Thus the partial differential equations (2) and (3) have been reduced to ordinary differential equations (7) and (8), with the independent variable η, and dependent functions $f(\lambda)$ and $\theta_1(\eta)$. It is evident that the similarity solutions should exist only if α, β, ν, δ, ε, ω, k are all constants and the relations given by (9) should he compatible.

Possible Similarity Solutions. All possible similarity solutions may be deduced from the equation (5) and (6), by suitably choosing the quantities α, β, ν, δ, ω, k. Some of them are given below.

Case I. Steady Flow: Falkner and Skam's case: Since the flow is steady

$$\nu = \delta = \varepsilon = 0$$

(7) becomes

$$f''' + \alpha f f'' + \beta(1 - f'^2) = 0 \ldots \quad (11)$$

with the boundary conditions,

$$\eta = 0,\ f = 0,\ f' = 0$$
$$\eta \to \infty,\ f' \to 1.$$

This is Falkner and Skam's equation.

From this, as particular cases, may be deduced

(i) Blasius solution for a flat plate
(ii) Flow past a wedge
(iii) Flow along a converging channel.

For similarity solution of velocity variable, it has been shown that (P a i-164) either,

(i) $u_\infty(x) \propto x^m$, m is real, ... (12)

or (ii) $u_\infty(x) \propto e^{px}$, p is a real constant (13)

For similarity solution of temperature, if viscous dissipation be zero, from last of the relations (9),

$$\theta_\omega = -\frac{1}{RC_p} u_\infty^2 \quad \dots \dots \dots \tag{14}$$

where k is a constant, i.e. the velocity outside the boundary-layer and the temperature on the plate are not independent of each other. For similarity solution they are necessarily connected by the relation (14). Next, let us examine, whether other relations of (9), are compatible with (14).

From 2nd and 6th of the relations (9),

$$\frac{u_{\infty x}}{u_\infty} = \frac{\beta}{\omega} \cdot \frac{\theta_{\omega x}}{\theta}$$

whence $\Theta_\omega = Au_\infty$ ... ... (15) where A is a constant.

In order that (14) and (15), are identical relations, we should have,

$$\omega|\beta = 2 \quad \text{and} \quad A = -\frac{1}{c_p k}$$

Hence, for similarity solution of velocity and temperature, for variable velocity outside boundary layer, and plate temperature, we have

(i) $\theta_\omega = T_\omega - T_\infty \propto u_\infty^2$

(ii) $\omega|\beta = \partial$

and the resulting equations are

$$f''' + \alpha ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0 \quad \dots \dots \dots \tag{17}$$

$$\frac{1}{p_r}\theta_1'' + \alpha f\theta_1' - \beta f'\theta_1 = -\frac{u_\infty^2}{c_p\Theta_\omega} f''^2 \quad \dots \dots \tag{18}$$

α and β are constants.

Boundary conditions are

at
$$\eta = 0,\ f = f' = 0,\ \theta_1 = 1$$
$$\eta \to \infty,\ f' \to 1,\ \theta_1 \to 0.$$

In particular, let us discuss the case of a flat plate with constant plate temperature and velocity outside the boundary layer,

$$u_\infty = \text{constant} = \cap$$
$$\alpha = \frac{L}{U_\infty} \cdot \frac{1}{\Phi_1} \frac{d}{dx}\left(\frac{U_\infty}{\Phi_1}\right)$$

whence

$$\Phi_1 = \sqrt{L/2\alpha x} = \sqrt{\frac{L}{x}},\ \text{putting } \partial\alpha = 1$$

$$\left.\begin{aligned} \eta &= y\sqrt{\frac{U_\infty}{\nu x}} \\ \psi &= \sqrt{U_\infty \nu x}\, f(\eta) \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad (19)$$

$$(7) \text{ becomes } 2f''' + ff'' = 0 \quad \ldots\ \ldots\ \ldots \qquad (20)$$

with the condition at $\eta = 0,\ f = f' = 0$, and $\eta \to \infty,\ f' \to 1$.

This is H. Blasius equations for a flat plate. And (8), gives,

$$\frac{1}{P_r}\theta_1'' + \frac{f}{2}\theta_1' = kf''^2$$

whence

$$\frac{d^2T}{d\eta^2} + \frac{P_r}{2} f \frac{dT}{d\eta} = -P_r \frac{U_\infty^2}{C_p} f''^2 \quad \ldots \qquad (21)$$

at
$$\eta = 0,\ T = T_\omega \text{ and } T \to T_\infty \text{ as } \eta \to \infty.$$

Equation (21), has been studied by many (H. Schlichting, p-264).

Case II. Unsteady flows: From first and second relations of (9),

$$2\alpha - \beta = \frac{L}{U_\infty} \frac{\partial}{\partial x} [u\ \Phi_1^2]$$

Integrating $$\frac{u_\infty}{U_\infty}\Phi_1^2 = (2\alpha - \beta)\frac{x}{L} + A_1(t) \quad \ldots \quad \ldots \tag{22}$$

$A_1(t)$ is a function of t only.

$\alpha - \beta = \dfrac{L}{U_\infty}\Phi_1\Phi_{1x}u_\infty$ with the help of 1*st* and 2*nd* relation of (9), we obtain $(\alpha - \beta)\dfrac{u_\infty x}{u_\infty} = \beta\Phi_{1x}|\Phi_1$

Integrating, $$\left(\frac{u_\infty}{U_\infty}\right)^{(\alpha-\beta)} = C(t)\Phi_1^\beta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \tag{23}$$

$C(t)$ is a constant of integration;

$$\text{so } \Phi_1 = \sqrt{\frac{U_\infty}{u_\infty}\cdot(2\alpha - \beta) + A_1(t)\frac{U_\infty}{u_\infty}}, \quad \ldots \quad \ldots \tag{24}$$

From (23),

$$\frac{u_\infty}{U_\infty} = C^{\partial/(\partial\alpha-\beta)}\left[(\partial\alpha - \beta)\frac{x}{L} + A_1(t)\right]^{\beta(\partial\alpha-\beta)} \quad \ldots \quad \ldots \tag{25}$$

From (23),

$$\Phi_1 = \left[(\partial\alpha - \beta)\frac{x}{L} + A_1(t)\right]^{(\alpha-\beta)/(\partial\alpha-\beta)} | [C(t)]^{\frac{1}{\partial\alpha-\beta}}$$

From 4th of (9),

$$\Phi_1 = \left[\frac{2\delta U_\infty t}{L} + B(x)\right]^{1/2} \quad \ldots \quad \ldots \tag{27}$$

In order that the expressions for Φ_1, given by (26) and (27) should be identical

$$\frac{\alpha - \beta}{\partial\alpha - \beta} = \frac{1}{\partial}, \quad \text{whence } \beta = 0.$$

And $$B(x) = \frac{\partial\alpha x}{LC^{1/2}}, \quad A_1(t) = \frac{2\delta U_\infty t}{L}c^{1/2}$$

C is an absolute constant, (from 23),

so that $$\Phi_1 = \left[\frac{\partial\alpha x}{LC^{1/2}} + \frac{C^{1/\alpha}\partial\delta U_\infty t}{L}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \quad \ldots \tag{28}$$

from(23) $u_\infty =$ absolute constant.

Since for similarity solution u_∞ is an absolute constant and so Θ_ω is also an absolute constant which means the flow outside the boundary layer is steady and the boundary conditions on the wall are steady as well. So, naturally the flow becomes steady and it is uselsss to introduce variables of the unsteady type. Therefore, in an unsteady flow where viscous dissipation cannot be neglected, it is not possible to obtain similarity solution. But it is interesting to note that in cases where the viscous dissipation can be neglected we may get different types of similarity solutions. *Case III.* Flow unsteady but viscous dissipation is neglected.

If in the unsteady flow the viscous dissipation is neglected, the only change is in the equation (5) and then it becomes

$$\frac{1}{P_r}\Theta_1'' + [\eta\delta + \alpha t]\Theta_1' - [\varepsilon + \omega f']\Theta_1 = 0 \;\ldots\;\ldots \qquad (5)$$

so that the last of the relation given in (6) will be absent i.e., u_∞ and θ_ω will not be related. Proceeding as before in case II, we see that for a similarity solution u_∞ should be constant. Then

$$\Phi_1 = \left[\frac{\partial\alpha x}{L} + \frac{\partial\delta U_\infty t}{L}\right]^{1/2}$$

(here we take $u_\infty = U_\infty$ so that $c = 1$)
From (6),

$$\frac{\theta_{\omega t}}{\Theta_\omega} = \frac{\varepsilon U_\infty}{[\partial\alpha x + \partial\delta U_\infty t]}$$

whence,

$$\theta_\omega = A_1(x)\;\partial\alpha x + \partial\delta \cup \infty\, t] \;\ldots \qquad (20)$$

$A_1(x)$ is a constant of integration,

and
$$\frac{\theta_{\omega x}}{\theta_\omega} = \frac{\omega}{[\partial\alpha x + \partial\delta U_\infty t]}$$

whence

$$\theta_\omega = A_2(t)\left[2\alpha x + \frac{2\delta U_\infty t}{L}\right]^{\frac{\omega}{\partial\alpha}} \ldots \qquad (21)$$

In order that (20) and (21), should be identical,

$$A_1 = A_2 = \text{absolute constant.}$$

and,
$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \frac{\omega}{\alpha} \;\ldots\;\ldots\;\ldots \qquad (22)$$

Suitably choosing the constants in (6), under the condition (22), we may get different unsteady conditions on the plate.

Therefore the similarity solution exists in this case when the temperature distribution in the plate is given by (21). Then the equations are

$$f''' + \alpha ff'' + \delta\eta f'' = 0 \; \ldots \; \ldots \; \ldots \tag{23}$$

$$\frac{1}{P_r}\theta_1'' + [\eta\delta + \alpha f]\theta_1' - [\varepsilon + \omega f]\theta_1 = 0 \; \ldots \tag{24}$$

with the boundary conditions

$$at \eta = 0,\ f = f' = 0,\ \theta_1 = 1;\ \omega\eta \to \infty,\ f' \to 1,\ \theta_1 \to 0.$$

REFERENCES

1. Ghoshal, S., Doctoral Thesis, Jadavpur University, 1966.

ASUPRA SOLUŢIEI DE SIMILARITATE A STRATULUI LIMITĂ LAMINAR NESTAŢIONAR DE-A LUNGUL UNEI PLĂCI PLANE

(Rezumat)

În lucrarea prezentă se face o analiză unitară în vederea obţinerii tuturor soluţiilor de similaritate ale curgerii staţionare şi nestaţionare în interiorul unui strat limită de-a lungul unei plăci plane. Deşi s-au făcut şi înainte încercări de a obţine soluţii de similaritate ale unei curgeri staţionare în strat limită neglijînd termenul de disipaţie de viscozitate în ecuaţia conservării energiei, aceste tratări nu au fost complete. În cazul de faţă am ţinut cont de termenul de disipaţie vîscoasă. În cazul staţionar s-a arătat că pentru o soluţie de similaritate, atît a vitezei cît şi a temperaturii, trebuie să existe o relaţie în curgerea exterioară neperturbată, stratul limită şi temperatura plăcii. Se arată că soluţia de similaritate există în cazul nestaţionar dacă neglijăm termenul de disipaţie vîscoasă în ecuaţia energiei.

О РЕШЕНИИ ПОДОБИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЛАМИНАРНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ ВДОЛЬ ПЛОСКОЙ ПЛАСТИНКИ

(Резюме)

В работе проводится единый анализ с целью получения всех решений подобия стационарного и нестационарного течений внутри пограничного слоя, вдоль плоской пластинки. Несмотря на то, что и раньше были предприняты попытки в целях получения решений подобия стационарного течения в пограничном слое, пренебрегая членом рассеяния вязкости в уравнении сохранения энергии, всё же трактовка этих вопросов была неполной. В данном случае автор учёл член вязкого рассеяния. При стационарном случае показано, что для решения подобия как скорости, так и температуры, должно существовать соотношение между внешним невозмущённым течением, пограничным слоем и температурой пластинки. Показано, что решение подобия существует в нестационарном случае, если пренебречь членом вязкого рассеяния в уравнении энергии.

RECENZII

L u c i o L o m b a r d o — R a d i c e , **Istituzioni di algebra astratta** (edizione IX), Ed. Feltrinelli, Milano, 1972 (XIII + 476 pages).

Dans cet ouvrage de caractère introductif, paru pour la première fois en 1965, l'auteur réussit à présenter sous un aspect unitaire les problèmes les plus importants de l'algèbre abstraite. L'auteur met en évidence les causes qui ont conduit à la réorganisation des mathématiques, basée sur l'étude des structures fondamentales, notamment des structures algébriques, des structures d'ordre et des structures topologiques. Conformément à cette conception, l'ouvrage traite ces structures, l'accent étant mis sur les structures algébriques et d'ordre.

Les dix chapitres du livres sont les suivants :

I. *Ensembles privés de structure.*
II. *Généralités concernant les structures algébriques.*
III. *Groupes abstraits.*
IV. *Opérations sur les groupes. Sous-groupes remarquables.*
V. *Anneaux généraux.*
VI. *Anneaux commutatifs.*
VII. *Problèmes de représentation et d'immersion pour les groupes et les anneaux.*
VIII. *Structures d'ordre et treillis.*
IX. *Groupes à opérateurs. Espaces vectoriels.*
X. *Construction du corps des nombres réels et sa caractérisation axiomatique.*

Cette énumération et le caractère introductif du volume donnent une première idée de la matière incluse dans cet ouvrage. Pour orienter mieux le lecteur sur le contenu de l'ouvrage et sur le degré de profondeur des sujets traités, nous énumérons encore — en style télégraphique — quelques problèmes étudiés, en signalant en paranthèse les numéros des chapitres et des paragraphes où se trouvent ces problèmes:

Distinction entre les classes et les ensembles ; la définition axiomatique de la notion de l'ensemble (I,15). La subordonation de la notion d'opération n-aire à celle de la relation (n + 1)-aire (II,2). Produits directs et produits libres de groupes (IV,2 et 3). Problèmes de caractère arithmétique dans un groupe, le premier théorème de Sylow (IV,6). L'unification de la théorie des homomorphismes de groupes et d'anneaux dans la théorie des groupes à multiopérateurs (V,9). Problèmes d'extension des corps commutatifs (VI,7 et 8). Le théorème de base de Hilbert, les idéaux et les variétés algébriques (VI,9). La représentation des anneaux dans certains anneaux d'endomorphismes (VII,6). L'immersion d'un anneau de d'intégrité dans un corps de quotients à droite (VII, 11). L'importance des groupes de permutations (transformations) du point de vue géométrique (VII, 14). Treillis distributifs et modulaires (VIII,6). Isomorphismes d'ordre, nombres ordinaux transfinis (VIII, 11). Opérateurs de fermeture et les espaces topologiques (VIII,12). A — modules (IX,2). L'existence d'une base libre pour un espace vectoriel (IX,5). Reflexions sur la connexion de la théorie des espaces vectoriels avec la géométrie projective (IX,6).

L'ouvrage est complété par un vaste appendice (63 pages) intitulé „Exercices et compléments", elaboré par V. C o r b a s et G. P a n e l l a. Cet appendice contient 181 exercices et problèmes qui contribuent essentiellement à l'approfondissement de la matière traitée.

L'orientation est facilitée par un index terminologique, et par de nombreuses observations très suggestives, placées au bord des pages.

Les nombreuses observations concernant les idées qui dominent les mathématiques actuelles, les sept notes très intéressantes de caractère historique présentent de l'intérêt non seulement pour les mathématiciens, mais aussi pour un cercle plus large de lecteurs.

L'impression de l'ouvrage par la maison Feltrinelli est parfaite.

L'ouvrage est caractérisé par des qualités scientifiques et didactiques remarquables et par un style absolument clair. C'est un vrai plaisir que de lire ce livre, qui a eu un succès extraordinnaire : neuf éditions en huit ans !

I. GY. MAURER

Beniamino Segre, **Prodromi di geometria algebrica,** Ed. Cremonese, Roma, 1972 (VI + 412 pages).

L'influence de l' école géométrique italienne sur le développement de la géométrie algébrique et sur les théories connexes est bien connue. Donc c'est un fait salutaire que, le représentent actuel principal de cette école a décidé — comme il en résulte de l'introduction de cet ouvrage — de faire paraître plusieurs volumes, destinés à refléter le stade actuel de la géométrie algébrique, en particulier les résultats obtenus dans ce domaine par l'école géométrique italienne.

Cet ouvrage de caractère introductif est le premier volume de la série des livres planifiés, mentionnée ci-dessus. L'ouvrage est divisé en deux parties (3 + 4 chapitres), ces deux parties sont suivies par un appendice signé par U. Bartocci et M. Lorenzani.

La première partie — après un chapitre introductif, qui met en évidence l'instrument algébrique nécessaire — traite la théorie projective des hypersurfaces (dénommées formes) et des variétés algébriques.

La deuxième partie contient les éléments de la théorie des systèmes linéaires des hypersurfaces dans un espace projectif ou sur une variété algébrique. Dans cette partie on déduit en outre les deux théorèmes classiques de Bertini et leurs extensions pour les systèmes linéaires des hypersurfaces d'une variété algébrique V_d de dimension d. On étudie aussi la relation d'apolarité (ou conjugaison) entre les hypersurfaces et entre les systèmes linéaires des hypersurfaces.

Ces deux parties traitent les problèmes dans l'espace projectif défini sur le corps des nombres complexes.

L'appendice mentionné complète les premières deux parties de l'ouvrage d'une manière naturelle et éducative, en développant les fondaments de la théorie générale, où le corps des nombres complexes est remplacé par un corps quelconque. Après l'exposé des éléments d'algèbre commutative, on étudie les variétés algébriques affines, projectives et normales, pour arriver au but principal de l'appendice : la généralisation des théorèmes classiques de Bertini.

Une énumération des parties et des chapitres précisera le contenu de ce volume :

I — ère Partie. *Variétés algébriques simples.*
- Chap. I. *La théorie de l'élimination.*
- Chap. II. *Les formes d'un espace projectif.*
- Chap. III. *Variétés algébriques.*

II — ème Partie. *Éléments de la théorie des systèmes linéaires.*
- Chap. IV. *Systèmes linéaires de formes.*
- Chap. V. *Systèmes linéaires des hypersurfaces sur une V_d algébrique.*
- Chap. VI. *Apolarité entre formes et systèmes linéaires de formes.*

Appendice. *Les théorèmes de Bertini et leurs généralisations.*
- Chap. VII. *Éléments de la théorie des corps.*
- Chap. VIII. *Positions, valuations et théorie des anneaux.*
- Chap. IX. *Variétés algébriques.*
- Chap. X. *Les théorèmes de Bertini.*

Le texte contient de nombreuses indications bibliographiques. Une bibliographie complémentaire contient 68 titres. L'orientation est facilitée par trois indices, composés par P. V. Ceccherini : un index des auteurs, un index terminologique et un index particulier pour faciliter la confrontation des notions principales qui se trouvent dans l'appendice avec les notions correspondantes des parties I et II.

L'impression de l'ouvrage par la maison Cremonese est parfaite.

La multilatéralité des problèmes exposés dans cet ouvrage, son style profond et clair, font recommandable ce livre d'une valeur scientifique et didactique remarquable, à tous ceux qui désirent avoir d'accès solide vers la géométrie algébrique.

I. GY. MAURER

CRONICĂ

GENERALIZĂRI ALE POLINOAMELOR LUI S. N. BERNSTEIN

Rezumatul tezei de doctorat susținută la 8 ianuarie 1972, la Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj, de GRIGOR MOLDOVAN, *pentru obținerea titlului de doctor în matematici.*

Lucrarea este alcătuită din două părți și o anexă. Prima parte se referă la generalizări ale operatorilor lui Bernstein relative la funcții de o singură variabilă, iar partea a doua se referă la cazul funcțiilor de mai multe variabile.

În lucrare se prezintă o metodă de a construi operatori liniari pozitivi pornind de la anumite convoluții discrete care se definesc prin intermediul a două operații. Se dau mai multe proprietăți ale convoluțiilor discrete considerate. Se definesc, apoi, operatorii convolutivi pozitivi, în legătută cu care se studiază problema convergenței, iar în ultimul capitol din partea a doua se evaluează ordinul de aproximație, dîndu-se în acest sens mai multe teoreme. Această metodă a permis obținerea de noi clase de operatori liniari pozitivi, care cuprind ca și cazuri particulare alte tipuri de operatori ce generalizează operatorii lui Bernstein. Anexa lucrării conține o aplicație unde se descrie, în limbajul ALGOL-60, un algoritm. Programul ALGOL a fost rulat pe un calculator MINSK-22, în timpul unei specializări a autorului în R.S. Cehoslovacă, 1968.

Rezultatele din teză au fost publicate parțial de autor în mai multe lucrări dintre care notăm pe cele din revistele: „C.R. Acad. Sc. Paris", t. 272 (1971), Série A, 1311–1313; „Annales Univ. Sci. R. Eötvös", Sec. Math.; „Studia Univ. Babeș-Bolyai, ser. Math.-Mech", f.1. (1966), 63–71; f.2 (1967), 51–57; f. 2 (1969), 59–64; f. 1 (1971), 69–71; f.1 (1972), 67–72; f. 1. (1973), 69–80; „Studii Cer. Mat", t. 18, nr. 6 (1966), 845–853; etc.; altele se află sub tipar.

COMISIA DE DOCTORAT

Președinte: Prof. dr. P. MOCANU (Cluj)
Conducător științific: Prof. dr. D.D. STANCU (Cluj)
Membri: Acad. Prof. dr. doc. G. CĂLUGĂREANU (Cluj)
Prof. dr. doc. E. DOBRESCU (Craiova)
Prof. dr. A. COȚIU (Cluj)

CONTRIBUTIONS TO THE TOPOLOGIESATION OF ALGEBRICAL STRUCTURES

Summary of the dissertation presented at 29 june 1971, at „Babeş-Bolyai" University from Cluj, by MIKLÓS SZILÁGYI, *for obtaining the degree of doctor in mathematics.*

The dissertation brings contributions to the topological study of a particular class of universal algebras, namely, the groups with multiple operators (Ω — grups) introduced by *P.G.* Higgins in 1956. Until now this class was studied exclusively from algebrical point of view.

The dissertation containts an introduction and four chapters.

In the first chapter are presented those fundamental properties of the topological Ω — groups, which stay at the basis of the material developed in the following chapters. It is put an outstanding accent on the study of some particular topologies defined in the Ω — groups with the help of a family of ideals of the considered Ω — group. The germs of this theory for the case of some particular algebras, can be found already in the works of: H. Prüfer (1925), W. Krull (1928; 1965), D. van Dantzig (1931; 1933), M. Hall jr. (1950), H. Schöneborn (1954; 1955), E. D. Bolker (1963), D. Zelinsky (1951—1953), F. Ballier (1956), I. Gy. Maurer and M. Szilágyi (1967—1969). Very general results were obtained by A. I. Malcev (1954) in the case of universal algebras. The results of this chapter are to be published in "Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math-Mech." (1972—1974).

The second chapter is dedicated to the study of some particular equations defined over topological Ω — groups. There are established theorems like the theorem of alternatives of Fredholmwell known in functional analysis. For reaching results of this type, there are developed beforehand the basic ideas of a theory which could be considered like a generalization, in a wide sense, of the theory of duale spaces in linear algebra. Simlar results were published by I. Gy. Maurer and M. Szilágyi (1968, 1971).

The third chapter is dealing with some problems which generalize, in a very wide sense, particular results treated by N. Bourbaki (1960) referring to the summability of some systems of elements of a commutative topological group. The notion of unordered summability was introduced in 1915 for functions with real values, by E. H. Moore. This notion was the precursor of the convergence notion in Moore-Smith sense, in a topological space. The principal results of this chapter are published in "Rev. Roumaine Math. Pur. Appl." (1972), and are concerned with the commutative summability and uncondition summability of partial functions assuming values from topological Ω — groups. It is studied the algebrical structure and topological structure of summable functions. In the last part there are studied some problems connected with a notion of infinite product of partial functions. Results of this type in more particular cases were obtained by T. Szele (1956). I. Gy Maurer, I. Purdea and E. Virág (1962,) I. Gy. Maurer and M. Szilágyi (1965—1969).

In the fourth chapter it is given an "interior" interpretation of the notion of direct product in the category of Ω — groups. It is defined a notion of interior sum of a family of Ω — subgroups of a given Ω — group, using a certain closure operator, which is defined with the help of the summability notion, studied in the third chapter. It is shown that the direct product (direct complete sum) of a family of Ω — groups in the mentioned category, may be decomposed in an interior sum of some Ω — izomorphic subgroups with the given Ω — groups. The results of this chapter are published in "Rend. di Mat. Univ. Roma" (1972).

COMMITTEE OF EXAMINATION FOR DOCTOR'S DEGREE

President: Prof. dr. P. MOCANU (Cluj)
Scientific leader: Prof. dr. doc. GH. PIC (Cluj)
Membres: Acad. Prof. dr. doc. G. CĂLUGĂREANU (Cluj)
Prof. dr. F. RADÓ (Cluj)
Conf. dr. I. GY. MAURER (Cluj)

FUNDAMENTAREA GEOMETRIEI ABSOLUTE METRICE A SPAŢIULUI ÎN BAZA PROPRIETĂŢILOR GRUPALE

Rezumatul tezei de doctorat susţinută la 14 februarie 1972, la Universitatea „Babeş-Bolyai" din Cluj, de ANGELA VASIU, *pentru obţinerea titlului de doctor în matematici.*

Teza prezentată se încadrează în cercetările moderne asupra fundamentelor geometriei. De la apariţia în 1959 a cărţii lui F. Bachmann despre construirea geometriei pe baza noţiunii de simetrie, s-a recunoscut din ce în ce mai mult rolul metodelor grupale în geometrie, fapt cu implicaţii importante în procesul de modernizare a învăţămîntului matematic.

Teza cuprinde o introducere şi cinci capitole. În introducere se dă o privire asupra dezvoltării recente a geometriei metrice şi un rezumat al tezei.

Capitolul I intitulat *Spaţii metrice proiective şi spaţii vectoriale metrice* conţine în rezumat un material despre structurile de incidenţă, spaţiile proiective, coliniaţiile, corelaţiile, spaţiile proiective metrice şi spaţiile vectoriale metrice, necesare în capitolele următoare. În ultimul paragraf al capitolului I se arată că noţiunea de geometrie absolută a planului introdusă de J. Bolyai a fost lărgită în mod treptat înglobîndu-se plane de tip euclidian şi neeuclidian de diferite grade de generalitate. De aici se ajunge la formularea ideii fundamentale a cercetărilor moderne de geometrie metrică absolută.

În capitolul II se formulează un sistem de axiome pentru un grup G care admite un sistem de generatori S, involutivi. Perechea (G,S) care verifică sistemul de axiome se numeşte un grup de mişcări, elementele lui G. se numesc mişcări, cele ale lui S, simetrii. Deci mişcările sînt concepute ca elementele unui grup abstract cu anumite proprietăţi şi nu ca transformări. Teoria dedusă din sistemul de axiome este numită geometria metrică a spaţiului. Se asociază grupului de mişcări (G,S) un spaţiu de incidenţă $\mathfrak{S}(G, S)$ şi se defineşte o relaţie de perpendicularitate între două plane. Spaţiul de incidenţă $\mathfrak{S}(G, S)$ împreună cu relaţia de perpendicularitate se numeşte spaţiul metric asociat grupului de mişcări (G,S) şi se notează $\mathfrak{S}(G, S, \perp)$. Se arată că o transformare a grupului G printr-un element α, $\alpha \in G$ $X \to X^{\alpha} = \alpha^{-1} x \alpha$ induce o aplicaţie a lui $\mathfrak{S}(G, S)$ în $\mathfrak{S}(G, S)$ care păstrează perpendicularitatea şi incidenţele. Aceste transformări sînt numite deplasările spaţiului $\mathfrak{S}(G, S, \perp)$. Se arată că mulţimea lor este izomorfă cu G/C, unde C este centrul grupului G. În continuare se face un studiu al relaţiilor de incidenţă ternare şi cuaternare.

În capitolul III se studiază proprietăţile spaţiului $\mathfrak{S}(G, S, \perp)$ asociat grupului de mişcări (G,S), stabilind teoreme cu privire la perpendicularitate, la existenţa anumitor puncte şi drepte, în special puncte şi drepte proprii. Planele perpendiculare pe un plan dat formează un snop. Astfel fiecărui plan i se asociază un snop normal. Dacă această aplicaţie este injectivă se obţin geometriile de tip neeuclidian, dacă ea nu este injectivă se obţin geometriile de tip euclidian şi supereuclidian.

În capitolul IV se realizează scufundarea structurii de incidenţă $\mathfrak{S}(G, S)$ într-un spaţiu proiectiv. Se arată întîi că două drepte coplanare sînt totdeauna concurente, ceea ce permite verificarea axiomei lui Veblen şi Young. Rezultă că scufundarea în spaţiul ideal poate fi făcută prin completarea structurii $\mathfrak{S}(G, S)$ doar cu plane noi. Dacă Centrul C se reduce la elementul unitate al grupului G, în spaţiul ideal au loc teoremele lui Pappus-Pascal şi Fano.

În capitolul V se demonstrează că grupul (G,S) poate fi reprezentat cu un subgrup al grupului de deplasări al spaţiului metric proiectiv tridimensional. Se face cîte un studiu pentru metrica neeuclidiană, euclidiană şi supereuclidiană. Lucrarea se încheie cu patru teoreme arătînd în diferite ipoteze izomorfismul dintre grupul de mişcări şi grupul ortogonal $O_4^+(K, f)$ corespunzător unui corp K şi unei forme biliniare simetrice f.

Bibliografia cuprinde 59 de titluri.

COMISIA DE DOCTORAT

Preşedinte: Prof. dr. P. MOCANU (Cluj)
Conducător ştiinţific: Acad. prof. G. CĂLUGĂREANU (Cluj)
Membri: Prof. dr. doc. LASCU L. BAL (Cluj)
Prof. dr. F. RADÓ (Cluj)
Conf. dr. M. ŢARINĂ (Cluj)

Şedinţe de comunicări ale Facultăţii de matematică-mecanică

14 ianuarie

Prof. dr. doc. Gh. Chiş, *Viaţa şi opera lui Kepler.*

Lect. dr. E. Virág, *Extinderi regulate de grupuri cu multioperatori.*

Asist. Gr. Călugăreanu, *O varietate de structuri de elemente în categorii închise.*

11 februarie

Acad. prof dr. doc. G. Călugăreanu, *Demonstraţia unei conjecturi a lui L. Neuwirth.*

Conf. dr. Ioan A. Rus, *Aspecte din cercetarea matematică la Universitatea din Moscova.*

17 noiembrie

Acad. prof. dr. doc. G. Călugăreanu, *Invarianţi de contracţie în grupuri şi semigrupuri.*

15 decembrie

Lect. dr. Gh. Micula, *Aspecte din cercetarea matematică la Institutul de ştiinţe Weizmann din Israel.*

Asist. N. Both, *Consideraţii algebrice privind formalizarea teoriei demonstraţiei.*

Participări la manifestării ştiinţifice internaţionale

17—20 ianuarie

Sesiunea de la Las Vegas, Nevada, S.U.A.

Prof. dr. P. T. Mocanu şi prof. dr. M. O. Reade, *Raza de α-convexitate pentru funcţii stelate.*

27 martie — 1 aprilie

Sesiunea de la St. Louis, Missouri, S.U.A.

Prof dr. P. T. Mocanu şi prof. dr. M. O. Reade, *Despre funcţiile α-convexe I.*

1 aprilie — 1 iulie

Lect. dr. Gh. Micula a efectuat o vizită de specializare la „Institutul de Ştiinţe Weizmann", Rehovot, Israel, unde a ţinut mai multe expuneri, cu tema *Integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul funcţiilor spline.*

În aceeaşi perioadă a vizitat Universitatea din Ierusalim, Universitatea din Tel-Aviv şi Institutul Tehnologic „Tehnicon" din Haifa, unde de asemenea a prezentat expuneri.

22 aprilie

Sesiunea de la Berkeley, California, S.U.A.

Prof. dr. P. T. Mocanu şi prof dr. M. O. Reade, *Despre funcţiile α-convexe II.*

mai — iunie

Conf. dr. Iuliu Gy. Maurer a efectuat o vizită în Italia, în calitate de profesor vizitator, unde a ţinut un ciclu compus din 7 conferinţe, cu titlul rezumativ *Alcuni problemi d'algebra topologica*, la Institutul de matematică al Universităţii din Trieste, conferinţa *Generalizzazioni della nozione di prodotto diretto*, la Institutul de matematică al Universităţii din Firenze şi conferinţa *L'origine comune di certe topologie definite in strutture algebriche*, la Institutul de matematică al Universităţii din Perugia.

1 — 7 iunie

Prof. dr. doc. Gheorghe Chiş a fost delegat din partea C.N.S.T. la Conferinţa anuală a colaborării dintre ţările socialiste pentru utilizarea spaţiului cosmic în scopuri paşnice, Budapesta.

iunie

Prof. dr. doc. Gh. Pic, fiind invitat de către „Deutscher Akad. Austauschungsdienst" (R. F. G.) şi „Bolyai Mathematikai Társaság" (R. P. U.), a ţinut 4 conferinţe din tema *Probleme referitoare la grupuri* II*-resolubile*, la Universităţile din Tübingen, Heidelberg, Mainz (R. F. G.) şi Budapesta (R. P. U.).

30 iulie — 5 august

Colocviul de Ecuaţii funcţionale, Oberwolfach, R. F. G.

Lect. V. Herman, *Caractérisation fonctionnelle de la fonction constante dans un espace vectoriel normé.*

29 august — 1 septembrie

Sesiunea de la Hanover, New Hampshire, S.U.A.

Prof. dr. P. T. Mocanu, prof. dr. M. O. Reade şi prof. dr. E. Zlotkiewicz, *Funcţii Basilevici şi funcţii p-valente aproape convexe.*

22 — 26 august

Conferinţa de teoria aproximaţiei, Poznan, R. P. Polonă.

Lect. dr. Wolfgang W. Breckner, *Charakterisierung von Minimallösungen bei verallgemeinerter Approximation.*

Prof. dr. I. Maruşciac, *Asupra unor mulţimi extremale din teoria aproximaţiei liniare.*

Prof. dr. E. Popoviciu, *Asupra celei mai bune aproximații cu condiții suplimentare.*
Acad. prof. T. Popoviciu, *Asupra anumitor polinoame care se abat cel mai puțin de la zero.*

28 august — 1 septembrie

Conferința de Ecuații diferențiale și aplicațiile lor, Brno, Cehoslovacia.
Conf. dr. Ioan A. Rus, *Some fixed points theorems in matric spaces.*
Acad. prof. T. Popoviciu, *Application de la théorie des fonctions convexes d'order supérieur à l'étude de certains procédés d'intégration numérique des équations différentielles.*

2—9 septembrie

Prima reuniune astronomică europeană, Atena.
Au participat: prof. Gh. Chiș, prof. Arpad Pal, cerc. pr. Ioan Todoran.
Ioan Todoran, *Apsidal Motion in Close Binary Sistems with Variable Orbital Period.*

septembrie

Congresul matematicienilor bulgari, Varna.
Prof. dr. E. Popoviciu, *Asupra definiției alurii unei funcții.*
octombrie 1971 — *octombrie* 1972
Cercetătorul Tiberiu Oproiu a beneficiat de o bursă de studii „Nicolae Copernic" în Polonia.

Participări la manifestări științifice din țară

15 ianuarie

VIZITĂ LA UNIVERSITATEA DIN CRAIOVA

Prof. dr. P. T. Mocanu, *Proprietăți de convexitate generalizată în teoria reprezentării conforme.*
Conf. dr. I. Muntean, *Convergența exponențială a soluțiilor ecuațiilor diferențiale.*
Prof. dr. D. D. Stancu, *Metode probabilistice în teoria aproximării uniforme a funcțiilor.*

18—20 februarie

CONFERINȚA S.S. M. CU TEMA „PROBLEME ACTUALE ALE STUDIULUI INDIVIDUAL ȘI ALE SEMINARIILOR DE MATEMATICĂ", BRAȘOV.

Prof. dr. doc. Gh. Chiș, *Rolul și metodele de predare eficientă a astronomiei în învățămînt.*

15 aprilie

CONSFĂTUIREA S.S.M. CLUJ.

Asist. C. Mocanu, *Despre programarea booleană.*
Prof. dr. E. Popoviciu, *Teoria interpolării și aplicațiile ei.*
Acad. prof. T. Popoviciu, *Probleme de cea mai bună aproximație.*

aprilie

SEMINARUL DE ECUAȚII FUNCȚIONALE, TIMIȘOARA.

Prof. dr. E. Popoviciu, *Asupra unui procedeu de interpolare.*
Acad. prof. T. Popoviciu, *Rezolvarea unei ecuații funcționale în legătură cu polinoame binomiale.*
Conf. dr. A. Ney, *Caracterizarea clanului borelian printr-o ecuație cu diferențe.*

28—29 aprilie

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ DE COMUNICĂRI A UNIVERSITĂȚII „BABEȘ-BOLYAI" CLUJ.

Conf. dr. M. Balázs, *Contribuții la studiul metodei lui Steffensen.*
Lect. D. Borșan, *Aplicații cu valori într-o latice.*
Asist. N. Both, *J — independența.*
Lect. dr. Wolfgang Breckner, *Asupra unei clase de spații vectoriale ordonate care intervin în teoria optimizării.*
Acad. prof. G. Călugăreanu, *Invarianți de contracție în grupuri cu relații.*
Fiz. D. Gh. Chiș, *Determinarea noilor elemente fotometrice la stelele UX și UU CETI.*
Prof. dr. doc. Gh. Chiș, *Interpretări ale pierderii de masă la stelele binare strînse.*
Lect. dr. Gh. Coman, *Monospline și formule optimale de cuadratură în* L_q.
Lect. P. Enghiș, *Asupra unor spații cu conexiune afină.*
Lect. dr. E. Frățilă, *Asupra eficienței unor metode Monte Carlo de selecție stratificată.*
Lect. dr. M. Frenkel, *Aplicarea teoremei de mediere la anumite sisteme de ecuații.*
Asist. G. Goldner, *Unele aplicații ale metodei coardei.*
Lect. V. Groze, *Despre condiții de tranzitivitate în structuri de incidență.*

Doctorand Antal Hadnagy și conf. dr. E. Schechter, *Stabilitatea și convergența în probleme neliniare de evoluție.*

Matem. P. Horedt, *Determinarea coeficientului de distorsie a camerei UFISZ.*

Prof. emerit D.V. Ionescu, *Asupra metodei funcției φ.*

Prof. dr. C. Kalik, *Asupra rezolvării aproximative a unor ecuații diferențiale.*

Lect. dr. I. Kolumban, *O condiție necesară de extrem la probleme de optimizare neliniare.*

Prof. dr. I. Marușciac, *Caracterizarea unor mulțimi extremale.*

Prof. dr. I. Marușciac și conf. dr. M. Rădulescu, *Programarea produselor de funcții liniare.*

Conf. dr. I. Gy. Maurer, *Despre anumite ecuații definite peste algebre universale topologice.*

Lect. dr. Gh. Micula, *Asupra unei metode de delimitare a erorilor la integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.*

Asist. C. Mocanu, *O proprietate a produsului omomorf de măsuri Haar.*

Prof. dr. P. Mocanu și prof. dr. M. Reade (S. U. A.), *Raza de α-convexitate pentru funcții stelate.*

Asist. dr. Gr. Moldovan, *Unele proprietăți ale operatorilor convolutivi pozitivi.*

Conf. dr. I. Muntean, *Soluții aproape periodice cu convergență exponențială.*

Conf. dr. A. Ney, *Reprezentarea funcției probabilitate pe cîmpuri de evenimente numărabile sau continue.*

Lect. dr. B. Orbán, *Despre omomorfismele planului proiectiv desarguesian.*

Prof. dr. A. Pál, *Perturbații periodice în orbita intermediară a sateliților artificiali ai Pămîntului.*

Lect. dr. T. Petrilă, *Asupra mișcării unui sistem de n corpuri într-un fluid ideal.*

Prof. dr. doc. Gh. Pic, *O generalizare a grupurilor Carter.*

Lect. dr. I. M. Pop, *Stratul limită nestaționar pe un disc în rotație.*

Cercet. V. Pop și cercet. pr. dr. Ioan Tudoran, *Studiul cefeidei scurt periodice BE Eridani.*

Prof. dr. E. Popoviciu, *Asupra unui procedeu de interpolare.*

Acad. prof. T. Popoviciu, *Asupra unor formule de medie.*

Lect. dr. I. Purdea, *Inele de tip (m,n).*

Prof. dr. Fr. Radó, *Despre caracterizarea topologică a corpurilor valuate.*

Conf. dr. I. A. Rus, *Punct de vedere categorical în teoria punctului fix.*

Lect. P. Sandovici, *Considerații asupra structurilor aproape simplectice.*

Conf. dr. Ervin Schechter, *Influența prelungirii soluției discrete asupra ordinului de convergență.*

Asist. dr. M. Schechter, *Proprietăți ale produsului direct de structuri relaționale.*

Lect. dr. I. Stan, *Strat limită de difuzie nestaționar.*

Prof. dr. D. D. Stancu, *Studiul unei noi clase de operatori liniari pozitivi de tip interpolator.*

Lect. dr. P. Szilágyi, *Spațiul nul al unor operatori eliptici în plan.*

Lect. C. Tarția, *O problemă de sinteza schemelor.*

Cercet. pr. dr. I. Todoran, *Utilizarea observațiilor dispersate pentru determinarea perioadei unei stele variabile.*

Conf. dr. A. Turcu, *Asupra unei probleme de bifurcație în vibrații neliniare.*

Conf. dr. M. Țarină, *Asupra unor fibrate vectoriale definite pe spații omogene.*

Lect. dr. V. Ureche, *Modelul elipsoid — elipsoid pentru sisteme binare restrînse. Formule de recurență pentru funcțiile D_k^j (x).*

Asist. dr. A. Vasiu, *Asupra categoriei grupurilor (G, S).*

Lect. dr. E. Virág, *Despre o clasă de grupuri primitive rezolvabile.*

Asist. H. Wiesler, *Triple în categorii relative.*

Conf. dr. V. Zelmer, *Despre unele aplicații ale algebrelor booleene.*

12—13 mai

SESIUNEA DE COMUNICĂRI A INSTITUTULUI PEDAGOGIC DIN BAIA MARE.

Conf. dr. M. Balázs, *Asupra metodei coardei.*

Lect. P. Enghiș, *Asupra unor spații cu conexiune afină cu tensori recurenți.*

Lect. dr. E. Frățilă, *Evaluarea parametrului necunoscut din densitatea de probabilitate cu metoda aproximațiilor stochastice.*

Asist. G. Goldner, *Despre unele aplicații ale metodei coardei.*

Conf. dr. S. Groze, *Asupra unei clase de ecuații operaționale neliniare.*

Conf. E. Kiss, *Ecuația diofantiană a lui A. Hurwitz.*

Prof. dr. I. Marușciac, *Asupra soluțiilor aproximative extremale ale unui sistem incompatibil de ecuații.*

Cercet. V. Pop, *Observații fotoelectric în B și V la steaua VW Cephei.*

26–31 *mai*

COLOCVIUL DE GEOMETRIE ŞI TOPOLOGIE TIMIŞOARA.

Acad. prof. G. Călugăreanu, *Asupra unei conjecturi a lui L.P. Neuwirth.*

Prof. dr. P. T. Mocanu, *O proprietate de convexitate generalizată în reprezentarea conformă.*

Conf. dr. M. Ţarină, *Teoreme de anulare pentru varietăţi omogene complexe.*

26–27 *mai*

SESIUNEA DE COMUNICĂRI A INSTITUTULUI PEDAGOGIC ORADEA.

Lect. dr. W. Breckner, *Asupra unei generalizări a problemei celei mai bune aproximaţii.*

Lect. P. Enghiş, *Observaţii asupra spaţiilor simetrice şi recurente.*

Asist. M. Frenţiu, *Asupra aproximării funcţiilor continue prin operatori lineari.*

Prof. dr. I. Maruşciac, *Programarea pătratică nedefinită.*

Lect. dr. Gr. Moldovan, *Aplicaţii ale convoluţiilor discrete.*

Conf. dr. I. Muntean, *Asupra definiţiei numerelor reale.*

Conf. dr. I. A. Rus, *Teoreme de punct fix în spaţii metrice.*

Lect. dr. I. Stan, *Cu privire la scurgerea difuzivă.*

Asist. dr. A. Vasiu, *Grupuri în geometrie.*

5 *iulie*

SESIUNEA DE COMUNICĂRI A FACULTĂŢII DE MATEMATICĂ-MECANICĂ, UNIVERSITATEA DIN CLUJ.

Asist. L. Lupaş, *Teoreme de convergenţă pentru şiruri de operatori lineari.*

Conf. dr. I. Muntean, *Asupra unei teoreme de punct fix în spaţii locale convexe.*

iulie

SESIUNEA ŞTIINŢIFICĂ A ACADEMIEI R.S.R. BUCUREŞTI.

Prof. dr. P. T. Mocanu, *Funcţii α-convexe în exteriorul discului unitate.*

Prof. dr. E. Popoviciu, *Aplicaţii ale teoriei interpolării în cercetările de programare.*

Acad. prof. T. Popoviciu, *Asupra unei teoreme de medie care intervine în cercetări matematice din economie.*

22–24 *septembrie*

CONFERINŢA NAŢIONALĂ DE ASTRONOMIE, BAIA MARE.

Prof. dr. doc. Gh. Chiş, *Rolul pierderii de masă în evoluţia binarelor strînse.*

Cerc. D. Gh. Chiş, cerc. V. Pop, cerc pr. I. Todoran, *Curba de lumină la steaua BS Draconis.*

Matem. P. Horedt, *Formarea stelelor prin condensare.*

Astronom V. Mioc, *Determinarea perioadei de rotaţie a satelitului artificial 1962–010 A.*

Cerc. T. Oproiu, *O expresie aproximativă pentru raza vectoare a unui punct material în cazul mişcării perturbate cauzată de mediul rezistent în sensul lui Persen.*

Prof. A. Pál, *Perturbaţii seculare şi periodice la o orbită intermediară a satelitului artificial al Pămîntului.*

Cerc. V. Pop, *Efectul Blajko la steaua XZ Cygani.*

Cerc. pr. dr. I. Todoran, *Consideraţii asupra perioadei stelei RZ Cephei.*

Lect. dr. V. Ureche, cerc. H. Minţi, *Metodă automată de determinare a elementelor la sisteme binare strînse în aproximaţie sferă — elipsoid. Aplicaţie la sistemul XZ Andromedae.*

26–28 *octombrie*

SEMINARUL NAŢIONAL DE ECUAŢII FUNCŢIONALE, IAŞI.

Lect. V. Herman, *Caracterizarea funcţiei constante prin ecuaţii funcţionale.*

Prof. dr. P. T. Mocanu, *Asupra unei ecuaţii funcţionale cu implicaţii.*

Conf. dr. I. Muntean, *A fixed point theorem for the sum of two mappings.*

1–2 *decembrie*

SEMINARUL DE CEA MAI BUNĂ APROXIMAŢIE ŞI PROGRAMARE ŞI SEMINARUL DE TEORIA CONVEXITĂŢII.

Lect. dr. W. Breckner, *Asupra unei teoreme de dualitate din programarea convexă.*

Lect. dr. Gh. Coman, *Monospline bidimensionale şi formule optimale de cubatură.*

Asist. G. Goldner, *Asupra problemei generalizării noţiunii de diferenţă divizată şi a noţiunii corespunzătoare de convexitate.*

Asist. L. Lupaş, *Utilizarea alurii în teoreme de convergenţă a şirurilor de operatori lineari.*

Prof. dr. I. Maruşciac, a) *Despre programare polinomială.* b) *Caracterizarea unor soluţii extremale a unui sistem infinit.*

Prof. dr. P. T. Mocanu, *Noţiunea de convexitate în reprezentarea conformă.*

Prof. dr. E. Popoviciu, *Asupra noţiunii de alură.*

Acad. prof. T. Popoviciu, *Observaţii asupra unei inegalităţi relative la funcţii convexe.*

CF 23

Întreprinderea Poligrafică Cluj 300/1973

În cel de al XVIII-lea an de apariţie (1973) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică—mecanică (2 fascicule);
fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—mineralogie (2 fascicule);
geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
sociologie;
ştiinţe economice (2 fascicule);
psihologie—pedagogie;
ştiinţe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XVIII году издания (1973) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—механика (2 выпуска);
физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—минералогия (2 выпуска);
география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
социология;
экономические науки (2 выпуска);
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XVIII-e année de publication (1973) les *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—mécanique (2 fascicules);
physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—minéralogie (2 fascicules);
géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie;
sociologie;
sciences économiques (2 fascicules);
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

43 875