Ș.R.   dbl.

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA
FASCICULUS 2

1972

C L U J

ANUL XVII 1972

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA
FASCICULUS 2

Redacţia: CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 • Telefon: 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — CONTENTS

Cronică — Хроника — Chronique — Chronicle

PROFESORUL GEORGE CĂLUGĂREANU

Universitatea din Cluj cinstește după cuviință un savant și un profesor distins, un slujitor credincios vreme de 50 de ani: academicianul profesor George Călugăreanu. Adoptat în rîndurile personalului didactic în calitate de preparator încă din vremea studenției, matematicianul George Călugăreanu a urcat treaptă de treaptă toate gradele didactice, temeinicind-o pe fiecare prin activitatea sa didactică și științifică, prin omenia ce o emana și o inculca colaboratorilor și ucenicilor. Modest ca fire, cumpănit în acțiuni, profund în gîndire și cercetare, cald în relațiile cu studenții, profesorul Călugăreanu a reușit, prin toate aceste calități și prin altele, să continue și să consolideze o școală de matematică prestigioasă de ecuații diferențiale și de teoria funcțiilor, cucerind alte succese, investigînd alte căi, pe lîngă cele de început ale prof. Dimitrie Pompeiu. A reușit astfel să dovedească existența funcționalelor analitice, cunoscute în literatura matematică mondială ca funcționalele Călugăreanu. A dezvoltat, a confirmat și a îmbogățit în același timp rezultatele cercetărilor unor mari savanți străini, ca Fantappie, Laurent, Lévy, Pellegrino, Cebîșev și a altora. Savantul român, profesor al Universității clujene și-a înscris astfel numele la loc de cinste în galeria marilor învățați ai vremii.

Este explicația cunoașterii și recunoașterii numelui și activității profesorului G. Călugăreanu pretutindeni în lumea științifică, sporind, astfel, prestigiul științei românești și al instituției pe care a servit-o și continuă s-o slujească cu aceeași credință și conștiință dintotdeauna.

Alegerea sa ca membru al celui mai înalt for științific al țării, Academia Română, și al altor numeroase instituții științifice străine constituie nu numai o consacrare pe deplin meritată, ci, în același timp, o recunoaștere a prestigiului internațional al savantului și al școlii consolidate și dezvoltate de el vreme de cinci decenii.

Sînt suficiente motive ca Universitatea ,,Babeş-Bolyai'' din Cluj să se asocieze cu toată preţuirea discipolilor, colaboratorilor şi admiratorilor la sărbătoarea profesorului George Călugăreanu la împlinerea frumoasei vîrste de 70 de ani, o vîrstă frumoasă ca număr de ani şi pe aceeaşi măsură ca roade ştiinţifice şi didactice, care vor fi îmbogăţite cu altele, deoarece sărbătoritul şi-a păstrat deplinătatea forţelor ştiinţifice şi spirituale.

Prof. ŞTEFAN PASCU
Rectorul Universităţii

QUELQUES REMARQUES SUR LA THÉORIE DU POINT FIXE (II)

IOAN A. RUS

1. Dans la première partie de cet article [6] on a étudié certaines notions de la théorie du point fixe dans des catégories d'ensembles structurés. Certaines notions définies dans [6] ne sont pas catégoriales. On se propose ici de chercher le correspondant catégorial de ces notions.

DÉFINITION 2.1. (Holsztynski [2]). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $A \in ob\, \mathcal{C}$. Le morphisme $f \in Mor\,(A, A)$ a la propriété de point fixe si $\exists\, g\colon B \to A$ tel que $fg = g$.

DÉFINITION 2.2. (Lavwere [5]). Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à objet final et $A \in$ ob $\mathcal{C}$. Le morphisme $f \in Mor\,(A, A)$ a la propriété du point fixe si $\exists\, g\colon 1 \to A$ tel que $fg = g$.

DÉFINITION 2.3. Soit $\mathcal{C}'$ une sous-catégorie d'une catégorie ordonnée $\mathcal{C}$, dont les ensembles de morphismes sont désignés par *Mors* et telle que chaque objet de $\mathcal{C}$ soit un objet de $\mathcal{C}'$. Supposons que $(\mathcal{C}, \subset, \mathcal{C}')$ est une catégorie avec approximation (voir [1]). Le morphisme $f \in Mor\,(A, A)$ a la propriété du point fixe si $\exists\, g \in Mors\,(B, A)$ tel que $fg \subset f$.

Il est clair que (Déf. 2.2) $\Rightarrow$ (Déf. 2.1). L'affirmation reciproque n'est pas vraie en général. Mentionnons :

PROPOSITION 2.1. Si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec objet final et $Mor\,(1, A) \neq \emptyset$, $\forall A \in$ ob $\mathcal{C}$ alors (def. 2.1) $\Leftrightarrow$ (déf. 2.2).

Démonstration. Si $f \in Mor\,(A, A)$ est un morphisme avec la propriété du point fixe dans le sens de la définition 2.1, alors il existe $g\colon B \to A$, tel que $fg = g$. Soit $h \in Mor\,(1, B)$. Nous avons

$$f(gh) = (fg)h = gh$$

donc on a la définition 2.2.

Pour illustrer la définition 2.3 nous donnons l'exemple suivant:

Exemple. 2.1. Soit $\mathcal{C}' = Ens$, $ob\, \mathcal{C} = obEns$, et $Mor\,(A, B) = \{f\colon A \to P(B)\ f(a) \neq \varphi,\ \forall a \in A\}$. Si $f, g \in Mor\,(A, B)$, alors $(f \subset g) \Leftrightarrow (f(a) \subset g(a),\ \forall a \in A)$. Dans ce cas la définition 2.3. revient à la définition usuelle d'une application multivoque à point fixe.

Remarque. 2.1. Si $\mathcal{C} = Ens$ les définitions 2.1 et 2.2 reviennent à la définition usuelle d'une application à point fixe. L'exemple suivant montre qu'il existe quand même une différence entre la notion catégoriale de „morphisme avec la propriété du point fixe" et la notion non-catégoriale de „morphisme avec point fixe" définie dans une catégorie structurée [6].

Exemple 2.2. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie formée par un seul objet $A = \{1, 2, 3\}$ et *où* $Mor\ (A,A)$ est l'ensemble des applications bijectives de A sur A. Le morphisme $f = \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{Bmatrix}$ a dans le sens de la définition [6] un point fixe, à savoir 1, mais n'a pas la propriété du point fixe catégorial.

2. Dans ce qui suit, un morphisme ayant la propriété du point fixe sera compris au sens de la définition 2.1.

Un objet A de la catégorie $\mathcal{C}$ a la propriété de point fixe si tout morphisme $f \in Mor\ (A, A)$ a la propriété de point fixe.

Si $\mathcal{C} = Ens$ et $f \in Mor\ (A, A)$, alors

$$Fix\ (f) = \{x \in A \mid f(x) = x\}$$

On veut définir cette notion dans une catégorie quelconque

DÉFINITION 2.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $f \in Mor\ (A, A)$. Par le sous-objet fixe de f on comprend le noyau de $(f,\ 1_A)$, noté

$$Fix\ (f) = Ker\ (f,\ 1_A)$$

Une catégorie telle que $Fix\ (f)$ existe pour tout f ayant la propriété du point fixe s'appellera catégorie à sous-objets fixes.

On prouve sans difficulté :

PROPOSITION 2.2.

(i) Tout foncteur covariant conserve la propriété de point fixe des morphismes.

(ii) Si $f : X \to Y$, est un morphisme sectionnable et X a la propriété de point fixe, alors Y a aussi la propriété de point fixe.

(iii) Tout foncteur cofidèle conserve la propriété de point fixe des objets.

(iv) Soit $\mathcal{C}$ une catégorie à sous-objets fixes et F: $\mathcal{C} \to \mathfrak{D}$ un foncteur covariant. Si F est fidèle, cofidèle et surjectif, alors

$$F(Fix(f)) = Fix(F(f)).$$

(Manuscrit reçu le 15 septembre 1971)

BIBLIOGRAPHIE

1. Bertin, E. M. J., *Limites projectives et approximation*, „Compositio Mathematica", **23** (**1971**), 357—378.
2. Holsztynski, W., *Universal mapping and fixed point theorems*, „Bull. Acad. Pol. Sc.", **15** (**1967**), 433—438.
3. Lavwere, W., *Diagonal arguments in closed cartezian category*, (preprint).
4. Rus, A. I., *Quelques remarques sur la théorie du point fixe* (*I*), „Stud. Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mec.", **XVI**, (1971) 2, pp. 5—8.

CÎTEVA OBSERVAŢII ASUPRA TEORIEI PUNCTULUI FIX (II)

(Rezumat)

În această parte a lucrării se definesc într-o categorie noţiunile de: Morfism cu proprietatea de punct fix şi subobiect fix al unui morfism cu proprietatea de punct fix. În propoziţia 1 se dau condiţii în care definiţia lui Holsztynski este echivalentă cu definiţia lui Lavwere. În propoziţia 2 se stabilesc cîteva proprietăţi simple ale noţiunilor definite.

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ТЕОРИИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ (II)

(Резюме)

В этой части работы определены в одной категории понятия: морфизм со свойством неподвижной точки и неподвижный субобъект одного морфизма со свойством неподвижной точки. В предложении 1 даны условия, при которых определение Holsztynski эквивалентно определению Lavwere. В предложении 2 установлено несколько простых свойств определённых понятий.

SUR UNE FORMULE DE H. W. GOULD

GH. PIC

1. H. W. Gould [1] a montré que l'égalité

$$\binom{2n}{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{2n+1}{2j+1}\binom{n}{j}\binom{2j}{j}^{-1}(-3)^{j}=\sum_{j=0}^{n}\binom{2j}{j}$$

est une conséquence de l'égalité

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n+1}{j+1}x^{n-j}(1-x)^{j-k}=\sum_{j=k}^{n}\binom{j}{k}x^{j-k} \tag{1}$$

D'autres auteurs ont trouvé des égalités semblables. Ainsi W. C. Guenther [2] a montré que

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n}{j}(1-x)^{n-j}x^{j}=\sum_{j=k}^{n}\binom{j-1}{k-1}(1-x)^{j-k}x^{k}$$

H. W. Gould a observé que sa méthode a un caractère général et qu'elle a été utilisée pour sommer une grande varieté de séries. Il a montré en même temps que la valabilité de ces égalités est beaucoup plus étendue. Ainsi par exemple on montre que pour a réel on a

$$\sum_{j=k}^{n}\binom{n-a+1}{j-a+1}(1-x)^{n-j}x^{j}=\sum_{j=k}^{n}\binom{j-a}{k-a}(1-x)^{j-k}x^{k}$$

Dans ce qui suit nous nous proposons de montrer que la valabilité de la méthode et des résultats de H. W. Gould est encore plus étendue en établissant une égalité qui dans un cas particulier donne l'égalité de H. W. Gould. Cette généralisation a un domaine d'applicabilité assez étendu et peut conduire à la généralisation des fonctions étudiées en analyse classique.

2. Soit $\lambda \neq 0$ un nombre réel et

$$[n]! = (\lambda^{n}-1)(\lambda^{n-1}-1)\ \ldots\ (\lambda-1)$$

et

$$N_n^k = \frac{(\lambda^n - 1)(\lambda^{n-1} - 1) \dots (\lambda^{n-k+1} - 1)}{(\lambda^k - 1)(\lambda^{k-1} - 1) \dots (\lambda - 1)} = \frac{[n]!}{[k]!\,[n-k]!} \tag{2}$$

Ces nombres ont été introduits, si λ est un nombre premier, par P. H a l l [3]. Ils donnent le nombre des sous-groupes des groupes abéliens élémentaires. Ils ont été utilisés par nous [4] pour généraliser un théorème de P. T u r à n.

On montre aisément que

$$\lim_{\lambda \to 1} N_n^k = \binom{n}{k}$$

La formule (2) nous donne

$$N_n^k = N_n^{n-k} \tag{3}$$

et

$$N_{n+1}^q = \lambda^k N_n^k + N_n^{-1} \tag{4}$$

Elle nous donne la possibilité de démontrer par induction la généralisation suivante de la formule de binome

$$B_n^{(\lambda)}(x) = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - \lambda^i x) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \lambda^{\binom{i}{2}} N_n^i x^i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \lambda^{\binom{n-i}{2}} N_n^i x^{n-i}$$

(4) est généralisé par

$$N_{r+t}^k = \sum_{s=0}^{k} \lambda^{(k-s)(k-s)} N_r^s N_t^{k-s}$$

et en posant $h = k$

$$N_{r+t}^k = \sum_{s=0}^{k} \lambda^{(h-s)(k-s)} N_s^r N_t^{k-d} \tag{5}$$

De (2) on peut aussi déduire que

$$N_{-n}^k = (-1)^k \lambda^{-nk - \binom{k}{2}} N_{n+k-1}^k \tag{6}$$

3. Pour pouvoir généraliser (1) on doit remplacer $\binom{n+1}{j+1}$ par N_{n+1}^{j+1} multiplié par un facteur de correction. Puis on substitue à $(1-x)^{j-k}$ non pas son expression donnée par la formule du binôme généralisée, mais par $\sum_{s=0}^{j-k} (-1)^{j-k-s} N_{j-k}^s x^{j-k-1}$ qui devient la formule classique du binôme pour $\lambda = 1$. Ainsi nous nous proposons de calculer

$$\sum_{=k}^{n} \lambda^{\binom{j}{2} + (k-2n)j} N_{n+1}^{j+1} x^{n-j} \sum_{s=0}^{j-k} (-1)^{j-k-s} N_{j-k}^s x^{j-k-s}.$$

La substitution de $k + s = t$ donne

$$\sum_{j=k}^{n} \lambda^{\binom{j}{2}+(k-2n)j} N_{n+1}^{j+1} x^{n-j} \sum_{t=k}^{j} (-1)^{j-t} N_{j-k}^{t-k} x^{j-t}$$

et en changeant l'ordre de la sommation et utilisant (3)

$$\sum_{t=k}^{n} \sum_{j=t}^{n} (-1)^{j-t} \lambda^{\binom{j}{2}+(k-2n)j} N_{n+1}^{j+1} N_{j-k}^{t-k} x^{n-t} =$$

$$= \sum_{t=k}^{n} \sum_{j=t}^{n} (-1)^{j-t} \lambda^{\binom{j}{2}+(k-2n)j} N_{n+1}^{j+1} N_{t-k}^{j-t} x^{n-t}$$

En utilisant (6) on déduit

$$\sum_{t=k}^{n} \sum_{j=t}^{n} \lambda^{\binom{j}{2}+(k-2n)j+(j-k)(j-t)-\binom{j-t}{2}} N_{n+1}^{j+1} N_{k-t-1}^{j-t} x^{n-t}$$

et mettant $j - t = i$

$$\sum_{t=h}^{n} \sum_{i=0}^{n-t} \lambda^{\binom{i+t}{2}+(k-2n)(t+i)+i(i+t-k)-\binom{i}{2}} N_{n+1}^{t+i+1} N_{k-t-1}^{i} x^{n-t} =$$

$$= \sum_{t=k}^{n} \sum_{i=0}^{n-t} \lambda^{\binom{i+t}{2}+(k-2n)(t+i)y+i(i+t-k)-\binom{i}{2}} N_{n+1}^{n-t-i} N_{k-t-1}^{i} x^{n-t} =$$

$$= \sum_{t=k}^{n} x^{n-t} \sum_{i=0}^{n-t} \lambda^{(n-t-i)^2-\binom{t+1}{2}+kt-n^2} N_{n+1}^{n-t-i} N_{k-t-1}^{i}$$

En utilisant (5) nous aurons

$$\sum_{t=k}^{n} x^{n-t} \lambda^{-\binom{t+1}{2}+kt-n^2} N_{n+k-t}^{n-t}$$

et en utilisant encore une fois (2) nous obtenons la généralisation suivante de (1)

$$\sum_{j=k}^{n} \lambda^{\binom{j}{2}+(k-2n)j} N_{n+1}^{j+1} x^{n-j} \sum_{s=0}^{j-k} (-1)^{j-k-s} N_{j-k}^{s} x^{j-k-s} =$$

$$= \lambda^{-n^2} \sum_{s=k}^{n} \lambda^{-\binom{s+1}{2}+ks} N_{n+k-s}^{k} x^{n-s} = \lambda^{-n^2} \sum_{s=k}^{n} \lambda^{-\binom{n+k-s}{2}+k(n+k-t)} N_{s}^{k} x^{n-s}$$

Nous terminons en observant que, ainsi que l'a fait H. W. Gould, on peut démontrer la valabilité de cette égalité si l'on remplace N_{n+1}^{j+1} par N_{n-a+1}^{j-a+1} pour a quelconque.

(Manuscrit reçu le 10 janvier 1972)

BIBLIOGRAPHIE

1. G o u l d, H. W., *Invariance and other simple techniques as a genesis of binomial identities*, „Nieuw Archief voor Wiskunde", **17**, pp. 214–218 (1969).
2. G u e n t h e r, W. C., *Remarks on Problem E* 1829, „Amer. Math. Monthly", **74**, pp. 1134–35 (1967).
3. H a l l, P., *A contribution to the theory of groups of prime power order*, „Proc. of the London Math. Soc.", **36**, pp. 29–95 (1934).
4. P i c, G., *Despre o formulă de combinatorică*, „Stud. Univ. Babeş-Bolyai, ser. Mat.-Phys.", **X**, 2, pp. 7–16, 1965.

ASUPRA UNEI FORMULE A LUI H. W. GOULD

(R e z u m a t)

Se arată că o formulă de combinatorică dată de H. W. Gould în [1] are o valabilitate mult mai largă şi anume subzistă şi dacă înlocuim $\binom{n}{m}$ cu

$$N_n^m = \frac{(\lambda^n - 1)(\lambda^{n-1} - 1) \ldots (\lambda^{n-m+1} - 1)}{(\lambda^m - 1)(\lambda^{m-1} - 1) \ldots (\lambda - 1)}$$

introdusă de autor în (2) unde λ este un număr real. Se remarcă

$$\lim_{\lambda\to 1} N_n^m = \binom{n}{m}.$$

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ H. W. GOULD

(Р е з ю м е)

Показано, что одна формула комбинаторики, данная H. W. Gould в [1], имеет более широкое применение, а именно она верна, и если подставить вместо $\binom{n}{m}$ выражение

$$N_n^m = \frac{(\lambda^n - 1)(\lambda^{n-1} - 1) \ldots (\lambda^{n-m+1} - 1)}{(\lambda^m - 1)(\lambda^{m-1} - 1) \ldots (\lambda - 1)}$$

введенное автором в [9], где λ — вещественное число. Отмечается

$$\lim_{\lambda\to 1} N_n^m = \binom{n}{m}.$$

UNIVERSAL RANGE SPACES AND FUNCTION SPACE TOPOLOGIES

M. F. FLYNN

Let Y and Z be topological spaces, and let Z^Y be the space of all continuous functions from Y into Z. If X is some arbitrary space, consider the following functions.

Let $f: X \times Y \to Z$ and define the associate map $\hat{f}: X \to Z^Y$ by $(\hat{f}(x))(y) = f(x, y)$. We note that, unless f is continuous in y for each fixed x, the mapping $\hat{f}$ may not exist. A topology on Z^Y is called conjoining if whenever $\hat{f}$ is continuous then f is continuous in both variables; and it is called splitting if whenever f is continuous in both variables, then $\hat{f}$ is continuous.

Of particular interest are those topologies which are both conjoining and splitting. It is well known that, if Y is Hausdorff and locally compact, then the compact-open topology fills this role. However, numerous examples exist which show that, if Y is not regular, the compact-open topology is not the only such topology; nor, in general, is local compactness a sufficient condition.

We present in Theorem 1 a necessary and sufficient condition for a topology t_z to be conjoining and splitting on a function space Z^Y, where Y is fixed and Z is any arbitrary member of some class of spaces. In Theorem 2, restricting ourselves to the set-open topologies of [1], we discover what properties the space Y must have in order for a conjoining and splitting topology to exist.

DEFINITION 1: A space U is called the *universal space* for a class C if U is in C and every member of C is obtainable as a subspace of a product of U.

Let $(\pi_\alpha Z_\alpha)^Y$ be the reduced product described by Čech [2; p. 293].

LEMMA 1: *If a topology is conjoining and splitting on Z_α^Y for each α, then the product topology is conjoining and splitting on $(\pi_\alpha Z_\alpha)$.*

Proof: Corresponding to the projection map $p_\alpha : \pi_\alpha Z_\alpha \to Z_\alpha$, there is a mapping which we will call the *functional projection* n_α: $(\pi_\alpha Z_\alpha)^Y \to Z_\alpha^Y$, defined as follows.

Let $h^* \in (\overset{\pi}{\alpha} Z_\alpha)^Y$, then $n_\alpha\ (h^*) = \rho_\alpha\ h^*$. Define the maps $p_Y : Z_\alpha^Y \rightarrow Z_\alpha$ by $p_Y(h) = h(y)$ and $p_Y^* : (\overset{\pi}{\alpha} Z_\alpha)^Y \rightarrow \overset{\pi}{\alpha} Z_\alpha$ by $p_Y^*\ (h^*) = h^*(y)$. The maps $p_Y$and p_Y^* are continuous whenever the function space topologies are finer than the point-open topology. Also, $p_Y n_\alpha = \rho_\alpha p_Y^*$; so that n_α is continuous if and only if ρ_α is continuous.

Now let $g : X \times Y \rightarrow \overset{\pi}{\alpha} Z_\alpha$ and $\hat{g} : X \rightarrow (\overset{\pi}{\alpha} Z_\alpha)^Y$ be associates; and define the following maps.

$f_\alpha : X \times Y \rightarrow Z_\alpha$ by $f_\alpha = \rho_\alpha g$ and $\hat{f}_\alpha : X \rightarrow Z_\alpha^Y$ by $\hat{f}_\alpha = n_\alpha \hat{g}$.

Certainly f_α (resp. $\hat{f}_\alpha$) is continuous if and only if g (resp. $\hat{g}$) is continuous. Furthermore, the $\hat{f}_\alpha$ so defined are in fact the associates of the f_α, as can be easily verified. By assumption, f_α is continuous for all α if and only if $\hat{f}_\alpha$ is continuous. Thus g is continuous if and only if $\hat{g}$ is continuous.

Lemma 2 : *Let $B \subset Z$. Then B^Y is a subset of Z^Y. If a topology is conjoining and splitting on Z^Y, then the subspace topology is conjoining and splitting on B^Y.*

Proof: For every function $g : X \times Y \rightarrow B$, there is a function $f : X \times \times Y \rightarrow Z$ defined by $f = i_B g$, where $i_B : B \rightarrow Z$ is the inclusion map. Similarly, for $\hat{g} : X \rightarrow B^Y$, we define $\hat{f} : X \rightarrow Z^Y$ by $\hat{f} = i_B Y \hat{g}$, where $i_B Y : B^Y \rightarrow Z^Y$ is the inclusion map. The $\hat{f}$ defined in this way is the associate of f. By assumption, the continuity of f and $\hat{f}$ are equivalent, and thus g is continuous if and only if $\hat{g}$ is continuous.

Let U be the universal space of some class C. A topology u on U^Y gives rise to a family of topologies $\{t_z\}$ in a natural way. For each Z in C, let t_z be the topology obtained by considering Z^Y as a subspace of a product of U^Y, where U^Y has the topology u.

Definition 2: Let $\{t_Z\}$ and u be as described above. Then u is called the *representative* of the family $\{t_Z\}$.

Then, combining the two lemmas, we have the following theorem.

Theorem 1 : *Let Y be fixed and let U be the universal space of some class C. Then the representative u of the family $\{t_Z\}$ is conjoining and splitting on U^Y if and only if each t_Z is conjoining and splitting for Z^Y, where Z runs through the class C.*

In other words, every function space in a class C^Y has a conjoining and splitting topology if and only if the universal function space U^Y has a conjoining and splitting topology. Furthermore, these topologies on the various Z^Y are obtained in a natural way from the topology of U^Y. We note that, if u is a set-open topology, then each t_Z is also a set-open topology generated by the same family of subsets of Y. Let us call the set-open topologies on two function spaces Z_1^Y and Z_2^Y *analogous* if they are obtained from the same family of subsets of Y. Then, for set-open topologies, the topologies $\{t_Z\}$ and u are analogous.

It is natural at this point to investigate the space Y. Let C be a class of spaces and let U be the universal space of that class. We ask for what conditions on Y there exists a conjoining and splitting topology on U^Y. In view of Theorem 1, we then have topologies which are conjoining and splitting for each Z^Y, where Z is in C. For set-open topologies, these are all analogous.

Let T be the class of all topological spaces and let S be the Sierpinski space.

THEOREM 2: *For set-open topologies, the following are equivalent:*

1. *There exist analogous topologies which are conjoining and splitting on each Z^Y, where Z is any topological space.*

2. *There exists a conjoining and splitting topology on S^Y.*

3. *The compact-open topology is conjoining (and hence conjoining and splitting) on S^Y.*

4. *For each $y \in Y$ and $V \in N(y)$, there exist sets K, $W \subset V$ such that K is compact, $W \in N(y)$, and W is a subset of every open set containing K.*

5. *Y is locally fully compact. (A compact set is fully compact if it is equal to the intersection of all its open supersets.)*

The proof of each of the implications is either trivial or the straightforward application of known theorems. Note that, if a topology is conjoining and splitting on S^Y then it is conjoining and splitting on P^Y, where P is the universal space for the class T exhibited by Čech [2; Thm.17 C. 18].

Note that if Y is a T_1 — space, then condition 5. becomes Y is locally compact; and if Y is a T_2-space, 5. becomes Y is Hausdorff and locally compact, which implies regularity. According to [1; Thm 6.25)] in the case of Y regular, the compact-open topology is the only topology which may be conjoining and splitting, and we may drop our restriction to set-open topologies.

Evidently, the compact-open topology is the only set-open topology which may be conjoining and splitting on *every* function space with an arbitrary range space Z. That there may be other conjoining and splitting topologies for other classes of range spaces may be seen by examining [1; Thm. 6.21]. The space Y is not locally fully compact and the space Z is the unit interval. The compact-open topology is not conjoining and splitting, but the H-closed-open topology is.

We state a few unanswered questions.

QUESTION 1: For differing conditions on Y, we have seen that either the compact-open of the H-closed-open topology may be conjoining and splitting. For each class C_Λ^{of} range spaces, is there a finest representative topology on U^Y which is conjoining and splitting?

QUESTION 2. Can theorems similar to Theorem 2 be formulated for other classes of range spaces?

(Received June 2, 1972)

REFERENCES

1. Arens, Richard and Dugundji, James, *Topologies for function spaces*, „Pacific J. Math.", **1** (1951), pp. 5–32.
2. Cech, Eduard, *Topological Spaces*, (rev. Z. Frolik and M. Katetov), John Wiley and Sons Ltd., London, 1966.
3. Wilker, Peter, *Adjoint product and Hom functors in general topology*, „Pacific J. Math.", **34** (1970), pp. 264–283.

SPAŢII UNIVERSALE DE VALORI ŞI TOPOLOGII DE SPAŢII DE FUNCŢII

(Rezumat)

Fiind date spaţiile topologice X, Y, Z şi aplicaţia $f: X \times Y \to Z$, lui f i se asociază transformarea $\hat{f}: X \to Z^Y$ definită de

$$(f(x))(y) = f(x, y).$$

În lucrare se studiază legătura dintre continuitatea lui f şi a lui $\hat{f}$.

УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ЗНАЧЕНИЙ И ТОПОЛОГИЙ ПРОСТРАНСТВ ФУНКЦИЙ

(Резюме)

Будучи даны топологические пространства X, Y, Z и отображение $f: X \times Y \to Z$, к f присоединяется преобразование $\hat{f}: X \to Z^Y$ определяемое

$$(f(x))(y) = f(x, y).$$

В работе изучается связь между непрерывностью f и $\hat{f}$.

HOMOMORPHICALLY CLOSED SEMISIMPLE CLASSES*

RICHARD WIEGANDT

1. Preliminaries. In the following all rings considered will be associative. Following *Divinsky* [4] a nonempty class $\mathfrak{R}$ of rings is a radical class in the sense of Kurosh — Amitsur, if

(A) $\mathfrak{R}$ is homomorphically closed;

(B) Every ring A has an ideal $\mathfrak{R}(A)$ such that it contains every $\mathfrak{R}$ ideal of A;

(C) The only $\mathfrak{R}$-ideal of the factor ring $A/\mathfrak{R}(A)$ is the zero ideal.

The ideal $\mathfrak{R}(A)$ is called the $\mathfrak{R}$-radical of A.

A class $\mathfrak{S}$ of rings is called a semisimple class, if

(D) Every non-zero ideal of an $\mathfrak{S}$-ring has a non-zero homomorphic image in $\mathfrak{S}$;

(E) If every non-zero ideal of a ring A has a non-zero homomorphic image in $\mathfrak{S}$ then A is an $\mathfrak{S}$-ring.

Kurosh [5] has shown that the rings having zero $\mathfrak{R}$-radical form a semisimple class, and the semisimple classes are closed under subdirect sums. Anderson-Divinsky-Sulinski [1] have proved that the semisimple classes are hereditary. The rings which cannot be mapped homomorphically on any non-zero ring of a semisimple class $\mathfrak{S}$, form a radical class, the so called upper radical class of $\mathfrak{S}$. For related concepts and results we refer to Divinsky [4].

In [2] Andrunakievic has treated semisimple rings whose homomorphic images are again semisimple, such semisimple rings were called strongly semisimple rings. Strongly semisimple rings were investigated by Szàsz [7], [8]. Homomorphically closed semisimple classes occurred in [9] and in the papers [3], [6], [10]. Armenderiz, Stewart and author have dealt with radical semisimple classes, which are homomorphically closed semisimple classes. In the following we shall determine all the homomorphically closed semisimple classes. It turns out that none of

* This paper was written while the author was visiting at the University of Islamabad supported by UNESCO—UNDP Special Fund Project PAK—47.

the semisimple classes belonging to well-known concrete radical classes, is homomorphically closed.

2. Homomorphically closed semisimple classes. Following Stewart [6], a class $\mathfrak{C}$ of rings is called strongly hereditary, if every subring of a $\mathfrak{C}$-ring is again a $\mathfrak{C}$-ring, and a ring A is said to be a $\mathfrak{B}$-ring, is for each $x \in A$ the subring $[x]$ generated by the element x satisfies $[x] = {}_1[sx]^2$. By Corollary 3, 5 of [6] a ring A is a $\mathfrak{B}$-ring if and only if for each $x \in A$ there exists an integer $n(x) \geq 2$ such that $x^{n(x)} = x$.

Let $n \geq 2$ be an integer, and define the class $\mathfrak{K}_n$ of rings as follows. A ring A is $\mathfrak{K}_n$-ring if and only if $x^n = x$ holds for each element $x \in A$. The following theorem shows us that the classes $\mathfrak{K}_n$ are all the non-trivial homomorphically closed semisimple classes.

THEOREM. *The homomorphically closed semisimple classes are the classes $\mathfrak{K}_n$ for $n \geq 2$, and the class $\mathfrak{A}$ consisting of all rings.*

COROLLARY 1. *The classes $\mathfrak{K}_n$ $(n \geq 2)$and $\mathfrak{A}$ are all the radical semisimple classes.*

COROLLARY 2. *A semisimple class is a radical class if and only if it is homomorphically closed.*

COROLLARY 3. *The upper radical class of a homomorphically closed semisimple class is hereditary.*

In [10] Theorem 2 asserts that the classes $\mathfrak{K}_n$ are semisimple radical classes. According to Theorem 1 of [10], a semisimple class is a radical class if and only if it is homomorphically closed and its upper radical is hereditary. Corollary 2 is a sharpening of this result. By Theorem 1 and 2 of [10] all the corollaries are immediate consequences of the Theorem. It was shown by F. Szàsz [8], that the classes $\mathfrak{K}_n$ are homomorphically closed semisimple classes. The Theorem sharpens this result.

3. The proof of the Theorem. We shall prove the Theorem by six propositions.

PROPOSITION 1. A homormorphically closed semisimple class is strongly hereditary.

Since the semisimple classes are closed under subdirect sums, so the statement is exactly that of Lemma 4,1 in [6].

PROPOSITION 2. If $\mathfrak{S}$ is a homomorphically closed semisimple class and $\mathfrak{S} \not\subset \mathfrak{B}$ then $\mathfrak{S}$ contains all the nilpotent rings.

Let us consider a ring $A \in \mathfrak{S}$ with $A \notin \mathfrak{B}$. By definition of $\mathfrak{B}$-rings, there exists an element $x \in A$ such that $[x] \neq [x]^2$. By Proposition 1 $A \in \mathfrak{S}$ implies $[x] \in \mathfrak{S}$, further, clearly, $[x]^2$ is an ideal of $[x]$. Since $\mathfrak{S}$ is homomomorphically closed, therefore the zero-ring $[x]/[x]^2$ on a cyclic group belongs to $\mathfrak{S}$, moreover by condition (E) also the zero-ring on the infinite cyclic group is in $\mathfrak{S}$. Since $\mathfrak{S}$ is homomorphically closed, so also the zero-rings on all $\mathfrak{S}$ cyclic groups are contained in $\mathfrak{S}$.

Let Z be an arbitrary zero-ring. The additive group Z^+ of Z is an abelian group, and so it is a subdirect sum of subdirectly irreducible abelian groups, i.e. of finite cyclic groups. Since the zero-rings on cyclic groups are in $\mathfrak{S}$ and $\mathfrak{S}$ is closed under subdirect sums, therefore $\mathfrak{S}$ contains all the zero-rings.

Let A be a nilpotent ring, and n the minimal natural number with $A^n = 0$. If $n = 2$, then A, as a zero-ring, belongs to $\mathbb{S}$. Suppose $n \geqslant 3$. By the minimality of n we have $A^{n-1} \neq 0$, so there are elements $a_1, \ldots, a_{n-2} \in A$ such that $a_1 a_2 \ldots a_{n-2} a_{n-1} \neq 0$. Consider $c = a_1 \ldots a_{n-2} \neq 0$. We show that the correspondence $\varphi(x) = cx$ is a non-zero homomorphism of A. Obviously, for any x, $Y \in A$ we have

$$\varphi(x + y) = c(x + y) = cx + cy = \varphi(x) + \varphi(y),$$

moreover

$$\varphi(xy) = c(xy) = a_1 \ldots a_{n-1} \, xy = 0,$$

and

$$\varphi(x)\varphi(y) = cx \; cy = a_1 \ldots a_{n-1} x a_1 \ldots a_{n-1} \, y = 0$$

because every product of at least n factors is 0.
The homomorphism φ is not zero, since

$$(a_{n-1}) = ca_{n-1} = a_1 \ldots a_{n-2} a_{n-1} \neq 0.$$

Thus A can be mapped by a non-zero homomorphism onto a zero-ring, that is onto a ring belonging to $\mathbb{S}$. Since every ideal of a nilpotent ring is also nilpotent, so by condition (E) we obtain $A \varepsilon \mathbb{S}$. Thus Proposition 2 is proved.

PROPOSITION 3. If the class $\mathbb{S}$ of rings is closed under homomorphisms, extensions and subdirect sums, and it contains all nilpotent rings, then $\mathbb{S}$ consists of all rings.

The proof is the same as that of Theorem 4,4 in [3].

PROPOSITION 4. If $\mathbb{S} \not\subset \mathfrak{B}$ is a homomorphically closed semisimple class, then $\mathbb{S}$ consists of all rings.

This statement is an immediate consequence of Propositions 2 and 3.

PROPOSITION 5. If $\mathbb{S} \subseteq \mathfrak{B}$ is a homomorphically closed semisimple class, then there is a strongly hereditary finite set $\mathbb{S}(F)$ of finite fields such that $A \in \mathbb{S}$ if and only if A is isomorphic to a subdirect sum of fields in $\mathbb{S}(F)$.

The proof is the same as that of the part (1) $\Rightarrow$ (2) of Theorem 4,3 in [6].

PROPOSITION 6. If $\mathbb{S} \subseteq \mathfrak{B}$ is a homomorphically closed semisimple class, then $\mathbb{S}$ coincides with a class $\mathcal{K}_n$.

By Proposition 5 there exists a strongly hereditary finite set $\mathbb{S}(F)$ of finite fields such that the rings of $\mathbb{S}$ are exactly the subdirect sums of fields in $\mathbb{S}(F)$. The orders of the fields of $\mathbb{S}(F)$ are prime powers

$$p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{\alpha_1}, \ldots, p_k, p_k^2 \ldots, p_k^{\alpha_k}.$$

and clearly

$$n = (p_1^{\alpha_1} - 1) \ldots (p_k^{\alpha_k} - 1) + 1$$

is the least integer $\geqslant 2$ such that $x^n = x$, for each $x \in F \in \mathbb{S}(F)$ Since the elements of $\mathbb{S}$ are subdirect sums of fields in $\mathbb{S}(F)$, so we have $\mathbb{S} \leqslant \mathcal{K}_n$.

As it was shown by Theorem 2 in [9], $\mathcal{K}_n$ is a radical semisimple class, so by [6] Theorem 4, 3 there exists a strongly hereditary finite set $\mathcal{K}_n(F)$ of finite fields such that the rings of $\mathcal{K}_n$ are exactly the subdirect sums of fields from $\mathcal{K}_n(F)$. Hence $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{K}_n$ implies $\mathcal{S}(F) \subseteq \mathcal{K}_n(F)$, but by the construction of n also $\mathcal{S}(F) = \mathcal{K}_n(F)$ holds. Thus $\mathcal{S} = \mathcal{K}_n$ is valid, and the assertion is proved.

The statement of the Theorem follows immediately from Propositions 4 and 6.

(Received April 13, 1971)

REFERENCES

1. Anderson, T., Divinsky, N. and Sulinski, A., *Hereditary radicals in associative and alternative rings*, „Canad. J. Math.", **17** (1965), 594–603.
2. Andrunakievič, V. A., *Radicals in associative rings*, „Mat. Sb.", **44** (1958), 179–212.
3. Armendariz, E. P., *Closure properties in radical theory*, „Pacif. J. Math.", **26** (1968), 1–8.
4. Divinsky, N., *Rings and radicals*, Univ. of Toronto Press, 1965.
5. Kurosh, A. G., *Radicals of rings and algebras*, „Mat. Sb.", **33** (1953), 13–26.
6. Stewart, P. N., *Semi-simple radical classes*, „Pacif. J. Math.", **32** (1970), 249–254.
7. Szász, F., *Ein radikal theoretischer Vereinigungsendomomorphismus des Idealverbandes der Ringe*, „Annales Univ. Sci. Budapest", **12** (1969), 73–75.
8. Szász, F., *Beiträge zur Radikaltheorie der Ringe*, Publ. Math. Debrecen.
9. Szász, F., Wiegandt, R., *On the duality of radical and semisimple objects*, „Acta Math. Acad. Sci. Hung.", **21** (1970), 175–182.
10. Wiegandt, R., *Radical semisimple classes*, „Periodica Math. Hung." (to appear).

CLASE SEMISIMPLE OMOMORFIC ÎNCHISE

(Rezumat)

În acest articol dăm în mod explicit toate clasele semisimple omomorfic închise. Rezultă că acestea sînt chiar clasele radical semisimple.

ГОМОМОРФИЧЕСКИ ЗАМКНУТЫЕ ПОЛУПРОСТЫЕ КЛАССЫ

(Резюме)

В статье даны явно все гомоморфически замкнутые полупростые классы. Следует, что они суть как раз радикально полупростые классы.

APLICAŢII O-SEMICONTINUE

D. BORŞAN

1. Noţiunea de semicontinuitate, introdusă de R. Baire [1] pentru funcţii reale, se generalizează imediat la cazul aplicaţiilor cu valori într-o latice completă.

În cele ce urmează se consideră aplicaţii definite pe un spaţiu topologic X şi cu valori într-o latice completă Y. În lucrare se studiază proprietăţile funcţiilor o-semicontinue (semicontinue în raport cu ordonarea din Y) şi se compară o-continuitatea cu continuitatea în raport cu anumite topologii de tip special — definite pe Y — cu ajutorul relaţiei de ordonare parţială.

2. Fie $f: X \to Y$, unde X este un spaţiu topologic, iar Y o latice completă în raport cu o relaţie de ordonare parţială „ $\leqslant$ ".

Pentru $x_0 \in X$, punem

$$\bar{f}(x_0) = \inf_{V \in \mathcal{V}_{x_0}} \{\sup_{x \in V}\{f(x)\}\} \quad \text{şi} \quad \underline{f}(x_0) = \sup_{V \in \mathcal{V}_{x_0}} \{\inf_{x \in V}\{f(x)\}\}$$

V fiind o vecinătate a punctului x_0, iar $\mathcal{V}_{x_0}$, filtrul vecinătăţilor punctului x_0.

În general avem $\underline{f}(x_0) \leqslant f(x_0) \leqslant \bar{f}(x_0)$. În acest mod, ataşăm funcţiei f două aplicaţii $\bar{f}$ şi $\underline{f}$, definite şi ele pe X şi cu valori în Y.

$\bar{f}(x_0)$ şi $\underline{f}(x_0)$ pot fi reprezentate şi ca o — limite (limite în raport cu convergenţa ordonării [8]) a unor şiruri generalizate de elemente din Y. Notînd $\bar{f}_V(x_0) = \sup_{x \in V} \{f(x)\}$ şi $\underline{f}_V(x_0) = \inf_{x \in V} \{f(x)\}$, $(\bar{f}_V(x_0))_{V \in \mathcal{V}_{x_0}}$ şi $(\underline{f}_V(x_0))_{V \in \mathcal{V}_{x_0}}$ sînt şiruri generalizate de elemente din Y, deoarece mulţimea $\mathcal{V}_{x_0}$ este filtrantă superior în raport cu relaţia „ $\dashv$ ", definită prin: $V \dashv U \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} U \subset V$ unde $V, U \in \mathcal{V}_{x_0}$. Mai mult, avem

$$V \dashv U \Rightarrow \bar{f}_U(x_0) \leqslant \bar{f}_V(x_0) \quad \text{şi} \quad \underline{f}_V(x_0) \leqslant \underline{f}_U(x_0)$$

deci cele două şiruri sînt monotone: primul necrescător şi al doilea nedescrescător.

Se cunoaşte atunci, în teoria o-convergenţei, că

$$\overline{f}_V(x_0) \xrightarrow{0} \inf_{V\in\mathcal{V}_{x_0}} \{\overline{f}_V(x_0)\} \text{ şi } \underline{f}_V(x_0) \xrightarrow{0} \sup_{V\in\mathcal{V}_{x_0}} \{\underline{f}_V(x_0)\}$$

Putem scrie, prin urmare:

$$\overline{f}(x_0) = o\text{-}lim\ \overline{f}_V(x_0) \text{ şi } \underline{f}(x_0) = o\text{-}lim\ \underline{f}_V(x_0)$$

Definiţia 2.1. Aplicaţia $f: X \to Y$ este superior (inferior) *o*-semicontinuă, în punctul $x_0 \in X$, dacă $\overline{f}(x_0) = f(x_0)$ $(\underline{f}(x_0) = f(x_0))$.

f este superior (inferior) o-semicontinuă în X dacă este superior (inferior) o-semicontinuă în orice punct $x \in X$.

Folosind notaţiile de prescurtare o-*SCS* pentru o-semicontinuitate superioară şi o-*SCI*, pentru o-semicontinuitate inferioară, putem scrie:

$$f \ o\text{-}SCS \text{ în } x \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \overline{f}(x) = f(x)$$

$$f \ o\text{-}SCI \text{ în } x \underset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \underline{f}(x) = f(x)$$

Observaţii:

1. În definiţiile date pentru $\overline{f}(x_0)$ şi $\underline{f}(x_0)$, în locul sistemului $\mathcal{V}_{x_0}$, a tuturor vecinătăţilor punctului x_0, ne putem servi de un sistem fundamental oarecare $\mathcal{V}^1_{x_0}$, de vecinătăţi ale punctului x_0.

Într-adevăr, notînd cu $A = \{\overline{f}_V(x_0) | V \in \mathcal{V}_{x_0}\}$ şi cu $A_1 = \{\overline{f}_V(x_0) | V \in \mathcal{V}^1_{x_0}\}$, din $\mathcal{V}^1_{x_0} \subset \mathcal{V}_{x_0}$ urmează că $inf\ A \leqslant inf\ A_1$.

Pe de altă parte $\mathcal{V}^1_{x_0}$ fiind un sistem fundamental de vecinătăţi ale punctului x_0, pentru orice $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ există $V^1 \in \mathcal{V}^1_{x_0}$, astfel ca $V^1 \subset V$; rezultă că, oricare ar fi $a \in A$, există $a_1 \in A_1$, astfel încît $a_1 \leqslant a$; urmează că $inf\ A_1 \leqslant inf\ A$.

În definitiv am arătat că $\overline{f}(x_0) = \inf\limits_{V\in\mathcal{V}^1_{x_0}} \{\sup\limits_{x\in V}\{f(x)\}\}$.

O demonstraţie analoagă stabileşte că $\underline{f}(x_0) = \sup\limits_{V\in\mathcal{V}^1_{x_0}}\{\inf\limits_{x\in V}\{f(x)\}\}$.

2. Pentru o funcţie reală, de una sau mai multe variabile reale, o-semicontinuitatea (superioară şi inferioară) revine la semicontinuitatea (superioară, respectiv inferioară) în sensul lui Baire.

3. Dacă $f(x_0)$ este cel mai mare (cel mai mic) element din Y, atunci f este *o-SCS* (*o-SCI*) în punctul x_0.

Exemplu. Fie X un spaţiu topologic, iar $\mathfrak{P}(X)$ mulţimea părţilor lui X. $\mathfrak{P}(X)$ este o latice completă în raport cu incluziunea. Definim o aplicaţie $f: X \to \mathfrak{P}(X)$ punînd $f(x) = \{x\}$, pentru orice $x \in X$. Pentru $x_0 \in X$ şi $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ avem:

$$\overline{f}_V(x_0) = \sup_{x\in V} \{f(x)\} = \bigcup_{x\in V} \{x\} = V \quad \text{deci}$$

$$\overline{f}(x_0) = \bigcap_{V\in\mathcal{V}_{x_0}} V$$

Dacă X este un spaţiu T_1, atunci $\bigcap_{V \in \mathcal{V}_{x_0}} V = \{x_0\}$, deci

$$\bar{f}(x_0) = f(x_0).$$

În acest caz f este o-SCS în x_0.

$$\underline{f}_V(x_0) = \inf_{x \in V} f(x) = \begin{cases} \varnothing & \text{dacă } V \neq \{x_0\} \\ x_0 & \text{dacă } V = \{x_0\} \end{cases} \quad \text{deci}$$

$$\underline{f}(x_0) = \begin{cases} \varnothing & \text{dacă } \{x_0\} \notin \mathcal{V}_{x_0} \\ \{x_0\} & \text{dacă } \{x_0\} \in \mathcal{V}_{x_0} \end{cases}$$

Prin urmare, dacă $\{x_0\} \in \mathcal{V}_{x_0}$, $\underline{f}(x_0) = f(x_0)$, deci f este o-SCI în x_0.

Definiţia 2.2. Aplicaţia $f: X \to Y$ este o-continuă în punctul $x_0 \in X$, dacă este în acelaşi timp, o-semicontinuă superior şi o-semicontinuă inferior în x_0, deci dacă:

$$\bar{f}(x_0) = \underline{f}(x_0) = f(x_0)$$

f este o-continuă în X dacă este o-continuă în fiecare punct $x \in X$.

3. În vederea enunţării teoremelor care urmează facem următoarele notaţii [3]:

$$[\alpha, \rightarrow] = \{y \in Y | \alpha \leqslant y\}$$

$$[\rightarrow, \alpha] = \{y \in Y | y \leqslant \alpha\}$$

Teorema 3.1. *$f: X \to Y$ este o-SCS în $x_0 \Rightarrow [\alpha \not\leqslant f(x_0) \Rightarrow \exists V\alpha \in \mathcal{V}_{x_0}$: $f(V\alpha) \cap [\alpha, \rightarrow] = \varnothing]$.*

Demonstraţie. Notînd cu (a) propoziţia f este o-SCS în x_0 şi cu (b) propoziţia $\{\alpha \not\leqslant f(x_0) \Rightarrow \exists\, V_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0} : f(V_\alpha) \cap [\alpha, \rightarrow] = \varnothing]$ vom dovedi implicaţia (a) $\Rightarrow$ (b), demonstrînd că dacă condiţia (b) nu are loc atunci nici (a) nu este satisfăcută. Admitem că (b) nu este satisfăcută. Există deci în Y un element α, astfel încît $\alpha \not\leqslant f(x_0)$ şi orice vecinătate $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ conţine cel puţin un punct z, astfel ca $\alpha \leqslant f(z)$. Atunci $\alpha \leqslant \sup_{x \in V} \{f(x)\}$ pentru orice $V \in \mathcal{V}_{x_0}$. Urmează că $\alpha \leqslant \bar{f}(x_0) = \inf_{V \in \mathcal{V}_{x_0}} \{\sup_{x \in V} \{f(x)\}\}$. Cum am admis că $\alpha \not\leqslant f(x_0)$, urmează că $f(x_0) \neq \bar{f}(x_0)$, deci f nu este o-SCS în x_0 ((a) nu are loc).

Observaţie. Condiţia (b) din enunţul teoremei 3.1 nu este în general suficientă, pentru ca aplicaţia f să fie o-SCS în punctul x_0, cum se vede din exemplul care urmează.

Exemplu. Fie X axa reală, dotată cu topologia naturală şi $Y \subset \mathfrak{L}(X)$, formată din intervalele deschise, închise şi semiînchise, de lungime cel puţin 2 (mărginite sau nu) de pe axa reală şi partea vidă a axei reale. Y este o atice completă în raport cu relaţia de incluziune. Definim o aplicaţie $: X \to Y$ prin $f(x) = (x - 1,\ x + 1)$ pentru orice $x \in X$. Pentru un punct

$x_0 \in X$, considerăm vecinătăţile $V_n = \left(x_0 - \frac{1}{n},\ x_0 + \frac{1}{n}\right)$, $n \in N$, care formează, cum se ştie, un sistem fundamental de vecinătăţi ale punctului x_0. Atunci $\sup\limits_{x \in V_n} \{f(x)\} = \left(x_0 - 1 - \frac{1}{n},\ x_0 + 1 + \frac{1}{n}\right)$, iar

$$\bar{f}(x_0) = \bigcap_{n \in N} \left(x_0 - 1 - \frac{1}{n},\ x_0 + 1 + \frac{1}{n}\right) = [x_0 - 1,\ x_0 + 1]$$

Prin urmare $f(x_0) < \bar{f}(x_0)$, deci f nu este o-SCS în x_0. Condiţia (b) este însă satisfăcută, cum se vede cu uşurinţă, deci condiţia (b) nu caracterizează o-semicontinuitatea superioară a aplicaţiei f în punctul x_0.

Dacă Y este un lanţ (total ordonat prin relaţia „ $\leqslant$ ") complet, dens în sine (oricare ar fi $x, y \in Y$ cu $x < y$, există $z \in Y$, astfel ca $x < z < y$) [2], condiţia (b) din enunţul teoremei 3.1 este şi suficientă pentru ca aplicaţia f să fie o-SCS în x_0.

Mai precis, avem

TEOREMA 3.2. *Dacă $f: X \to Y$, unde X este un spaţiu topologic, iar Y un lanţ, complet, dens în sine atunci:*

$$f \text{ este } o\text{-}SCS \text{ în } x_0 \Leftrightarrow [f(x_0) < \alpha \Rightarrow \exists\, V_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0} : f(V_\alpha) \cap [\alpha, \to] = \emptyset]$$

Demonstraţie. Notînd din nou cu (a) şi (b) cele două condiţii din enunţ şi ţinînd seama că implicaţia (a)$\Rightarrow$(b) are loc conform teoremei 3.1, rămîne să demonstrăm că (b) $\Rightarrow$ (a). Pentru aceasta vom arăta că, dacă (a) nu are loc, atunci nici condiţia (b) nu este satisfăcută.

Presupunem, prin urmare, că $f(x_0) < \bar{f}(x_0)$. Mulţimea Y fiind densă în sine (în raport cu ordonarea), există $\alpha \in Y$, astfel încît

$$f(x_0) < \alpha < \bar{f}(x_0) \tag{*}$$

Oricare ar fi $V \in \mathcal{V}_{x_0}$, există cel puţin un punct $z \in V$, astfel ca $\alpha \leqslant f(z)$. Într-adevăr, în caz contrar, $\sup\limits_{x \in V} \{f(x)\} \leqslant \alpha$ pentru orice $V \in \mathcal{V}_{x_0}$ şi deci

$$\bar{f}(x_0) = \inf_{V \in \mathcal{V}_{x_0}} \{\sup_{x \in V} \{f(x)\}\} \leqslant \alpha, \text{ în contradicţie cu } (*).$$

Prin urmare, am arătat că există un $\alpha \in Y$, pentru care $\alpha > f(x_0)$ astfel încît oricare ar fi $V \in \mathcal{V}_{x_0}$, $f(V) \cap [\alpha, \to] \neq \emptyset$, deci condiţia ($b$) nu are loc.

TEOREMA 3.3. *$f: X \to Y$ este o-SCS în* $x_0 \Rightarrow [\alpha \not\leqslant f(x_0) \Rightarrow f^{-1}(Y - [\alpha \to]) \in \mathcal{V}_{x_0}]$

Demonstraţie. Notînd cu (c) propoziţia $[\alpha \not\leqslant f(x_0) \Rightarrow f^{-1}(Y - [\alpha, \to]) \in \mathcal{V}_{x_0}$ va trebui să demonstrăm implicaţia (a) $\Rightarrow$ (c) ((a) avînd aceeaşi semnificaţie ca şi mai sus). Deoarece, conform teoremei 3.1. (a) $\Rightarrow$ (b), va fi suficient să demonstrăm că (b) $\Rightarrow$ (c). Admitem deci că (b) este satisfăcută şi fie $\alpha \in Y$, astfel ca $\alpha \not\leqslant f(x_0)$. Există atunci, conform condiţiei (b), o vecinătate V_α a punctului x_0, astfel încît $f(V_\alpha) \cap [\alpha, \to] = \emptyset$ urmează că $f(V_\alpha) \subset Y - [\alpha, \to]$, deci $f^{-1}(Y - [\alpha, \to]) \supset f^{-1}(f(V_\alpha)) \supset V_\alpha$.

Ca supramulţime a unei vecinătăţi a punctului x_0, $f^{-1}(Y - [\alpha, \to])$ este de asemenea o vecinătate a acestui punct, deci condiţia (c) este îndeplinită.

TEOREMA 3.4. *Dacă Y este un lanţ complet, dens în sine, atunci $f: X \to Y$ este o-SCS în $x_0 \Leftrightarrow [f(x_0) < \alpha \Rightarrow f^{-1}(Y - [\alpha, \to]) \in \mathcal{V}_{x_0}$*

Demonstraţie. Ţinînd seama de teorema 3.3, rămîne să demonstrăm implicaţia (c) $\Rightarrow$ (a). Deoarece, conform teoremei 3.2, (b) $\Rightarrow$ (a), va fi suficient să arătăm că (c) $\Rightarrow$ (b). Presupunem deci condiţia (c) îndeplinită şi fie $\alpha \in Y$, astfel ca $f(x_0) < \alpha$. Atunci $f^{-1}(Y - [\alpha, \to])$ este o vecinătate a punctului x_0. Facem notaţia $V_\alpha = f^{-1}(Y - [\alpha, \to])$. Avem $f(V_\alpha) = f(f^{-1}(Y - [\alpha, \to]) \subset Y - [\alpha, \to]$; prin urmare $f(V_\alpha) \cap [\alpha, \to] = \emptyset$, deci condiţia (b) are loc.

TEOREMA 3.5. *$f: X \to Y$ este o-SCS pe $X \Rightarrow [\forall \alpha \in Y : f^{-1}([\alpha, \to])$ este o mulţime inchisă din X.*

Demonstraţie. Presupunem că aplicaţia f este o-SCS în X, deci că în orice punct $x \in X$, $\bar f(x) = f(x)$. Vom demonstra că $\overline{f^{-1}([\alpha, \to])} \subset f^{-1}([\alpha, \to])$. Într-adevăr $x_0 \in \overline{f^{-1}([\alpha, \to])} \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{x_0} : V \cap f^{-1}([\alpha, \to]) \neq \emptyset \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{x_0} \exists z \in V : \alpha \leqslant f(z) \Rightarrow \forall V \in \mathcal{V}_{x_0} : \alpha \leqslant \sup_{x \in V} f(x) \Rightarrow \alpha \leqslant \inf_{V \in \mathcal{V}_{x_0}} \{\sup_{x \in V} \{f(x)\}\} = \bar f(x_0) = f(x_0) \Rightarrow x_0 \in f^{-1}([\alpha, \to])$.

COROLAR. *$f: X \to Y$ este o-SCS pe $X \Rightarrow [\forall \alpha \in Y : f^{-1}(Y - [\alpha, \to])$ este o mulţime deschisă din X].*

Demonstraţie. Implicaţia rezultă imediat din teorema 3.5 şi din faptul că mulţimile $f^{-1}([\alpha, \to])$ şi $f^{-1}(Y - [\alpha, \to])$ sînt complementare.

Dacă Y este un lanţ complet, dens în sine, dăm următoarea caracterizare globală a o-semicontinuităţii superioare.

TOEREMA 3.6. *Fie Y un lanţ complet, dens în sine. Atunci: $f: X \to Y$ este o-SCS în $X \Leftrightarrow [\forall \alpha \in Y : f^{-1}([\alpha, \to]) \in \mathcal{F}_x$ unde $\mathcal{F}_x$ este familia mulţimilor închise din X.*

Demonstraţie. Notînd cu (d) condiţia $[\forall \alpha \in Y : f^{-1}([\alpha, \to]) \in \mathcal{F}_x]$ şi ţinînd seama de teorema 3.5, rămîne să demonstrăm că, pentru orice punct $x_0 \in X$, avem (d) $\Rightarrow$ (a). Dacă $f(x_0)$ este cel mai mare element din Y, condiţia (a) este satisfăcută. Fie acum $\alpha \in Y$, astfel ca $f(x_0) < \alpha$. Urmează că $x_0 \in \{x \in X \mid f(x) < \alpha\} = X - \{x \in X \mid \alpha \leqslant f(x)\} = X - f^{-1}([\alpha, \to]) = f^{-1}(Y - [\alpha, \to])$. Conform condiţiei (d), mulţimea $f^{-1}([\alpha, \to])$ este închisă, deci $f^{-1}(Y - [\alpha, \to])$ este deschisă. $f^{-1}(Y - [\alpha, \to])$ fiind o mulţime deschisă care conţine punctul x_0, este o vecinătate a acestui punct. Prin urmare, am demonstrat că (d) $\Rightarrow$ (c). Cum (c) $\Rightarrow$ (a) conform teoremei 3.4, teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 3.7. *Dacă Y este un lanţ complet dens în sine, atunci pentru orice aplicaţie $f: X \to Y$, aplicaţia $\bar f: X \to Y$ este o-semicontinuă superior pe $X (\bar{\bar f} = \bar f)$.*

Demonstrație. Vom demonstra că în orice punct $x_0 \in X$ funcția $\bar{f}$ este *o-SCS*. Cum am mai observat este nevoie să facem demonstrația numai pentru cazul cînd $\bar{f}(x_0)$ nu este cel mai mare element al laticii complete Y.

Pentru $\alpha < \bar{f}(x_0)$, există, conform definiției lui $\bar{f}(x_0)$ o vecinătate deschisă V_α a punctului x_0, astfel încît $\sup_{x \in V_\alpha} \{f(x)\} < \alpha$. V_α fiind o mulțime deschisă, este vecinătate pentru oricare dintre punctele sale. Urmează că, dacă $z \in V_\alpha$, atunci $\bar{f}(z) = \inf_{V \in \mathcal{V}_z} \{\sup_{x \in V} \{f(x)\}\} \leqslant \sup_{x \in V_\alpha} \{f(x)\} < \alpha$ (deoarece $V_\alpha \in \mathcal{V}_z$).

Am arătat deci că $\alpha > \bar{f}(x_0) \Rightarrow [\exists\, V_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0} : \bar{f}(V_\alpha) \cap [\alpha, \rightarrow] = \varnothing]$ de unde, conform teoremei 3.2, rezultă că aplicația $\bar{f}$ este *o-SCS* în x_0, ceea ce trebuia demonstrat.

TEOREMA 3.8. *Fie Y un lanț complet, dens în sine, X un spațiu topologic și $(f_\xi : X \to Y)_{\xi \in A}$ o familie de aplicații o-semicontinue superior pe X. Atunci aplicația $h : X \to Y$ definită prin $h(x) = \inf_{\xi \in A} \{f_\xi(x)\}$ este o-semicontinuă superior pe X.*

Demonstrație.

$$h^{-1}([\alpha, \rightarrow]) = \{x \in X | h(x) \geqslant \alpha\} = \bigcap_{\xi \in A} \{x \in X | f_\xi(x) \geqslant \alpha\} = \bigcap_{\xi \in A} f_\xi^{-1}([\alpha, \rightarrow]).$$

Conform teoremei 3.6 $f_\xi^{-1}([\alpha, \rightarrow]) \in \mathcal{F}_x$, pentru orice $\xi \in A$; deci $h^{-1}([\alpha, \rightarrow]) \in \mathcal{F}_x$ (intersecție de mulțimi închise), de unde, în baza teoremei 3.6, rezultă că aplicația h este *o-SCS* pe X.

Teoremele 3.1—3.8 se referă la funcții o-semicontinue superior. Pentru fiecare dintre aceste teoreme există însă o teoremă corespunzătoare, privind funcții o-semicontinue inferior. Ne mărginim să enunțăm doar aceste teoreme, demonstrațiile lor fiind întru totul analoage celor date mai sus, pentru cazul funcțiilor o-semicontinue superior.

TEOREMA 3.1'. *$f : X \to Y$ este o-SCI în $x_0 \Rightarrow [f(x_0) \not\leqslant \alpha \Rightarrow \exists\, V_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0} : f(V_\alpha) \cap [\leftarrow, \alpha] = \varnothing]$*

TEOREMA 3.2'. *Y fiind un lanț complet, dens în sine, avem $f : X \to Y$ este o-SCI în $x_0 \Leftrightarrow [f(x_0) > \alpha \Rightarrow \exists\, V_\alpha \in \mathcal{V}_{x_0} : f(V_\alpha) \cap [\leftarrow, \alpha] = \varnothing]$.*

TEOREMA 3.3'. *$f : X \to Y$ este o-SCI în $x_0 \Rightarrow [f(x_0) \not\leqslant \alpha \Rightarrow f^{-1}(Y - [\leftarrow, \alpha]) \in \mathcal{V}_{x_0}]$.*

TEOREMA 3.4'. *Y fiind un lanț complet, dens în sine, avem:*

$f : X \to Y$ este o-SCI în $x_0 \Leftrightarrow [f(x_0) > \alpha \Rightarrow f^{-1}(Y - [\leftarrow, \alpha] \in \mathcal{V}_{x_0})$.

TEOREMA 3.5.' *$f : X \to Y$ este o-SCI* pe $X \Rightarrow [\forall \alpha \in Y : f^{-1}([\leftarrow, \alpha] \in \mathcal{F}_x]$.

TEOREMA 3.6'. *Dacă Y este un lanț complet, dens în sine, atunci $f : X \to Y$ este o-SCI pe $X \Leftrightarrow [\forall\, \alpha \in Y : f^{-1}([\leftarrow, \alpha] \in \mathcal{F}_x]$.*

TEOREMA 3.7'. *Y fiind un lanţ complet, dens în sine, pentru orice aplicaţie $f: X \to Y$, funcţia $\underline{f}: X \to Y$ este o-SCI* pe $X(\underline{\underline{f}} = \underline{f})$

TEOREMA 3.8'. *Y fiind un lanţ complet, dens în sine, şi $(f_\xi : X \to Y)_{\xi \in A}$ o familie de funcţii o-SCI* pe X, *funcţia $g(x) = \sup\limits_{\xi \in V} \{ f_\xi (x)\}$ este o-SCI* pe X.

În sfîrşit, dăm o teoremă care se referă la funcţii o-continue pe X.

TEOREMA 3.9. *Dacă $f: X \to Y$ este o-continuă pe X, atunci pentru orice $\alpha \in Y$, $\{x \in X | f(x) = \alpha\}$ este închisă şi $\{x \in X| f(x) \,||\, \alpha\}$ este deschisă (unde $f(x) \,||\, \alpha$ înseamnează că $f(x)$ nu este comparabil cu α).*

Demonstraţie. Dacă f este o-continuă pe X, ea este atît *o-SCS* cît şi *o-SCI*. Conform teoremelor 3.5 şi 3.5', avem

$f^{-1}([\alpha, \to]) \in \mathcal{F}_X$ şi $f^{-1}([\leftarrow, \alpha) \in \mathcal{F}_X$ deci $f^{-1}([\alpha, \to]) \cap f^{-1}([\to, \alpha) \in \mathcal{F}_X$

deci $\{x \in X \mid \alpha \leqslant f(x)\} \cap \{x \in X | f(x) \leqslant \alpha\} = \{x \in X \mid f(x) = \alpha\} \in \mathcal{F}_X$.

Dacă f este o-continuă pe X, avem de asemenea

$\{x \in X| \alpha \leqslant f(x)\} \cup \{x \in X|f(x) \leqslant \alpha\} \in \mathcal{F}_X$. Urmează că $\{x \in X| f(x)||\alpha\}$ este deschisă, fiind complementara unei mulţimi închise.

4. În laticea completă Y, ordonarea permite definirea unor topologii de tip special (aşa-numite topologii intrinseci). Ne întrebăm dacă există vreo legătură între o-continuitatea unei aplicaţii $f: X \to Y$, privită ca aplicaţie a spaţiului topologic X în laticea completă Y şi continuitatea aplicaţiei f, privită ca aplicaţie a spaţiului topologic X în spaţiul topologic Y. Întrebarea este legitimă, deoarece avem în vedere topologii definite cu ajutorul ordonării din Y.

DEFINIŢIA 4.1. Topologia care are ca subbază a mulţimilor închise sistemul S al intervalelor închise $[a, b]$ din Y, se numeşte interval-topologia pe Y ([2], [4]).

Vom nota această topologie cu τ_i.

TEOREMA 4.1. *Orice aplicaţie $f: X \to Y$, o-continuă pe X este continuă pe X în raport cu interval-topologia din Y (adică continuă, ca aplicaţie între spaţiile topologice X şi Y, Y fiind dotat cu topologie τ_i).*

Demonstraţie. Va fi suficient să arătăm că contraimaginea prin f a oricărui element al unei subbaze pentru familia mulţimilor închise din Y este o mulţime închisă din X. Elementele subbazei interval-topologiei din Y, sînt intervalele $[a, b] = \{y \in Y|a \leqslant y \leqslant b\}$, cu a, $b \in Y$. Avem însă $[a, b] = \{y \in Y|a \leqslant y\{ \cap \{y \in Y|y \leqslant b\} = [\leftarrow, b] \cap [a, \to]$. Prin urmare, $f^{-1}([a, b]) = f^{-1}([a, \to]) \cap f^{-1}([\leftarrow, b])$. Aplicaţia f fiind $o-SCS$ pe X, $f^{-1}([a, \to]) \in \mathcal{F}_X$ (teorema 3,5); fiind însă şi *o SCI* pe X, avem de asemenea $f^{-1}([\leftarrow, b]) \in \mathcal{F}_X$ (teorema 3.5'). Urmează că $f^{-1}([a, b]) \in$ $\in \mathcal{F}_X$, ceea ce demonstrează teorema.

Menţionăm că teorema 4.1 nu afirmă că dacă f este o-continuă într-un punct $x_0 \in X$, atunci este continuă în x_0 şi în raport cu topologia τ_i din Y.

TEOREMA 4.2. *Fie Y un lanţ complet, dens în sine. Atunci o aplicaţie $f: X \to Y$ este o-continuă pe X, dacă şi numai dacă ea este continuă pe X n rap ort cu topologia τ_i din Y.*

Demonstrație. Trebuie să arătăm că dacă f este continuă pe X, ea este şi o-continuă pe X. Pentru orice $\alpha \in Y$, mulţimile $[\leftarrow, \alpha]$ şi $[\alpha, \rightarrow]$ sînt închise în raport cu interval topologia din Y. Dacă aplicaţia f este continuă, atunci, conform unui cunoscut criteriu de continuitate, mulţimile $f^{-1}([\leftarrow, \alpha])$ şi $f^{-1}([\alpha, \rightarrow])$ sînt închise în spaţiul X. Conform teoremelor 3.7 şi 3.7' urmează că f este atît o—SCS pe X, cît şi o—SCI pe X, deci este o-continuă pe X.

DEFINIŢIA 4.2. O mulţime $M \subset Y$ este închisă în topologia ordonării pe Y, dacă şi numai dacă o-limita oricărui şir generalizat o-convergent de elemente din M aparţine de asemenea mulţimii M([2], [8]).

Vom nota topologia ordonării cu τ_0.

TEOREMA 4.3. *Dacă aplicaţia $f: X \rightarrow Y$ este o-continuă în $x_0 \in X$, atunci ea este continuă în x_0 în raport cu topologia ordonării din Y.*

Demonstrație. Conform unui cunoscut criteriu de continuitate a unei funcţii într-un punct x_0 ([6]) va fi suficient să arătăm că $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \subset X$ şi $x_\alpha \rightarrow x_0$ implică $f(x_\alpha) \rightarrow f(x_0)$. Fie deci $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ un şir generalizat de elemente din X, convergent (în sensul topologiei din X) către un punct $x_0 \in X$. Înseamnă că $\forall V \in \mathcal{V}_{x_0} \exists \alpha_V \in A : (\alpha > \alpha_V \Rightarrow x_\alpha \in V)$. Urmează că

$$\alpha > \alpha_V \Rightarrow f(x_\alpha) \in f(V) \text{ deci } \inf_{x\in V} \{f(x)\} \leqslant f(x_\alpha) \leqslant \sup_{x\in V} \{f(x)\}.$$

Folosim din nou notaţiile $\bar{f}_V(x_0) = \sup_{x\in V} \{f(x)\}$ şi $\underline{f}_V(x_0) = \inf_{x\in V} \{f(x)\}$.

Şirurile $(\bar{f}_V(x_0))_{V\in\mathcal{V}_{x_0}}$ şi $(\underline{f}_V(x_0))_{V\in\mathcal{V}_{x_0}}$ sînt, aşa cum am observat şi cu altă ocazie, monotone: primul necrescător, al doilea nedescrescător. În plus, oricare ar fi $V \in \mathcal{V}_{x_0}$, există $\alpha_V \in A$, astfel încît $\alpha > \alpha_V \Rightarrow \underline{f}_V(x_0) \leqslant f(x_\alpha) \leqslant \bar{f}_V(x_0)$.

Funcţia f fiind, prin ipoteză, o-continuă în punctul x_0, avem de asemenea

$$\sup_{V\in\mathcal{V}_{x_0}} \{\underline{f}_V(x_0)\} = \underline{f}(x_0) = f(x_0) = \bar{f}(x_0) = \inf_{V\in\mathcal{V}_{x_0}} \{\bar{f}_V(x_0)\}$$

Conform definiţiei o-convergenţei [8] urmează că $f(x_\alpha) \xrightarrow{o} f(x_0)$.

Se cunoaşte însă că convergenţa în raport cu topologia ordonării este mai generală decît o-convergenţa. Prin urmare $f(x_\alpha) \xrightarrow{0} f(x_0) \Rightarrow f(x_\alpha) \xrightarrow{\tau_0} f(x_0)$ (unde notaţie $f(x_\alpha) \xrightarrow{\tau_0} f(x_0)$ are semnificaţia că $f(x_\alpha)$ tinde către $f(x_0)$ în raport cu topologia τ_0). Cu aceasta, teorema este demonstrată.

COROLAR. *Dacă aplicaţia $f: X \rightarrow Y$ este o-continuă în punctul $x_0 \in X$ atunci ea este continuă în x_0 în raport cu topologia τ_i din Y.*

Demonstrație. Conform teoremei 4.3, o-continuitatea aplicaţiei f în punctul x_0, implică continuitatea lui f în x_0, în raport cu topologia τ_0 pe Y. Topologia ordonării pe o mulţime parţial ordonată este însă mai fină decît interval-topologia pe mulţimea respectivă ([2], [7]). Urmează că continuitatea aplicaţiei f în punctul x_0 în raport cu topologia τ_0 implică continuitatea lui f, faţă de topologia τ_i, ceea ce demonstrează afirmaţia din enunţ.

Într-un lanţ topologiile τ_i şi τ_0 sînt echivalente. Rămîne deschisă problema dacă o-continuitatea unei aplicaţii $f: X \to Y$ implică continuitatea în raport cu topologia idealelor pe Y, introdusă de Frink ([5]).

(Intrat în redacţie la 2 martie 1971)

BIBLIOGRAFIE

1. Baire, R., *Leçons sur les fonctions discontinues*, Paris, Collection Borel, 1905.
2. Birkhoff, G., *Lattice theory*, „Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.", **XXV**, 1967.
3. Cartan, S. D. Mc., *Separation axioms for the topological ordered spaces*, „Proced. of the Cambridge Philos. Soc.", **64**, 4, 1968.
4. Frink, O., *Topology in lattices*, „Trans. of the Amer. Math. Soc." **51**, 1942, pp. 569–582.
5. Frink, O., Ideals in partially ordered sets, "The Amer. Month"., **61**, 1954, pp. 223–234
6. Kelley, I., *General Topology*, Van Nostrand, 1955.
7. Ward, A., *On relations between certain intrinsec topologies in partially ordered sets*, „Proc. Cambridge, Phil. Soc.", **51**, 1955, pp. 254–261.
8. Vulih, B., *Vvedenie v teoriu poluuporiadocinîh prostranstv*, Moscova, 1961.

О-ПОЛУНЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

(Резюме)

В статье введены понятия о-полунепрерывности (высшей и низшей) и о-непрерывности для отображений, определённых на топологическом пространстве и со значениями в полной структуре. Изучены свойства о-полунепрерывных отображений и сравнена о-непрерывность с непрерывностью в отношении с определёнными топологиями специального типа, определённых на Y с помощью упорядочения.

APPLICATIONS O-SEMICONTINUES

(Résumé)

Dans le présent travail on introduit les notions de o-semicontinuité (supérieure et inférieure) et de o-continuité, en vue d'applications définies sur un espace topologique et avec des valeurs dans un treillis complet (lattice). On étudie les propriétés des applications o-semicontinues et l'on compare la o-continuité avec la continuité en rapport avec certaines topologies de type spécial définies sur Y à l'aide d'ordonnées.

CORRESPONDANCES PARTIELLEMENT PROJECTIVES ET TENSEURS AFFINES ASSOCIÉS

MARIAN TZARINA

Dans cet article nous étudions une classe de correspondances définies entre les espaces affines ou projectifs, qui généralisent d'une certaine manière les homographies. Ces transformations appartiennent à la classe des correspondances à tenseur affine de la forme sous-projective.

Soient $A_n(x^1, \ldots, x^n)$ et $E_n(u^1, \ldots, u^n)$ deux espaces affines n-dimensionels rapportés à deux systèmes de variables cartésiennes. Une correspondance localement bijective de classe C^1 entre ces espaces sera définie par des équations de la forme

$$u^r = u^r(x^1, \ldots, x^n) \qquad \Delta = \left| \frac{\partial u^r}{\partial x^s} \right| \neq 0 \tag{1}$$

où u^r sont des fonctions différentiables.

S'il existe dans l'espace E_n un sous-espace $E_m(u^1, \ldots, u^m)$ de sorte que les hyperplans parallèles à E_m soient correspondants à des hyperplans de A_n, nous dirons que la correspondance est partiellement projective de type $n - m - 1$, ou $n - m - 1$ fois sous-projective.

Les homographies possèdent cette propriété pour tous les hyperplans, donc pour $m = 0$. Ainsi, de ce point de vue elles sont des correspondances $n - 1$ fois sous-projectives.

Etablissons la forme genérale des équations d'une correspondance $n - m - 1$ fois sous-projective. Afin qu'une équation linéaire de la forme

$$A_\sigma u^\sigma + A = 0 \qquad \sigma = m + 1, \ldots, n$$

soit correspondante à une équation linéaire quelconque dans les variables x_i, il faut et il suffit que les fonctions u^σ soient des fonctions rationelles linéaires, avec le même dénominateur. Il existe ainsi un hyperplan π de A_n, dont les points ont l'image dans l'hyperplan à l'infini de l'espace E_n. Du point de vue analytique une correspondance $n - m - 1$ fois sous-projective est définie par des équations de la forme

$$\begin{cases} u^i = u^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) & i = \overline{1, m} \\ u^\alpha = \dfrac{a_s^\alpha x^s + a^\alpha}{a_s^0 x^s + a^0} & \alpha = \overline{m+1, n} \end{cases} \tag{2}$$

ou a_s^α, a^α a_s^0, a^0, sont des constantes données.

Nous présentons quelques propriétés des correspondances introduites ci-dessus.

Proposition 1. Les droites de l'espace E_n $n > 2$ correspondent à des courbes contenues dans des variétés linéaires à $m + 1$ dimensions.

En effet, considérons les équations

$$u^i = u_0^i + p^i t \qquad u^\alpha = u_0^\alpha + p^\alpha t \tag{3}$$

avec p, u constantes quelconques. On fait la substitution des expressions (2) dans les équations (3) et par l'élimination du paramètre t on obtient

$$p^n(a_s^\gamma x^s + a^s) - p^\gamma(a_s^n x^s + a^s) = (u_0^\lambda p^n - u_0^n p^\lambda)(a_s^0 x^s + a^0)$$
$$(\lambda = \overline{m+1, n-1}) \tag{4}$$

Ainsi, parmi les équations obtenues il y a $n - m - 1$ équations linéaires dans les variables x^i, ce qui démontre l'énoncé.

Proposition 2. Une correspondance sous-projective de type k est en même temps sous-projective de type $k' < k$

Cela résulte immédiatement de la définition.

Proposition 3. Soit une correspondance sous-projective donnée, de type $n - m - 1$ $(n > 2)$, et soit E_m le sous-espace respectif. Les variétés linéaires H_{n-2} parallèles à E_m correspondent à des variétés linéaires.

En effet, les hyperplans parallèles à E_m qui déterminent ces variétés, correspondent à des hyperplans, dont l'intersection fournit les variétés H_{n-2}.

On pose le problème de l'inverse d'une correspondance sous-projective donnée par les formules (2). Les relations qui donnent les variables u^n peuvent être considérées comme définissant une homographie

$$u^\alpha = \frac{a_\beta^\alpha x^\beta + c^\alpha}{a_\beta^0 x^\beta + c^0} \tag{5}$$

où les x sont considérés comme des paramètres dans les expressions

$$c^\alpha = a_i^\alpha x^i + a^\alpha \qquad c_0 = a_i^0 x + a^0$$

Pour résoudre les formules (5) par des formules de la même forme il faut que cette homographie soit non dégénérée. En explicitant son déterminant on obtient

$$\sum_{i=1}^{m} K_i \; x^i + K \neq 0$$

où

$$K_i = \sum_{\alpha} a_i^{\alpha} B^{\alpha} + a_i^0 B \qquad\qquad K = \Sigma\, a^{\alpha} B_{\alpha} + a^0 B$$

B_{α} et B étant des constantes qui s'expriment en fonction de a_{β}^{α}, a_{β}^{0}. Il faut donc avoir $K_i = 0$ car autrement il existe un hyperplan dont les points n'admettent pas d'inverse. Cela dit, en considérant une famille quelconque de transformations sous-projectives, il résulte qu'il faut avoir $a_i^{\alpha} = a_i^0 = 0$ pour que la famille soit un groupe.

2. Tenseurs affines associés. D'après G. Vrănceanu [3] la théorie des correspondances entre deux espaces affines est étroitement liée à celle des connexions affines localement euclidiennes. Ainsi à une correspondance donnée entre les espaces affines A_n et E_n on associe un système de fonctions Γ_{jk}^{i} définies par les équations

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x_j \partial x^k} + \Gamma_{jk}^{s} \frac{\partial u^i}{\partial x^s} = 0 \tag{6}$$

qui fournissent les composantes d'un tenseur symétrique en j, k, invariant pour les transformations linéaires $u^i = \alpha_j^i u^j + \alpha^i$ et qui vérifient le système d'équations

$$\Gamma_{jkl}^{i} = \frac{\partial \Gamma_{jk}^{i}}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^{i}}{\partial x^k} + \Gamma_{sk}^{i}\Gamma_{jl}^{s} - \Gamma_{jl}^{s}\Gamma_{jk}^{s} = 0 \tag{7}$$

Les formules (7) expriment les conditions d'intégrabilité des équations (6). Réciproquement, à une solution des équations (2.3) on associe une correspondance entre les espaces affines A_n et E_n. Par conséquent l'étude des correspondances entre deux espaces affines revient à celle des tenseurs symétriques affines Γ_{jk}^{i}, dont les composantes vérifient les relations (7).

Dans le cas des formules (2), si $a_0 \neq 0$ on peut supposer $a_0 = 1$. Dans le voisinage de l'origine de A_n nous avons les développements

$$u^i = u_0^i + q_j^i x j - \frac{1}{2} q_{rs}^{i} x^r x^s + \ldots$$

$$u^{\alpha} = a^{\alpha} + (a_s^{\alpha} - a^{\alpha} a_s^0) x_s + (a^{\alpha} a_s^0 - a_s^{\alpha}) a_r^0 x^r x^s + \ldots \tag{8}$$

Nous supposons aussi que, par suite de la correspondance donnée, les origines et les axes des coordonnées de A_n et E_n se correspondent, ce qui revient à

$$u_0^i = 0 \qquad q_j^i = \delta_j^i \qquad a^{\alpha} = 0 \qquad a_s^{p} = \delta_s^{a} \tag{9}$$

Les formules (8) deviennent alors

$$u^i = x^i - \frac{1}{2} q^i_{rs} x^r x^s + \dots$$

$$u^\alpha = x^\alpha - \frac{1}{2} (\delta^\alpha_s a^0_r + \delta^\alpha_r a^0_s) x^r x^s + \dots \tag{10}$$

Ainsi les valeurs des composantes du tenseur Γ^i_{rs} à l'origine sont

$$(\Gamma^i_{rs})_0 = q^i_{rs} \qquad (\Gamma^\alpha_{rs})_0 = \delta^\alpha_s a^0_r + \delta^\alpha_r a^0_s \; i = \overline{1, m} \qquad \alpha = \overline{m+1, n} \tag{11}$$

Nous disons dans ce cas que le tenseur Γ^i_{rs} est de la forme sous-projective, à savoir $n - m - 1$ fois sous-projectif. La raison en est dans le fait que les expressions (11) peuvent être interprétées comme les coefficients d'une connexion $n - m - 1$ sous-projective, réduite à la forme canonique de G. Vranceanu ([3] vol II. Ch. 1). On a donc le

Théorème 1. Le tenseur affine associé à une correspondance sous-projective donnée par les formules (2) est $n - m - 1$ fois sous-projectif et ses composantes à l'origine sont données par les formules (11).

Il résulte que le vecteur de la connexion a^0_r est nul dans le cas des correspondances partiellement affines, données par les formules

$$u^i = u^i(x^1, \dots, x^n) \quad u^\alpha = a^\alpha_s x^s + a^\alpha \quad i = \overline{1, m} \quad \alpha = \overline{m+1, n}$$

3. Correspondances à tenseur sous-projectif. Nous envisageons une propriété concernant les directions caractéristiques des correspondances à tenseur de la forme locale sous-projective.

Etant donné le tenseur affine Γ^i_{rs} nous pouvons considérer aussi les transformations quadratiques

$$\rho v'^i = \Gamma^i_{jk} v^j v^k \tag{12}$$

Les directions fixes de celles-ci sont les directions caractéristiques de la correspondance associée à Γ. Leurs équations sont

$$v^l \Gamma^h_{rs} v^r v^s - v^h \Gamma^l_{rs} v^r v^s = 0 \tag{13}$$

Nous considérons aussi les symboles de la connexion projective

$$\Pi^h_{rs} = \Gamma^h_{rs} - \frac{\delta^h_r}{n+1} \Gamma_s - \frac{\delta^h_s}{n+1} \Gamma_r \qquad \Gamma_r = \Gamma^s_{rs} \tag{14}$$

ainsi que les équations (13) deviennent

$$v^l \Pi^h_{rs} v^r v^s - v^h \Pi^l_{rs} v^r v^s = 0 \tag{15}$$

On a le

Théorème 2. Une condition nécessaire et suffisante pour que les projections des courbes caractéristiques sur les variétés complémentaires à $E({}_m v^1, \ldots, v^m)$ $m \neq n - 1$ soient indéterminées est que le tenseur de la correspondance soit de la forme $n - m - 1$ sous-projectif.

En effet, pour l'indétermination de ces projections il faut avoir

$$v^\alpha \Pi^\beta_{rs} v^r v^s - v^\beta \Pi^\alpha_{rs} v^r v^s = 0$$

donc pour tout v^r

$$(\delta^\alpha_t \Pi^\beta_{rs} - \delta^\beta_t \Pi^\alpha_{rs}) v^r v^s v^t = 0$$

et par conséquent

$$\delta^\alpha_t \Pi^\beta_{rs} - \delta^\beta_t \Pi^\alpha_{rs} = 0$$

De ces relations il résulte en contractant

$$(n - m - 1) \Pi^\beta_{rs} = 0$$

donc

$$\Pi^\beta_{rs} = 0 \text{ car } n - m - 1 \neq 0 \quad \text{q.e.d.}$$

La condition est aussi suffisante.

En particulier, pour le cas $m = 0$ on retrouve le résultat connu:

THÉORÈME 3. Une condition nécessaire et suffisante pour que les courbes caractéristiques d'une correspondance soient indétermineées est que le tenseur de la correspondance soit projectif euclidien.

Pour les correspondances sous-projectives le théorème 2 est valable à cause du fait que le tenseur associé est localement sous-projectif.

Comme exemple de correspondances à tenseur sous-projectif nous citons les transformations de E. Č e c h [1], [3], pour lesquelles nous avons

$$\Pi^1_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \quad \Pi^\alpha_{rs} = 0 \quad r, s = \overline{1, n}\,; \quad \alpha, \beta = \overline{2, n}$$

(Manuscrit reçu le 5 janvier 1972)

BIBLIOGRAPHIE

1. Č e c h, E., *Géométrie projective différentielle des correspondances entre deux espaces. II.* *Časopis*, **75**, 1950, p. 123.
2. V i l l a, M., *Le trasformazioni puntuali fra due spazi lineari I, II, III*, „Rend. dell'Accademia Nazionale dei Lincei", Ser. VIII, **IV**, p. 58, 1958
3. V r ă n c e a n u, G., *Leçons de Géométrie différentielle*, vol. II, Bucarest, 1957; vol. III (en roumain) București, 1960.

CORESPONDENȚE SUBPROIECTIVE ȘI TENSORI AFINI ASOCIAȚI

(R e z u m a t)

În lucrare se introduce o clasă de transformări punctuale între două spații afine A_n și E_n care generalizează omografiile. Se arată că tensorul afin asociat acestor transformări este local de forma subproiectivă. Se dă o caracterizare a corespondentelor care au tensor afin de această formă cu ajutorul direcțiilor caracteristice.

СУБПРОЕКТИВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ПРИСОЕДИНЕННЫЕ АФФИННЫЕ ТЕНЗОРЫ

(Р е з ю м е)

В работе вводится класс точечных преобразований между двумя аффинными пространствами A_n и E_n, которые обобщают гомографии. Показано, что аффинный тензор, присоединённый к этим преобразованиям имеет локально субпроективную форму. Характеризуются преобразования, имеющие аффинный тензор с этой формой, при помощи характеристических направлений.

ASUPRA STRUCTURILOR DE INCIDENȚĂ SPAȚIALE

VICTORIA GROZE

Planul proiectiv general nu are o teorie corespunzătoare în spații de dimensiune mai mare decît doi, deoarece în aceste spații proprietățile obișnuite de incidență implică teorema lui Desargues și dispare varietatea bogată de structuri nedesarguesiene existente în plan.

Generalizările prezentate în lucrarea [1] permit însă o extindere la spații cu mai multe dimensiuni. Ne vom opri la cazul spațiului 3-dimensional.

Fie $\mathfrak{L}$ o mulțime și două sisteme de submulțimi ale ei $\mathfrak{D}$ și Π. Elementele mulțimii $\mathfrak{L}$ le vom numi puncte, iar cele ale sistemelor de mulțimi $\mathfrak{D}$ și Π drepte, respectiv plane. Relația de apartenență a unui punct la o dreaptă sau un plan o vom mai numi relație de incidență.

DEFINIȚIA 1. Se numește structură de incidență 3-dimensională sistemul $(\mathfrak{L}, \mathfrak{D}, \Pi)$ care satisface proprietățile:

1° Există în mulțimea $\mathfrak{L}$ punctele O_1, O_2, O_3, O_4, E în poziție generală (nicicare patru din ele nu sînt în același plan);

2° Dacă două puncte distincte ale unei drepte sînt incidente cu un plan, atunci dreapta aparține planului;

3° Punctele O_i, O_j, O_k (indici i, j, k diferiți) sînt incidente cu un singur plan. Notăm cu α planul $O_1O_2O_3$;

4° Punctele O_4 și E sînt incidente exact cu o dreaptă;

5° Orice punct $P \in \mathfrak{L} \setminus \alpha$ și două dintre punctele O_1, O_2, O_3 sînt incidente exact cu un plan, numit plan de coordonate;

6° Un plan de coordonate intersectează dreapta O_4E exact într-un punct;

7° Trei plane de coordonate, de tipuri distincte, se intersectează exact într-un punct;

8° Trei puncte situate respectiv pe dreptele O_3O_1, O_3O_2, O_3O_4, distincte de O_3, sînt incidente exact cu un plan;

9° Pe dreptele O_3O_1, O_3O_2, O_3O_4 există exact cîte un punct incident cu orice plan neincident cu O_3;

10° Un plan oarecare neincident cu O_3, un plan incident cu O_2O_3 şi un plan incident cu O_1O_3 sînt incidente cu un singur punct;

11° Intersecţia planelor $O_1O_3O_4$ şi $O_2O_3O_4$ cu orice plan este o dreaptă şi mulţimea acestor drepte constituie în fiecare din aceste plane, împreună cu punctele din aceste plane, cîte o structură de incidenţă plană [1].

Prin analogie cu cele tratate în cazul structurilor de incidenţă bi-dimensionale [1], vom coordonatiza structura de incidenţă 3-dimensională dată prin definiţia 1.

Fie M mulţimea punctelor incidente cu dreapta O_4E, diferite de punctul de intersecţie E' al dreptei O_4E cu planul α; Q, o mulţime echivalentă cu M, iar $\varphi : M \to Q$ o aplicaţie bijectivă. Notăm $\varphi(O_4) = 0$, $\varphi(E) = 1$. Fie acum $N \in \mathfrak{P} \setminus \alpha$.

Planele O_3O_2N, O_3O_1N şi O_1O_2N intersectează dreapta O_4E în punctele A, B şi C.

Tripletul ordonat (x, y, z), unde $x = \varphi(A)$, $y = \varphi(B)$, $z = \varphi(C)$, se numesc coordonatele punctului N.

Astfel avem că punctele dreptei O_4E au coordonate de forma (x, x, x), în particular $O_4(O, O, O)$ şi $E(1, 1, 1)$, deci putem scrie

$$\mathfrak{P}^* \Leftrightarrow Q \times Q \times Q$$

unde $\mathfrak{P}^* = \mathfrak{P} \setminus \alpha$.

Un punct P I O_1O_3 considerat în planul $O_1O_3O_4$ are o singură coordonată l şi notăm $P(l)$. Aceeaşi coordonată va fi asociată punctului P şi în cazul cînd se consideră structura spaţială. În mod analog vom proceda cu punctele P'IO_2O_3, folosind notaţia $P'[m]$.

În baza proprietăţii 8° din definiţia 1 rezultă că fiind date punctele $P(l)$, $P'[m]$ şi $P''(0, 0, n)$, există un singur plan incident cu ele. Planelor π diferite de planele incidente cu O_3, le asociem tripletul ordonat $[l, m, n]$, coordonatele nenule ale punctelor de intersecţie a planului π cu dreptele O_3O_1, O_3O_2, O_3O_4.

Definiţia 2. În mulţimea Q definim o operaţie cvinară ca fiind aplicaţia prin care asociem fiecărui cvintet ordonat de elemente (x, y, l, m, n) elementul

$$z = V(x, y; l, m, n) \tag{1}$$

$l, m, n, x, y \in Q$, egal cu a treia coordonată a punctului situat în planul $[l, m, n]$ avînd primele coordonate x, y.

Observaţie. Din definiţie rezultă că z este unic determinat. Relaţia (1) exprimă incidenţa dintre planul $[l, m, n]$ şi punctul (x, y, z).

În baza coordonatizării făcute, se verifică uşor următoarele proprietăţi ale operaţiei cvinare:

1° $V(x, O, l, m, n) = T_1(x, l, n)$, în baza proprietăţii 11° din definiţia 1, $T_1(x, l, n)$ fiind ternarul asociat planului $O_1O_3O_4$;

2° $V(O, y, l, m, n) = T_2(y, m, n)$, $T_2(y, m, n)$ fiind ternarul asociat planului $O_2O_3O_4$;

3° $V(0, 0, l, m, n) = T_1(0, l, n) = T_2(0, m, n) = n$;

4° $V(0, 1, l, m, 0) = T_2(1, m, 0) = m$;
5° $V(1, 0, l, m, 0) = T_1(1, l, 0) = l$;
6° $V(x, 0, 0, m, n) = T_1(x, 0, n) = n$;
7° $V(0, y, l, 0, n) = T_2(y, 0, n) = n$;
8° $V(x, 0, 1, m, 0) = T_1(x, 1, 0,) = x$;
9° $V(0, y, l, 1, 0) = T_2(y, 1, 0) = y$;
10° $V(x, y, 0, 0, n) = n$.

DEFINIȚIA 3. Mulțimea Q și operația cvinară se numește *cvinar* și se notează prin (Q, V).

Introducem acum următoarele operații:

a) Adunările, definite de relațiile

$$x + n = V(x, 0, 1, m, n) = T_1(x, 1, n)$$

$$y \oplus n = V(0, y, l, 1, n) = T_2(y, 1, n).$$

Aceste operații au următoarele proprietăți:

1° $z = x + n$, $z = y \oplus n$

admit soluție unică în raport cu x, respectiv y, pentru orice z și n dat, și în raport cu n, pentru orice z și x respectiv z și y dat;

2° $0 + n = T_1(0, 1, n) = n$
$0 \oplus n = T_2(0, 1, n) = n$;

3° $x + 0 = T_1(x, 1, 0) = x$
$y \oplus 0 = T_2(y, 1, 0) = y$.

Demonstrațiile acestor proprietăți rezultă imediat din definiție. Din proprietățile 2° și 3° reiese că 0 este element neutru pentru operațiile de adunare, deci $(Q, +)$ și $(Q, \oplus)$ sînt cvasigrupuri cu unitate, adică fiecare este un loop.

b) Înmulțirile, definite prin

$$x \cdot l = V(x, 0, l, m, 0) = T_1(x, l, 0)$$

$$y \circ m = V(0, y, l, m, 0) = T_2(y, m, 0)$$

Aceste operații au următoarele proprietăți evidente:

1° $x \cdot 1 = V(x, 0, 1, m, 0) = T_1(x, 1, 0) = x$;
1'° $y \circ 1 = V(0, y, l, 1, 0) = T_2(y, 1, 0) = y$;
2° $1 \cdot l = V(1, 0, l, m, 0) = T_1(1, l, 0) = l$;
2'° $1 \circ m = V(0, 1, l, m, 0) = T_2(1, m, 0) = m$;
3° $z = x \cdot l$ și $z = x \circ l$ pentru $x \neq 0$ și $z \in Q$ are soluție unică în raport cu l și pentru $l \neq 0$ și $z \in Q$ are soluție unică în raport cu x.

Dacă notăm cu $Q^* = Q \setminus \{0\}$, atunci fiecare dintre structurile $(Q^*, \cdot)$ și $(Q^*, \circ)$ este un loop cu elementul neutru 1.

DEFINIȚIA 4. Structura algebrică $(Q, +, \oplus, \cdot, \circ)$ asociată structurii de incidență 3-dimensionale se numește cvasicorpul asociat ei.

DEFINIȚIA 5. Două puncte P şi P' se numesc centrate în raport cu O_i ($i = 1, 2, 3, 4$), dacă punctele P, P', O_i, O_j şi P, P', O_i, O_k sînt coplanare, (i, j, k) fiind o permutare oarecare a numerelor 1, 2, 3 şi P, P' neincidente cu α.

DEFINIȚIA 6. Printr-o $O_i - \alpha$ perspectivitate ($i = 1, 2, 3, 4$) înțelegem o aplicație injectivă a spațiului, cu păstrarea incidențelor şi a punctelor din α, astfel ca două puncte corespondente să fie mereu centrate față de O_i.

DEFINIȚIA 7. O structură de incidență se numeşte $O_i - \alpha$ tranzitivă ($i = 1, 2, 3, 4$) dacă pentru două puncte oarecare P şi P' centrate în raport cu O_i şi neincidente cu α există o perspectivitate $O_i - \alpha$.

În cele ce urmează, admițînd că structura de incidență este $O_i - \alpha$ tranzitivă ($i = 1, 2, 3$), ne propunem să studiem comportarea cvinarului asociat.

TEOREMA 1. *Dacă o structură de incidență este $O_3 - \alpha$ tranzitivă, atunci în cvinarul asociat ei au loc proprietățile:*

1° $V(x, y; l, m, n) = V(x, y; l, m, 0) + n$;
2° $(Q, +)$ este un grup.

Demonstrație. O perspectivitate $O_3 - \alpha$ va fi caracterizată prin relațiile

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \\ z' = f(z) \end{cases} \tag{2}$$

fapt ce rezultă uşor din definițiile date. (P, P' sînt centrate în raport cu O_3). Întrucît printr-o perspectivitate incidențele se păstrează, putem scrie

$$z = V(x, y; l, m, n) \Rightarrow z' = V(x', y'; l', m', n')$$

unde (x', y', z') şi $[l', m', n']$ sînt imaginile prin perspectivitatea considerată a punctului (x, y, z) şi a planului $[l, m, n]$. Ținînd seama de (2) şi de $l' = l$, $m' = m$, $n' = f(n)$, avem

$$f(z) = V[x, y; l, m, f(n)]$$

şi deci

$$f[V(x, y; l, m, n)] = V[x, y; l, m, f(n)] \tag{3}$$

Luînd în această relație $y = 0$ şi $l = 1$, găsim

$$f[V(x, 0, 1, m, n)] = V[x, 0; 1, m, f(n)] \tag{3'}$$

care devine

$$f(x + n) = x + f(n) \tag{4}$$

iar pentru $n = 0$

$$f(x) = x + a \tag{4'}$$

unde $a = f(0)$.

Atunci relația (3) se poate scrie

$$V(x, y ; l, m, n) + a = V(x, y ; l, m, n + a),$$

din care, pentru $n = 0$, obținem

$$V(x, y ; l, m, 0) + a = V(x, y ; l, m, a). \tag{5}$$

În baza lui (4′) relația (4) devine

$$(x + n) + a = x + (n + a). \tag{6}$$

Ținînd seama de $O_3 - \alpha$ tranzitivitate, a poate lua orice valoare din Q, rezultă că relația (6) demonstrează asociativitatea operației de adunare, care împreună cu proprietatea de loop, arată că $(Q, +)$ este grup.

Un raționament analog poate fi făcut și în cazul operației de adunare $\oplus$; rezultă atunci că și $(Q, \oplus)$ este grup și că

$$V(x, y ; l, m, 0) \oplus a = V(x, y ; l, m, a).$$

Atunci putem scrie

$$V(x, y ; l, m, 0) + n = V(x, y ; l, m, 0) \oplus n$$

oricare ar fi $x, y, l, m, n \in Q$ și deci cele două operații de adunare coincid.

TEOREMA 2. *Dacă o structură de incidență $O_3 - \alpha$ tranzitivă admite și tranzitivitatea $O_1 - \alpha$, atunci în cvinarul asociat ei avem*

a) $(x + b) \cdot l = x \cdot l + b \cdot l$;
b) $V(x, y ; l, m, n) = y \circ m + x \cdot l + n$.

Demonstrație. O perspectivitate $O_1 - \alpha$ este reprezentată prin ecuațiile

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Din condițiile de incidență se deduce că

$$z = V(x, y ; l, m, n) \Rightarrow z = V[f(x), y ; l, m, n'(l, m, n)], \quad x, y, l, m, n \in Q$$

sau

$$V(x, y ; l, m, n) = V[f(x), y ; l, m, n'(l, m, n)] \tag{7}$$

În baza relației (5), relația (7) devine

$$V(x, y ; l, m, 0) + n = V[f(x), y ; l, m, 0] + n'(l, m, n) \tag{7′}$$

de unde, punînd $y = 0$, deducem

$$T_1(x, l, 0) + n = T_1[f(x), l, 0] + n'(l, m, n)$$

sau

$$x \cdot l + n = f(x) \cdot l + n'(l, m, n). \tag{8}$$

Dacă în (8) luăm $x = 0$ şi notăm $f(0) = b$, avem

$$n = b \cdot l + n'(l, m, n)$$

şi (7′) devine

$$V(x, y ; l, m, 0) + b \cdot l = V[f(x), y, l, m, 0] \qquad (7'')$$

iar (8) se poate scrie

$$x \cdot l + b \cdot l + n'(l, m, n) = f(x) \cdot l + n'(l, m, n)$$

sau

$$x \cdot l + b \cdot l = f(x) \cdot l \quad \forall x, l \in Q. \qquad (9)$$

Pentru $l = 1$ această relaţie devine

$$x + b = f(x).$$

şi deci avem

$$x \cdot l + b \cdot l = (x + b) \cdot l \quad \forall x, l \in Q \qquad (9')$$

relaţie care exprimă proprietatea de distributivitate de dreapta a operaţiei de înmulţire faţă de adunare.

Rezultă de asemenea pentru (7″):

$$V(x, y ; l, m, 0) + b \cdot l = V(x + b, y ; l, m, 0) \qquad (10)$$

În această relaţie, luînd $x = 0$ avem

$$T_2(y, m, 0) + b \cdot l = V(b, y ; l, m, 0)$$

sau

$$y \circ m + b \cdot l = V(b, y ; l, m, 0),$$

relaţie valabilă pentru orice $b \in Q$. Pentru $b = x$ avem

$$y \circ m + x \cdot l = V(x, y ; l, m, 0), \qquad (11)$$

Adunînd în ambii membri ai acestei relaţii pe n şi ţinînd seama de relaţia (5), avem

$$V(x, y ; l, m, n) = y \circ m + x \cdot l + n \qquad (12)$$

şi cu aceasta teorema este demonstrată.

TEOREMA 3. *Dacă structura de incidenţă $O_i - \alpha$ tranzitivă $(i = 1, 3)$ este şi $O_2 - \alpha$ tranzitivă, atunci în cvinarul asociat ei avem*

a) $(Q, +)$ *este un grup abelian;*

b) $(y + a) \circ m = y \circ m + a \circ m.$

Demonstraţie.

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = f(y) \\ z' = z \end{cases}$$

fiind relaţiile ce caracterizează o perspectivitate $O_2 - \alpha$, putem scrie

$$z = V(x, y\,;\, l, m, n) \Rightarrow z = V[x, f(y)\,; l, m, \varphi(l, m, n)]$$
$$\forall\ x, y, z, l, m, n \in Q$$

sau

$$V(x, y\,;\, l, m, n) = V[x, f(y)\,;\, l, m, \varphi(l, m, n)].$$

Ţinînd seama de relaţia (5), avem

$$V(x, y\,;\, l, m, O) + n = V[x, f(y)\,;\, l, m, 0] + \varphi(l, m, n)\,. \tag{13}$$

relaţie care pentru $x = y = 0$ ne conduce la

$$n = V(0, a, l, m, 0) + \varphi(l, m, n),$$

unde $a = f(0)$. Substituind atunci pe n în relaţia (13), găsim

$$V(x, y\,;\, l, m, 0) + V(0, a, l, m, 0) + \varphi(l, m, n) =$$
$$V[x, f(y)\,;\, l, m, 0] + \varphi(l, m, n)$$

sau

$$V(x, y\,;\, l, m, 0) + V(0, a, l, m, 0) = V[x, f(y)\,;\, l, m, 0] \tag{14}$$

sau

$$V(x, y\,;\, l, m, 0) + T_2(a, m, 0) = V[x, f(y)\,;\, l, m, 0],$$

adică

$$V(x, y\,;\, l, m, 0) + a \circ m = V[x, f(y)\,;\, l, m, 0] \tag{15}$$

şi deci

$$V(x, y\,;\, l, m, 0) = V[x, f(y)\,;\, l, m, 0] - a \circ m. \qquad (15)$$

În această relaţie luînd $x = 0$ şi $m = 1$, găsim

$$T_2(y, 1, 0) = T_2[f(y), 1, 0)] - a$$

sau

$$y = f(y) - a$$

adică

$$f(y) = y + a \tag{16}$$

Substituind pe $f(y)$ în (15) obținem

$$V(x, y ; l, m, 0) + a \circ m = V(x, y + a ; l, m, 0),$$

sau, avînd în vedere că

$$a \circ m = V(0, a ; l, m, 0),$$

putem scrie

$$V(x, y + a ; l, m, 0) = V(x, y ; l, m, 0) + V(0, a ; l, m, 0). \tag{17}$$

Această relație pentru $y = 0$, devine

$$V(x, a ; l, m, 0) = V(x, 0 ; l, m, 0) + V(0, a ; l, m, 0)$$

sau

$$V(x, a ; l, m, 0) = T_1(x, l, 0) + T_2(a, m, 0),$$

adevărată pentru orice a din Q.

Pentru $a = y$, avem

$$V(x, y ; l, m, 0) = T_1(x, l, 0) + T_2(y, m, 0)$$

și deci

$$V(x, y ; l, m, 0) = x \cdot l + y \circ m, \tag{18}$$

Dacă adunăm în ambii membrii pe n și ținem seama de relația (5), obținem

$$V(x, y ; l, m, n) = x \cdot l + y \circ m + n \tag{19}$$

Din relațiile (11) și (18) rezultă că $(Q, +)$ este grup abelian.

Pe de altă parte, considerînd relația (17), putem scrie, ținînd seama de (19)

$$x \cdot l + (y + a) \circ m = x \cdot l + y \circ m + a \circ m,$$

care ne conduce la

$$(y + a) \circ m = y \circ m + a \circ m,$$

relație ce exprimă proprietatea de distributivitate din dreapta a operației „$\circ$" față de adunare.

(Intrat în redacție a 12 noiembrie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Groze, V., *Asupra coordonatizării și scufundării structurilor de incidență* (sub tipar)

О ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТРУКТУРАХ ПАДЕНИЯ

(Резюме)

В статье распространяется метод обобщения проективной плоскости, данный в [1], на трёхмерное пространство. Определяется структура трёхмерного падения аналогично с [1] и вводится координатная система, затем изучается поведение присоединенной к ней алгебраической структуры в случае транзитивностей $O_i - \alpha (i = 1, 2, 3)$.

ON SPATIAL STRUCTURES OF INCIDENCE

(Summary)

The method of generalizing the projective plan given in [1] is extended to the 3-dimensional space.

Defining the structure of 3–D incidence by analogy with [1] it is co-ordinated, the algebraic structure associated to it being studied in the case of $O_i - \alpha$ $(i=1, 2, 3)$ transitivities.

SUR DES ESPACES A_n À CONNEXION AFFINE

P. ENGHIŞ

Dans son livre [1] M. Gh. Vrănceanu considère les espaces à connexion affine A_n, définis par n^3 fonctions Γ^i_{jk} comme les composants de la connexion affine. Pour l'étude de ces espaces, il associe au tenseur de torsion $T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{ki}$, n formes alternées $F^i = T^i_{jk}\, dx^j\, \delta x^k$ qui se transforment, par un changenent de variables, comme les composants d'un vecteur contrevariant. Au vecteur de torsicn $T_k = T^i_{ik}$ il associe la forme de Pfaff invariante $\sigma = T_k dx^k$ et au tenseur quadratique de torsion $T_{kl} = T^i_{jk}\, T^j_{il}$ la forme quadratique $\pi = T_{kl}\; dx^k dx^l$ et il considère le cas dans lequel σ et π ne sont pas identiquement nulles. Pour le cas des espaces A_3 il envisage aussi le cas dans lequel σ et π sont identiquement nulles.

Dans un travail antérieur [3] je me suis occupé de certains espaces à connexion affine A_4 avec les formes σ et π identiquement nulles.

Dans ce travail je me propose d'étudier deux classes d'espaces $\check{A}_n$.

1. Parmi les espaces A_n je considère d'abord ceux pour lesquels la différentielle extérieure de la forme σ vérifie la relation:

$$D\sigma = \frac{1}{2}\, T_i T^i_{hk}\, [dx^h\, dx^k] \tag{1,1}$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i}\right) [dx^i\, dx^j] = T_s\, T^s_{ij} [dx^i\, dx^j] \tag{1,2}$$

ou

$$\frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i} = T_s\, T^s_{ij} \tag{1,3}$$

espaces que je désigne par A_n.

En introduisant la dérivée covariante de T_i par rapport au Γ^i_{jk}, donnée par $T_{i,j} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \Gamma^s_{ij} T_s$ et en permutant les indices i et j, puis en faisant la différence des deux relations, on obtient:

$$T_{i,j} - T_{j,i} = \frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i} - T_s T^s_{ij} \tag{1,4}$$

On déduit des relations (1,3) et (1,4)

$$T_{i,j} - T_{j,i} = 0 \tag{1,5}$$

relation qui caractérise les espaces $\tilde{A}_n$. Donc:

Théorème 1.1. *Les espaces $\tilde{A}_n$ sont des espaces A_n pour lesquels le vecteur de torsion vérifie la relation* (1,5).

Si nous désignons par

$$\Gamma^i_{jkh} = \frac{\partial \Gamma^i_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^h} + \Gamma^i_{sk} \Gamma^s_{jh} - \Gamma^i_{sh} \Gamma^s_{jk} \tag{1,6}$$

les composants du tenseur de courbure de la connexion Γ^i_{jk}, on sait, [1], [2] que dans le cas d'un espace A_n avec torsion on peut écrire le tenseur (1,6) comme suit:

$$\Gamma^i_{jkh} = S^i_{jkh} + \frac{1}{2} \Omega^i_{jkh} \tag{1,7}$$

où S^i_{jkh} est le tenseur de courbure de la connexion symétrique $S^i_{jk} = \frac{1}{2} [\Gamma^i_{jk} + \Gamma^i_{kj}]$ associée à la connexion Γ^i_{jk} · S^i_{jkh} est donné par une formule analogue à (1,6), dans laquelle Γ^i_{jk} est remplacé par S^i_{jk}, et Ω^i_{jkh} est le tenseur donné par

$$\Omega^i_{jkh} = \frac{\partial T^i_{jh}}{\partial x^k} - \frac{\partial T^i_{jk}}{\partial x^h} - \frac{1}{2} T^i_{sh} T^s_{jk} + \frac{1}{2} T^i_{sk} T^s_{jh} +$$
$$S^p_{jh} T^i_{pk} + S^i_{pk} T^p_{jh} - S^p_{jk} T^i_{ph} - S^i_{ph} T^p_{jk} \tag{1,8}$$

En contractant dans (1,8) par rapport à i et j nous obtenons

$$\Omega^i_{ikh} = \frac{\partial T_h}{\partial x^k} - \frac{\partial T_k}{\partial x^h} - \frac{1}{2} T^i_{sh} T^s_{ik} + \frac{1}{2} T^i_{sk} T^s_{ih} + S^p_{ih} T^i_{pk} +$$
$$+ S^i_{pk} T^p_{ih} - S^p_{ik} T^i_{ik} - S^i_{ph} T^p_{ik};$$

par un changement convenable des indices de sommation; il en résulte

$$\Omega^i_{ikh} = \Omega_{kh} = \frac{\partial T_h}{\partial x^k} - \frac{\partial T_k}{\partial x^h} \tag{1,9}$$

La relation (1,9) montre que la différentielle extérieure de la forme σ dans un A_n coïncide avec la forme antisymétrique associée au tenseur Ω_{hk}^{-}. Il résulte de (1,3) et (1,9)

$$\Omega_{kh} = T_s \cdot T^s_{hk} \tag{1,10}$$

La relation (1,10) donne une interprétation du tenseur du second membre de la relation (1,1). On peut aussi énoncer le résultat sous la forme :

THÉORÈME 1.2. *Les espaces $\tilde{A}_n$ sont les espaces A_n pour lesquels*

$$\Omega_{kh} = T_s T^s_{hk}$$

Soit maintenant

$$\begin{aligned} R_{kh} &= \Gamma^i_{ikh} = \frac{\partial \Gamma_h}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_k}{\partial x^h} \qquad \underbrace{(\Gamma_k = \Gamma^i_{ik})} \\ \Gamma_{jh} &= \Gamma^i_{jih} = \frac{\partial \Gamma^i_{jh}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma^i_{ji}}{\partial x^h} + \Gamma^i_{si}\Gamma^s_{jh} - \Gamma^i_{sh}\Gamma^s_{ji} \end{aligned} \tag{1,11}$$

les tenseurs contractés du tenseur de courbure Γ^i_{jkh}. Nous montrons :

THÉORÈME 1.3. *Les tenseurs contractés du tenseur de courbure dans un $\tilde{A}_n$ satisfont la relation*

$$\Gamma_{jh} - \Gamma_{hj} = R_{jh} + T^i_{jh,i} + T_s T^s_{jh} \tag{1,12}$$

En effet, si dans la relation connue [1], qui existe entre le tenseur de courbure et le tenseur de torsion :

$$\Gamma^i_{jkh} + \Gamma^i_{khj} + \Gamma^i_{hjk} = T^i_{jh,k} + T^i_{kj,h} + T^i_{hk,j} + T^s_{jh} T^i_{ks} + T^s_{kh} T^i_{js} + T^s_{kj} T^i_{hs}$$

nous contractons en i et k, nous obtiendrons :

$$\Gamma_{jh} + R_{hj} - \Gamma_{hj} = T^i_{jh,i} - T_{h,j} + T_{j,h} + T_s T^s_{jh}$$

De cette relation et de (1,5) on déduit (1, 12)

On sait [2], que dans un espace riemannien il existe une connexion asymétrique, que les géodésiques sont les courbes autoparallèles, qu'il existe n champs de vecteurs parallèles linéairement indépendants et que les angles entre deux directions dans un point et les directions parallèles dans un autre point arbitraire sont égaux. Pour un tel espace on sait [2] que l'on a la relation :

$$T^i_{jh,k} - T^i_{jk,h} - T^i_{kh,j} + \frac{1}{2}\left(T^s_{jh} T^i_{sk} - T^s_{jk} T^i_{sh} - T^s_{kh} T^i_{sj}\right) = 0 \tag{1,13}$$

Désignons maintenant par $\tilde{V}_n$ un espace riemannien doué d'une telle connexion et qui vérifie la relation (1,1), c'est-à-dire que $\tilde{V}_n$ est un espace $\tilde{A}_n$.

Contractant (1,13) par rapport à i et j nous obtenons

$$T_{h,k} - T_{k,h} - T^i_{kh,i} + \frac{1}{2} T^s_{kh} T_s = 0$$

En tenant compte de (1,5) il résulte

$$T^i_{kh,i} = \frac{1}{2} T_s T^s_{kh} \tag{1,14}$$

Donc :

THÉORÈME 1.4. *Dans un espace riemannien* $\tilde{V}_n$ *a lieu la relation* (1,14)

En tenant compte que dans un $\tilde{A}_n$ (1,10) est vérifiée, le théorème 1.4 peut être énoncé ainsi :

THÉORÈME 1.5. *Dans un espace riemannien* $\tilde{V}_n$ *a lieu la relation*

$$\Omega_{kh} = - 2T^i_{kh,i} \tag{1,15}$$

De (1,9), (1,12) et (1,14) il résulte

THÉORÈME 1.6. *Dans un espace* V_n *nous avons la relation*

$$\Gamma_{jh} - \Gamma_{hj} = R_{jh} + \frac{3}{2} \Omega_{hj} \tag{1,16}$$

entre les tenseurs contractés du tenseur de courbure.

2. Nous considérons maintenant les espaces A_n pour lesquels :

$$D\sigma = \frac{1}{2} R_{kh} [dx^k dx^h] \tag{2,1}$$

où R_{kh} est donné par la première relation (1,11). On note ces espaces par $\tilde{\tilde{A}}_n$. Si l'on tient compte de l'expression de R_{kh} donnée par (1,11) la relation (2,1) est équivalente à

$$\frac{\partial T_i}{\partial x^j} - \frac{\partial T_j}{\partial x^i} = \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_j}{\partial x^i} \tag{2,2}$$

de laquelle il résulte

$$\frac{\partial (T_i - \Gamma_i)}{\partial x^j} = \frac{\partial (T_j - \Gamma_j)}{\partial x^i} \tag{2,3}$$

En tenant compte de $T_i = \Gamma^s_{si} - \Gamma^s_{is} = \Gamma_i - \Gamma^s_{is}$, (2,3) devient

$$\frac{\partial \Gamma^s_{is}}{\partial x^j} = \frac{\partial \Gamma^s_{js}}{\partial x^i} \tag{2,4}$$

relation qui caractérise la connexion de ces espaces. On peut écrire aussi la relation (2,4) sous la forme :

$$\Gamma^s_{is} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} \tag{2,5}$$

où φ est une fonction arbitraire de x^i. Donc :

THÉORÈME 2.1. *La connexion des espaces* $\tilde{\tilde{A}}_n$ *satisfait la relation* (2,4) *ou* (2,5).

Des relations (1,9) et (2.2) il résulte

$$R_{ij} = \Omega_{ij} \tag{2,6}$$

Donc :

THÉORÈME 2.2. *Les espaces* $\tilde{\tilde{A}}_n$ *sont les espaces* A_n *pour lesquels* $R_{ij}=\Omega_{ij}$.

Si dans la relation (2,2) nous introduisons la dérivée covariante par rapport aux Γ^i_{jk}, il résulte

$$\Omega_{ij} = R_{ij} = T_{j,i} - T_{i,j} + T_s T^s_{ji} \tag{2,7}$$

Pour le deuxième tenseur contracté du tenseur de courbure de (2,4) on obtient :

$$\Gamma_{ji} - \Gamma_{ij} = T^k_{ji,k} \tag{2,8}$$

Donc :

THÉORÈME 2.3. *Dans un espace* $\tilde{\tilde{A}}_n$ *les tenseurs contractés du tenseur de courbure sont donnés par* (2,7) *et* (2,8).

Si l'espace $\tilde{\tilde{A}}_n$ est un espace riemannien doué d'une connexion asymétrique, donc un $\tilde{\tilde{V}}_n$, de (1,13), (2,7) et (2,8) on déduit par contraction par rapport à i et j

$$\Gamma_{hk} - \Gamma_{kh} = R_{hk} + \frac{3}{2} T_s T^s_{hk} \tag{2,9}$$

Donc :

THÉORÈME 2.4. *Un espace riemannien* $\tilde{\tilde{V}}_n$ *vérifie la relation* (2,9).

Remarques : 1. Un exemple d'espaces $\tilde{A}_n$ et $\tilde{\tilde{A}}_n$ est constitué par certaines catégories d'espaces A_n à connexion semi-symétrique.

Il est connu [2] que, si l'espace A_n est doué d'une connexion semi-symétrique, la connexion peut être écrite

$$\Gamma^i_{jk} = S^i_{jk} + \delta^i_j \lambda_k$$

où λ_k est un vecteur covariant et S^i_{jk} est une connexion symétrique.

Un espace A_n à connexion semi-symétrique est un espace $\tilde{A}_n$ si le vecteur λ_i satisfait à la condition

$$\lambda_{i,j} - \lambda_{j,i} = 0$$

Un espace A_n à connexion semi-symétrique est un espace $\tilde{\tilde{A}}_n$ si

$$\frac{\partial S_i}{\partial x^j} - \frac{\partial S_j}{\partial x^i} = (1 - n)\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial x^j} - \frac{\partial \lambda_j}{\partial x^i}\right)$$

2. Si l'espace A_n est simultanément $\tilde{A}_n$ et $\tilde{\tilde{A}}_n$ nous avons

$$T_s T^s_{ij} = \Omega_{ji} = R_{ji} \text{ et } \Gamma_{jh} - \Gamma_{hj} = T^i_{jh,i}$$

3. Si l'espace A_n est un $\tilde{V}_n$ et $\tilde{\tilde{V}}_n$ nous avons

$$\Gamma_{hk} - \Gamma_{kh} = \frac{1}{2} R_{kh}$$

et la relation (1,12) est une identité.

Le but de ce travail a été de donner les relations vérifiées par les espaces considérés en partant de leur définition. Les autres propriétés de ces espaces seront étudiées ultérieurement, de même que l'extension à des espaces récurrents et à des espaces avec structure complexe et presque-complexe.

La suggestion de considérer ces espaces et leur extension m'a été donnée par M. le Prof. Gh. Th. Gheorghiu, à qui j'exprime mes remerciements.

(Manuscrit reçu le 12 novembre 1971)

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Vrănceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., 1952.
2. Eisenhart, L. P., *Non Riemannian Geometry*, „Am. Math. Soc. Coll. Publ.", **VIII**, 1927.
3. Enghiş, P., *Sur les espaces à connexion affine A_4 avec torsion* „Stud. Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mec.", **XV**, 1, p. 15–21, 1970.

ASUPRA UNOR SPAŢII A_n CU CONEXIUNE AFINĂ

(Rezumat)

În lucrare se consideră două categorii de spaţii A_n cu conexiune afină, spaţiile $\tilde{A}_n$ date de (1,1) şi $\tilde{\tilde{A}}_n$ date de (2,1), pentru care se dau relaţiile (1,5), (1,10), (1,12) respectiv (2,4), (2,6), (2,7), (2,8) ce le verifică pornind de la definiţie.

Se consideră de asemeni şi spaţiile riemanniene dotate cu conexiune asimetrică ce intră în această categorie şi se dau relaţiile (1,14), (1,15), (1,16) şi (2,9).

Se dă şi un exemplu de spaţii $\tilde{A}_n$ şi $\tilde{\tilde{A}}_n$ în remarca 1, iar în 2 şi 3 se dau relaţiile ce există în spaţiile ce verifică simultan (1,1) şi (2,1).

О НЕКОТОРЫХ A_n ПРОСТРАНСТВАХ С АФФИННОЙ СВЯЗЬЮ

(Резюме)

Рассматриваются две категории A_n пространств с аффинной связью, $\tilde{A}_n$ пространства данные формулой (1,1) и $\tilde{\tilde{A}}_n$ пространства, данные формулой (2,1), для которых даются соотношения (1,5), (1,10) (1,12), соответственно (2,4), (2,6), (2,7), (2,8), которые удовлетворяются на основе определения.

Рассматриваются также римановые пространства, обладающие асимметрической связью, которые принадлежат к этой категории, и даются соотношения (1,14), (1,15), (1,16) и (2,9).

Даётся также пример $\tilde{A}_n$ и $\tilde{\tilde{A}}_n$ пространств в примечании 1, а в примечаниях 2 и 3 даются соотношения, существующие в пространствах, одновременно удовлетворяющих соотношениям (1,1) и (2,1).

SUR UNE PROPRIÉTÉ D'ÉTOILEMENT DANS LA THÉORIE DE LA REPRÉSENTATION CONFORME

PETRU T. MOCANU

1. Le but de cette note est de mettre en évidence une notion géométrique dans la théorie de la représentation conforme, en unifiant les deux notions de convexité généralisée que nous avons introduites dans quelques travaux antérieurs, [1], [2], [3], chacune des ces notions constituant un „passage continu" de l'étoilement par rapport à l'origine à la convexité. Avant de donner la notion plus générale en question, nous allons rappeler les définitions de ces deux notions.

2. Soit f une fonction holomorphe et univalente dans un domaine D qui contient l'origine et $f(0) = 0$. Désignons par C une courbe de Jordan de classe C^2 entourant l'origine, qui est contenue avec son intérieur dans D et d'équation $z = \varphi(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, $\varphi(t_0) = \varphi(t_1)$. Soit $\Gamma = f(C)$ l'image de C par la fonction f, et désignons par $\omega(t)$ l'angle fait par la tangente à la courbe Γ au point $f(z)$ avec le vecteur de position de ce point.

DÉFINITION 1. On dit que la courbe $\Gamma = f(C)$ est α-convexe pour un α réel donné, si l'angle $\Phi(t)$ fait avec l'axe réel positif par le vecteur dont l'origine est le point $f(z) \in \Gamma$ et qui divise dans le rapport α l'angle fait avec le vecteur de position par la tangente à Γ au point $f(z)$, $z = \varphi(t)$, croît avec t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, c'est à dire que

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\arg f(\varphi(t)) + \alpha\omega(t)\right] \geqslant 0, \ t \in [t_0, t_1].$$

Faisons la remarque que dans le travail [2] a été considérée la normale extérieure au lieu de la tangente et que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$.

THÉORÈME 1. [2]. *La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe $\Gamma = f(C)$ soit α-convexe est que pour tout $t \in [t_0, t_1]$ soit vérifiée l'inégalité*

$$\operatorname{Im}\left[(1-\alpha)\frac{\dot{z}f'(z)}{f(z)} + \alpha\left(\frac{\dot{z}f''(z)}{f'(z)} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)\right] \geqslant 0. \tag{1}$$

Pour $\alpha = 0$, respectivement $\alpha = 1$, on obtient la condition respective d'étoilement (par rapport à l'origine) ou de convexité.

3. Soit $C : z = \varphi(t, r)$, $t \in [t_0, t_1]$, $r \in [0, +\infty)$, $\varphi(t, 0) = 0$, une famille de courbes de Jordan de classe C^2 isotopes qui se contractent à l'origine. Considérons deux fonctions f et g holomorphes et univalentes dans un domaine qui contient ces courbes et notons $\Gamma_r^f = f(C_r)$, $\Gamma_r^g = g(C_r)$. Supposons $f(0) = g(0) = 0$ et que pour $\rho < r$ la courbe Γ_ρ^g soit située à l'intérieur de Γ_r^f. Supposons encore que la courbe Γ_ρ^g soit convexe. Du point $f(z) \in \Gamma_r^f$, $z = \varphi(t, r)$, menons une tangente quelconque T_t à la courbe Γ_ρ^g.

DÉFINITION 2. On dit que la courbe Γ_r^f est étoilée par rapport à la courbe Γ_ρ^g, $\rho < r$, si l'angle $\Psi(t)$ fait avec l'axe réel positif par toute tangente T_t croît avec le paramètre $t \in [t_0, t_1]$, c'est à dire

$$\frac{d\Psi}{dt} \geqslant 0.$$

THÉORÈME 2. [3]. *La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe Γ_r^f soit étoilée par rapport à la courbe Γ_ρ^g est que*

$$\operatorname{Im} \frac{\frac{dz}{dt} f'(z)}{f(z) - g(\zeta)} \geqslant 0, \tag{2}$$

pour tout $z = \varphi(t, r)$ et tout $\zeta = \varphi(\tau, \rho)$, où τ vérifie l'équation

$$\operatorname{Im} \frac{\frac{d\zeta}{dt} g'(\zeta)}{f(z) - g(\zeta)} = 0. \tag{3}$$

4. En utilisant les notations précédentes, on désigne par $\Omega = \Omega(t)$ l'angle fait par la tangente à la courbe Γ_r^f au point $f(z) \in \Gamma_r^f$ avec la tangente T_t. Nous allons introduire la définition suivante:

DÉFINITION 3. On dit que la courbe Γ_r^f est α-étoilée par rapport à la courbe Γ_ρ^g, $\rho < r$, pour un α réel donné si, quelle soit la tangente T_t l'angle $\chi = \chi(t)$ fait avec l'axe réel positif par le vecteur dont l'origine est le point $f(z) \in \Gamma_r^f$ et qui divise dans le rapport α l'angle $\Omega(t)$, croît avec t, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, c'est à dire

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\Psi(t) + \alpha\,\Omega(t)\right] \geqslant 0. \tag{4}$$

THÉORÈME 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe Γ_r^f soit α-étoilée par rapport à Γ_g^ρ est que*

$$\operatorname{Im}\left[(1-\alpha)\frac{\dot{z}f'(z)}{f(z) - g(\zeta)} + \alpha\left(\frac{\dot{z}f''(z)}{f'(z)} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right)\right] \geqslant 0, \tag{5}$$

$\left(\dot{z} = \frac{dz}{dt}, \ \ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2}\right)$, *pour tout* $z = \varphi(t, r)$ *et tout* $\zeta = \varphi(\tau, \rho)$, *où* τ *vérifie l'équation*

$$\operatorname{Im} \frac{\frac{d\zeta}{d\tau} g'(\zeta)}{f(z) - g(\zeta)} = 0. \tag{6}$$

Démonstration. Désignons par $f(z)$, $z = \varphi(t, r)$ un point quelconque de la courbe Γ_r^f et considérons la tangente T_t à la courbe Γ_ρ^g passant par le point $f(z)$. Soit $g(\zeta)$, $\zeta = \varphi(\tau, \rho)$, le point de tangence sur Γ_ρ^g. La condition pour que T_t soit tangente à la courbe Γ_ρ^g au point $g(\zeta)$ peut être écrite sous la forme (6). On a

$$\Psi = \arg\,[f(z) - g(\zeta)]$$

et

$$\Omega = \arg \frac{\dot{z} f'(z)}{f(z) - g(\zeta)}.$$

Donc

$$\chi = (1 - \alpha) \arg\,[f(z) - g(\zeta)] + \alpha \arg \dot{z} f'(z). \tag{7}$$

En vertu de l'égalité

$$\operatorname{Log}\,[f(z) - g(\zeta)] = \ln |f(z) - g(\zeta)| + i \arg\,[f(z) - g(\zeta)]$$

on déduit, en tenant compte de (6)

$$\frac{d}{dt} \arg\,[f(z) - g(\zeta)] = \operatorname{Im} \frac{\dot{z} f'(z)}{f(z) - g(\zeta)}.$$

Puisque

$$\frac{d}{dt} \arg \dot{z} f'(z) = \operatorname{Im} \left[\frac{\dot{z} f''(z)}{f'(z)} + \frac{\ddot{z}}{\dot{z}}\right]$$

de (4) et (7) on obtient (5) ce qui achève la démonstration.

Pour $\alpha = 0$, de (5) et (6) on obtient (2) et (3). Pour $g(z) \equiv 0$, l'inégalité (5) devient (1), c'est à dire qu'on obtient la condition de α-convexité.

5. Si les courbes C_r sont des cercles centrés à l'origine, c'est à dire $z = re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, le théorème 3 devient:

La condition nécessaire et suffisante pour que la courbe Γ_r^f soit α-étoilée par rapport à Γ_ρ^g, $\rho < r$, est

$$\operatorname{Re}\left[(1 - \alpha) \frac{zf'(z)}{f(z) - g(\zeta)} + \alpha \left(\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1\right)\right] \geqslant 0$$

pour tout z, $|z| = r$, et tout $\zeta = \zeta(z)$ qui vérifie le système

$$\operatorname{Re} \frac{\zeta g'(\zeta)}{f(z) - g(\zeta)} = 0, \ |\zeta| = \rho.$$

Pour $\alpha = 0$ et $f = g$ on obtient la condition donnée dans [1].

Dans le cas particulier $g(z) \equiv z$, on obtient le résultat suivant:

Supposons que pour $|z| = r$ on a $|f(z)| > \rho$, où $\rho < r$. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que l'image du cercle $\{z\,;\,|z| = r\}$ soit α-étoilée par rapport au cercle $\{z\,;\,|z| = \rho\}$ est que

$$(1-\alpha)\frac{1}{\sqrt{|f(z)|^2-\rho^2}}\operatorname{Re}\left[\frac{zf'(z)}{f(z)}\left(\sqrt{|f(z)|^2-\rho^2}+i\rho\right)\right]+\alpha\operatorname{Re}\left(\frac{zf''(z)}{f'(z)}+1\right)\geqslant 0,$$

pour tout z, $|z| = r$.

(Manuscrit reçu le 12 janvier 1972)

BIBLIOGRAPHIE

1. Mocanu, P. T., *Convexity and Starlikeness of Conformal Mappings*, „Mathematica (Cluj)", **8** (31), 1, 1966, pp. 91—102.
2. Mocanu, P. T., *Une propriété de convexité généralisée dans la théorie de la représentation conforme*, „Mathematica (Cluj)", **11** (34), 1, 1969, pp. 127—133.
3. Mocanu, P. T., *Sur la géométrie de la représentation conforme*, „Mathematica (Cluj)", **12** (35), 2, 1970, pp. 299—308.

ASUPRA UNEI PROPRIETĂŢI DE STELARITATE ÎN TEORIA REPREZENTĂRII CONFORME

(Rezumat)

În această notă se pune în evidenţă o noţiune geometrică în teoria reprezentării conforme, care unifică două noţiuni de convexitate generalizată introduse de autor în lucrările anterioare [1], [2], [3], fiecare dintre aceste noţiuni constituind o „trecere continuă" de la stelaritate în raport cu originea la convexitate.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЗВЁЗДООБРАЗНОСТИ В ТЕОРИИ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

(Резюме)

В статье даётся геометрическое понятие в теории конформного отображения, которое объединяет два понятия обобщённой выпуклости, введённых автором в предыдущих работах [1], [2] и [3]. Каждое из этих понятий является „непрерывным переходом" от звёздообразности, в отношении с началом, к выпуклости.

CL-PRODUCTS OF C-AND L-SPACES[1]

CHRIS C. BRAUNSCHWEIGER[2]

1. Preliminaries. If $(X, ||\cdot||_X)$ and $(Y, ||\cdot||_Y)$ are normed vector spaces and $z = (x, y)$ is any element of the product space $Z = X \times Y$ define $||z||_C = \max\ (||x||_X, ||y||_Y)$ and $||z||_L = ||x||_X + ||y||_Y$. The normed vector space $(Z, ||\cdot||\ )$ is called the *C-product* of X and Y and is denoted by $(X \times Y)_C$. Likewise, $(Z, ||\cdot||_L) = (X \times Y)_L$ is the *L-product* of X and Y.

If X and Y are partially ordered vector spaces with positive cones K_X and K_Y, respectively, then the product space $Z = X \times Y$ has a natural partial order, the *product order,* whose positive cone is $K_Z = K_X \times K_Y$. If X and Y are vector lattices so is Z in the product order.

For each element x of a vector lattice, $|x| = \sup\ (x, -x)$. A vector lattice (X, K) which is also a Banach space $(X, ||\cdot||)$ is a *Banach lattice* if $||y|| \geqslant ||x||$ whenever $|y| - |x| \in K$.

The folowing result can be verified by a straightforward application of the definitions.

(1.1) THEOREM. *The C-product (resp. L-product) of Banach lattices is a Banach lattice in its product order.*

2. C-and L-products of C-and L-spaces. A Banach lattice $(X, K, ||\cdot||)$ satisfying the condition

$$(L) : ||x + y|| = ||x|| + ||y|| \text{ if } x, y \in K$$

is called an *abstract* (L)*-space.* It is an *abstract* (M)*-space* if it satisfies

$$(M) : ||\sup\ (x, y)|| = \max\ (||x||, ||y||) \text{ if } x, y \in K.$$

Suppose that $(X, K_X, ||\cdot||_X)$ and $(Y, K_Y, ||\cdot||_Y)$ are Banach lattices both satisfying condition (L). Let $w = (u, v)$ and $z = (x, y)$ be any elements in the positive cone $K_Z = K_X \times K_Y$ of $Z = X \times Y$. Since $u,\ x \in K_X$ and $v,\ y \in K_Y$, $||w + z||_L = ||u + x||_X + ||v + y||_Y = (||u||_X + ||x||_X) + (||v||_X + ||y||_Y) = (||u||_X + ||v||_Y) + (||x||_X + ||y||_Y) = ||w||_L + ||z||_L$. Thus $(X \times Y)_L$ also satisfies condition (L). In an analogous way one shows that if both X and Y satisfy (M) then so does $(X \times Y)_C$. On the other hand,

[1] Presented to the American Mathematical Society, January 25, 1969.

[2] Research supported by National Science Foundation under Grant No. NSF—G—6861.

if either X or Y, say X, fails to satisfy (L) there is a pair $x_1, x_2 \in K_X$ such that $||x_1 + x_2||_X \neq ||x_1||_X + ||x_2||_X$. But then, for the pair $z_1 = (x_1, \theta_Y)$, $z_2 = (x_2, \theta_Y)$ in K_Z, $||z_1 + z_2||_L \neq ||z_1||_L + ||z_2||_L$ and the product $(X \times Y)_L$ fails to satisfy condition (L). A similar argument shows that if $(X \times Y)_C$ satisfies condition (M) then both X and Y must satisfy (M). The following theorem now follows from the definitions and Theorem (1.1).

(2.1) THEOREM. *If X and Y are Banach lattices then, in the product order,*

a) *$(X \times Y)_C$ is an abstract (M)-space if and only if both X and Y are abstract (M)-spaces;*

b) *$(X \times Y)_L$ is an abstract (L)-spaces if and only if both X and Y are abstract (L)-spaces.*

An element u of a Banach lattice $(X, K, ||\cdot||)$ is a *unit element* if $u \in K$, $||u|| = 1$ and $u - x \in K$ for all x with $||x|| \leqslant 1$. An element v of a vector lattice (X, K) is an *F-unit* if $v \in K \sim \{\theta\}$ and $\inf (x, v) \in K \sim \{\theta\}$ for each $x \in K \sim \{\theta\}$. An abstract (L)-space with F-unit is called an *L-space*. An abstract (M)-space with unit element is a *C-space*. (S. Kakutani showed in [2] that a C-space is linear isometric and lattice isomorphic to the space $C(H)$ of all continuous real valued functions over a suitable compact Hausdorff space H, and in [3] that an L-space is linear isometric and lattice isomorphic to a space $L(M, F, m)$ of equivalence classes of real valued functions defined over a (totally disconnected Hausdorff) space M and integrable with respect to a countably additive measure m defined on a field F of Borel sets in M with $m(M) = 1$.)

(2.2) LEMMA. *If X and Y are Banach lattices then $w = (u, v)$ is a unit element of $(X \times Y)$ in the product order if and only if u is a unit element of X and v is a unit element of Y.*

Proof: Suppose that $w = (u, v)$ is a unit element of $Z = (X \times Y)_C$. Then $1 = ||w||_C = \max (||u||_X, ||v||_Y)$ so either $||u||_X = 1$ and $||v||_Y \leqslant 1$ or $||u||_X \leqslant 1$ and $||v||_Y = 1$. Without loss of generality assume that $||u||_X = 1$. If $0 < ||v||_Y < 1$ let $y = \beta v$ where $1 < \beta < ||v||_Y^{-1}$ and define $z = (u, y)$. Then $||z||_C = \max (||u||_X, ||y||_Y) = \max (1, \beta||v||_Y) = 1$ and, since w is a unit element of Z, $w - z \in K_Z$. But $w - z = (\theta_X, v - y) = (\theta_X, (1 - \beta)v)$ so $(1 - \beta)v \in K_Y$. Since $1 - \beta < 0$ and $v \in K_Y$, $(1 - \beta)v \in - K_Y$. This contradicts that $K_Y \cap (- K_Y) = \{\theta_Y\}$. If $v = \theta_Y$ choose $z = (u, y)$ where $y \in K_Y$ and $0 < ||y||_Y \leqslant 1$. Then $||z||_C = \max (||u||_X, ||y||_Y) \leqslant 1$ and $w - z = (\theta_X, - y) \in K_Z$. Since $y \in K_Y \cap (- K_Y)$ and $y \neq \theta_X$ we again have a contradiction. The conclusion is that $||w||_C = ||u||_X = ||v||_Y = 1$. If $x \in X$ with $||x||_X \leqslant 1$ let $z = (x, v)$. Then $||z||_C \leqslant 1$ so $w - z \in K_Z$ and, therefore, $u - x \in K_X$. Thus u is a unit element of X. Similarly, if $||y||_Y \leqslant 1$ setting $z = (u, y)$ gives $v - y \in K_Y$ so v is a unit element of Y. The verification of the converse is straightforward.

(2.3) LEMMA. *If X and Y are vector lattices then $w = (u, v)$ is an F-unit in the product order for $Z = X \times Y$ if and only if u is an F-unit for X and v is an F-unit for Y.*

Proof: Let $w = (u, v)$ where u is an F-unit for X and v is an F-unit for Y. If $z = (x, y) \in K_Z$ and $z \neq \theta_Z = (\theta_X, \theta_Y)$ then $x \in K_X$, $y \in K_Y$ and at least one of $x \neq \theta_X$ or $y \neq \theta_Y$ holds. Suppose $x \neq \theta_X$. It follows that $\inf_X(x, u) \in K_X \sim \{\theta_X\}$, $\inf_Y(y, v) \in K_Y$ and, consequently, $\inf_Z(w, z) = (\inf_X(x, u), \inf_Y(y, v)) \in K_Z \sim \{\theta_Z\}$. Thus w is an F-unit for Z. Conversely, suppose $w = (u, v)$ is an F-unit for $Z = X \times Y$ in the product order. Since $w \in K_Z \sim \{\theta_Z\}$, $u \in K_X$, $v \in K_Y$ and either $u \neq \theta_X$ or $v \neq \theta_Y$. Suppose $u \neq \theta_X$. Set $z = (\theta_X, y)$ for some $y \in K_Y \sim \{\theta_Y\}$. Then $z \in K_Z \sim \{\theta_Z)$ so $\inf(w, z) = (\inf_X(u, \theta_X), \inf_Y(v, y)) \in K_Z \sim \{\theta_Z\}$. But $\inf_X(u, \theta_X) = \theta_X$ so $\inf_Y(v, y) \in K_Y \sim \{\theta_Y\}$ and, in particular, $v \neq \theta_Y$. If $x \in K_X \sim \{\theta_X\}$ then $z = (x, \theta_Y) \in K_Z \sim \{\theta_Z\}$ and $\inf_Z(w, z) = (\inf_X(u, x), \theta_Y) \in K_Z \sim \{\theta_Z\}$ so $\inf_X(u, x) \in K_X \sim \{\theta_X\}$ and u is an F-unit for X. Similarly v is an F-unit for Y.

(2.4) THEOREM. *If X and Y are Banach lattices then in the product order,*

a) *$(X \times Y)_C$ is a C-space if and only if both X and Y are C-spaces;*

b) *$(X \times Y)_L$ is an L-space if and only if X and Y are L-spaces.*

Proof: This follows directly from Theorem (2.1), Lemma (2.2) and Lemma (2.3).

(2.5) THEOREM. *If X and Y are Banach lattices then, in the product order,*

a) *$(X \times Y)_L$ is not an abstract (M)-space, and*

b) *$(X \times Y)_C$ is not an abstract (L)-space.*

Proof: Choose $u \in K_X$ with $||u||_X = 1$ and $y \in K_Y$ with $||y||_Y = 2$. Let $w = (u, \theta_Y)$ and $z = (\theta_X, y)$. Then $w, z \in K_Z$ but $||\sup_Z(w, z)||_L = ||\sup_X(u, \theta_X)||_X + ||\sup_Y(\theta_Y, y)||_Y = ||u||_X + ||y||_Y = 1 + 2 = 3 \neq 2 = \max(||u||_X, ||y||_Y) = \max((||u||_X + ||\theta_Y||_Y) + (||\theta_X||_X + ||y||_Y)) = \max(||w||_L, ||z||_L)$. Thus (M) is not satisfied and *a*) holds. Now choose $u \in K_X$ with $||u||_X = 1$, $y \in K_Y$ with $||y||_Y = 1$ and let $v = 2y$, $x = 2u$, $w = (u, v)$ and $z = (x, y)$. Then $w \in K_Z$, $z \in K_Z$ and $||w + z||_C = \max(||u + x||_Y, ||v + y||_Y) = \max(3||u||_X, 3||y||_Y) = 3 \neq 4 = ||v||_Y + ||x||_X = \max(||u||_X, ||v||_Y) + \max(||x||_X, ||y||_Y) = ||w||_C + ||z||_C$. $(X \times Y)_C$ does not satisfy (L) and *b*) holds.

3. CL-product of C-and L-spaces. If X_1 and X_2 are normed spaces then each of the products $(X_1 \times X_2)_C$ and $(X_1 \times X_2)_L$ is a *CL-product of two factors*. By convention, any normed space is itself a *CL-product of one factor*. In general, the space Z is a *CL-product of x factors* $X_1, X_2, \ldots, X_n$, written $Z = (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n)_{CL}$ if $Z = (U \times V)_{CL}$ where U is a CL-product of p factors from among the X_i and V is a CL-product of the remaining $n - p$ spaces, $p = 1, 2, \ldots, n - 1$. If $X_1, X_2, \ldots, X_n$ are partially ordered with positive cones $K_1, K_2, \ldots, K_n$, respectively, the product order on $(X_1, X_2 \times \ldots \times X_n)_{CL}$ is that determined by the cone $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_n$.

If $Z = (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n)_{CL}$ then Z is called a *pure C-product* if no L-products are used; that is, if the norm on Z is $||z||_C = \max\{||x_i|| : i = 1, 2, \ldots, n\}$ for each $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ in Z. Similarly, when no

C-product is used in forming $Z = (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n)_{CL}$ the norm is $||z||_L = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||_i$ and Z is called a *pure L-product.*

If an L-product is involved in the formation of the CL-product Z then, according to Theorem (2.5) that product is not an abstract (M)-space. Thus only C-products are allowed if the CL-product is to be an abstract (M)-space. Furthermore, each factor space must be an abstract (M)-space according to Theorem (2.1). Similar comments hold for abstract (L)-spaces. The following theorem is an immediate consequence when simple induction is applied to the theorems of the preceding section.

(3.1) THEOREM. *For each $i = 1, 2, \ldots, n$ let X_i be a Banach lattice and let $Z = (X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n)_{CL}$. In the product order*

a) *Z is an abstract (M)-space (resp. C-space) if and only if each X is an abstract (M)-space (resp. C-space) and Z is the pure C-product of the X_i.*

b) *Z is an abstract (L)-space (resp. L-space) if and only if each X_i is an abstract (L)-space (resp. L-space) and Z is the L-product of the X_i.*

4. l-and m-products. It is not clear how one might extend the definition of (mixed) CL-product to infinitely many factors. However, the pure L-products and pure C-products are, in fact, special cases for finitely many factors of the more general l-products and m-products discussed in [1]. Let $\{(X_\alpha, ||\cdot||_\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}\}$ be any family of normed spaces. The space $Z_l = (X_\alpha x_\alpha)_l$ of all choice functions $z = \{x_\alpha\}$ with $x_\alpha \in X_\alpha$ such that $||x_\alpha||_\alpha = 0$ except for countably many indices α and the nonzero norms form a convergent series is called the *l-product* of the X_α when provided with the norm defined for each $z = \{x_\alpha\}$ in Z_l by $||z||_l = \sum_\alpha ||x_\alpha||$. The space $Z_m = (X_\alpha x_\alpha)_m$ of all choice functions $z = \{x_\alpha\}$ with $x_\alpha \in X_\alpha$ such that $\{||x_\alpha||_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ is bounded is called the *m-product* of the X_α with the norm $||z||_m = \sup \{||x_\alpha||_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$.

If each X_α is partially ordered with positive cone K_α the *product order* on Z_l (resp. Z_m) has as its positive cone K_l (resp. K_m) the set of all $z = \{x_\alpha\}$ in Z_l (resp. Z_m) with $x_\alpha \in K_\alpha$ for each $\alpha \in \mathcal{A}$.

With only minor modifications in the proofs, Theorem (2.1) and Lemma (2.2) can be extended to the case of possibly infinite families of Banach lattices.

(4.1) THEOREM. *If $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ is any family of Banach lattices then, in the product order,*

a) *Z_m is an abstract (M)-space if and only if each factor X_α is an abstract (M)-space;*

b) *Z_l is an abstract (L)-space if and only if each factor X_α is an abstract (L)-space.*

(4.2) LEMMA. *If $\{X_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ is any family of Banach lattices then $u = \{u_\alpha\}$ is a unit element of Z_m in the product order if and only if u_α si a unit element of X_α for each $\alpha \in \mathcal{A}$.*

Lemma (2.3) cannot be extended to l-oducts with such complete generality. An F-unit is, by definition, anon-zero element and at most countably many components x_α of an element $z = \{x_\alpha\}$ of an l-product are non-zero. These observations lead to the following extensions of Lemma (2.3) and Theorem (2.4).

(4.3) LEMMA.. *The l-product of uncountably many Banach lattices has no F-unit. If Z is the l-product of countably many Banach lattices* X_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, *then an element* $u = \{u_i\}$ *is an F-unit of* Z_l *if and only if each* u_i *is an F-unit of the corresponding factor space* X_i.

(4.4) THEOREM. *Let* $\{X_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *be a family of Banach lattices. In the product order*

a) Z_m *is a C-space if and only if each factor X is a C-space;*

b) Z_l *is an L-space if and only if* $\mathfrak{A}$ *is countable and each factor* X_α *is an L-space.*

An argument analagous to that used for Theorem (2.5) gives the final extension to infinite products.

(4.5) THEOREM. *Let* $\{X_\alpha : \alpha \in \mathfrak{A}\}$ *be any family of two or more Banach lattices. In the product order its l-product* Z_l *is not an abstract (M)-space and its m-product* Z_m *is not an abstract (L)-space.*

(Received November 2, 1971)

BIBLIOGRAPHY

1. J. R. Isbell, *Factorization of Banach spaces*, „Mathematica Scandinavica", **13** (1963), pp. 105–108.
2. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (M)-spaces*, „Annals of Mathematics", **42** (1941), 4, pp. 994–1024.
3. S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem*, „Annals of Mathematics", **42** (1941), 2, pp. 523–537.

CL-PRODUSE ALE *C*-ŞI *L*-SPAŢIILOR

(Rezumat)

Se definesc *C*-produsele, *L*-produsele şi *CL*-produsele a unui număr finit de latici Banach. Se dau caracterizări ale acestor produse ca *C*-spaţii şi *L*-spaţii în ordonarea produs. Se fac generalizări la *m* şi *l*-produse de familii infinite.

CL — ПРОИЗВЕДЕНИЯ *C*- И *L*-ПРОСТРАНСТВ

(Резюме)

Определяются *C*-произведения, *L*-произведения и *CL* - произведения конечного числа банаховых структур. Даются характеристики этих произведений как *C* пространств и *L*-пространств в упорядочении произведений. Делаются обобщения для бесконечных *m* и *l*-произведений семейств.

ON THE DEFINITION OF LINEAR RESTRICTED INFRAPOLYNOMIALS

I. MARUŞCIAC

1. Let K be a compact point-set in the complex plane, containing at least $n - r$ points and let $\mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ be the class of polynomials

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \tag{1}$$

with coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ satisfying the conditions

$$\alpha_{i0} a_0 + \alpha_{i1} a_1 + \ldots + \alpha_{in} a_n = \alpha_i, \ i = 0, 1, \ldots, r < n, \tag{2}$$

where

$$\alpha^r = \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \ldots & \alpha_{0n} & \alpha_0 \\ \alpha_{r0} & \ldots & \alpha_{rn} & \alpha_r \end{pmatrix}$$

is a given matrix of complex numbers with

$$\operatorname{rank}(\alpha_{ik}) = r + 1, \ \Sigma |\alpha_i| \neq 0.$$

A polynomial $q \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ is called underpolynomial to $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r$ $(q \neq p)$ on K, and we will use the notation $q \in \mathfrak{U}(K; p; \alpha^r)$, if

I $p(z) = 0, \ z \in K \Rightarrow q(z) = 0$;

II $p(z) \neq 0, \ z \in K \Rightarrow |q(z)| < |p(z)|$.

Definition 1. We say that $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ is a r-restricted infrapolynomial on K ($p \in \mathfrak{Y}_n(K; \alpha^r)$) if p has no underpolynomial in $\mathfrak{L}_n(\alpha^r)$, i.e. if $\mathfrak{U}(K; p; \alpha^r) = \Phi$.

The polynomial $q \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ is a *weak polynomial to* $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ [5], if

$$\forall z \in K \Rightarrow |q(z)| \leqslant |p(z)|.$$

Obviously a polynomial $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ which has no weak polynomial on K is a r-restricted infrapolynomial on K. But the inverse is not always true, i.e. there is r-restricted polynomials which has weak polynomials on K (see [9], p. 252).

In the case of the unrestricted infrapolynomials T. S. Motzkin and J. L. Walsh [5] have shown that unrestricted infrapolynomials on K have no weak polynomials on K. This property is true, as M. Zedek has shown [9], also in the case of the restricted infrapolynomials of the form

$$p(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \ldots + A_r z^{n-r} + a_{r+1} z^{n-r-1} + \ldots + a_n,$$

where $A_1, A_2, \ldots, A_r$ are prescribed coefficients.

It is the purpose of this note to extend this result over to some class of r-restricted infrapolynomials on K.

2. Definition 2. The matrix (α_{ik}), $i = 0, 1, \ldots, r$; $k = 0, 1, \ldots, n$, is called interpolatory on K if

$$\begin{vmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \ldots & \alpha_{0n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{r0} & \alpha_{r1} & \ldots & \alpha_{rn} \\ z_1^n & z_1^{n-1} & \ldots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_{n-r}^n & z_{n-r}^{n-1} & \ldots & 1 \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3}$$

for all distinct points $z_1, z_2, \ldots z_{n-r}$ of K.

Theorem. *Let (α_{ik}), $i = 0, 1, \ldots, r$; $k = 0, 1, \ldots, n$ be an interpolatory on K matrix. The polynomial $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ is a r-restricted infrapolynomial on K if and only if there is no other polynomial $r \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ which satisfies the condition*

$$|r(z)| \leqslant |p(z)| \text{ for all } z \in K. \tag{4}$$

Proof. Obviously, if $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ has no weak polynomial $r \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ satisfying (4), then $p \in \mathfrak{J}_n(K; \alpha^r)$.

Now we assume that $p \in \mathfrak{J}_n(K; \alpha^r)$. If there exists a weak polynomial $r \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$

$$r(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_n$$

satisfying (4) on K, then it is clear that the polynomial

$$m(z) = m_0 z^n + m_1 z^{n-1} + \ldots + m^n = \frac{r(z) + p(z)}{2},$$

belongs to $\mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ because we have

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} m_k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} (b_k + a_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} b_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} a_k =$$

$$= \frac{\alpha_i}{2} + \frac{\alpha_i}{2} = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \ldots, r.$$

On the other hand we have on K ether $|m(z)| < |p(z)|$ or $m(z) = p(z)$. The latter equality can hold in at most $n - r - l$ points of K, since otherwise, if

$$m(z) = p(z), \ z \in Z_l = \{z_j\}_1^l, \subset K, \ l \geqslant n - r,$$

then by (3) it follows that the system of linear equations

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{ik} (m_k - a_k) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, r,$$

$$\sum_{k=0}^{n} z_j^{n-k}(m_k - a_k) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l$$

has only the trivial solution, i.e. $m(z) = p(z) = r(z)$.

Some of the points $z \in Z_l$, may be common zeros. Assume

$$Z_l = U_s \cup V_t, \ U_s = \{u_j\}_1^s, \ V_t = \{v_j\}_1^t,$$

so that

$$m(z) = p(z) = 0, \quad z \in U_s,$$
$$m(z) = p(z) \neq 0, \quad z \in V_t.$$

Then we have

$$p(z) = p_1(z)u(z)$$
$$m(z) = m_1(z)u(z),$$

where

$$u(z) = \prod_{j=1}^{s} (u - u_j) = u^s + B_1 u^{s-1} + \ldots + B_s.$$

If

$$m_1(z) = d_0 z^{n-s} + d_1 z^{n-s-1} + \ldots + d_{n-s}$$
$$p_1(z) = c_0 z^{n-s} + c_1 z^{n-s-1} + \ldots + c_{n-s}$$

then, since the coefficients $B_1, B_2, \ldots, B_s$ must satisfy the equations

$$m_0 = d_0$$
$$m_1 = d_0 B_1 + d_1$$
$$m_2 = d_0 B_2 + d_1 B_1 + d_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$m_k = d_0 B_k + d_1 B_{k-1} + \ldots + d_k$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$m_n = d_{n-s} B_s,$$

(where $B_k = 0$ for $k > s$), the coefficients $d_0, d_1, \ldots, d_{n-s}$ satisfy the conditions

$$\beta_{i0}d_0 + \beta_{i1}d_1 + \ldots + \beta_{i,\, n-s}d_{n-s} = \alpha_i, \; i = 0, 1, \ldots, r, \tag{5}$$

$$\beta_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{i,j+1} B_1 + \ldots + \alpha_{i\,j+s} B_s. \tag{6}$$

Because $m, p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$, it is clear that the coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_{n+s}$ satisfy the same conditions (5), i.e.

$$\beta_{i0}c_0 + \beta_{i1}c_1 + \ldots + \beta_{i,n-s}\, c_{n-s} = \alpha_i, \; i = 0, 1, \ldots, r. \tag{5}$$

Now if $t = 0$, then clearly $m \in \mathfrak{U}(K ; p ; \alpha^r)$, and therefore $p \notin \mathfrak{Y}_n(K ; \alpha^r)$, is a contradiction.

Assume $t > 0$, then we have

$$m_1(z) = p_1(z) \neq 0, \; z \in V_t,$$

$$|m_1(z)| < |p_1(z)|, \quad z \in K - Z_t.$$

We denote by $\mathfrak{L}_{n-s}(\beta^r)$ the class of polynomials of degree $n - s$ with coefficients satisfying the homogenous conditions (5) (i.e. $\alpha_i = 0$, $i = 0, 1, \ldots, r$). Let $l \in \mathfrak{L}_{n-s}(\beta^r)$ be an interpolatory polynomial satisfying the conditions

$$l(v_j) = m_1(v_j) = p_1(v_j), \; j = 1, 2, \ldots, t. \tag{8}$$

Such a polynomial exists, because by (3) and $s + t \leqslant n - r - 1$ it follows that there exists a polynomial

$$h(z) = l(z)u(z)$$

of degree $\leqslant n$, satisfying the homogenous conditions (2) (i.e. $\alpha_i = 0$ $i = 0, 1, \ldots, r$) and

$$h(v_j) = m_1(v_j)u(v_j), \quad j = 1, 2, \ldots, t.$$

Then by (5)—(6) it is clear that $l \in \mathfrak{L}_{n-s}(\beta^r)$ and l satisfes the conditions (8).

It is clear that $m_1(z) - l(z) \in \mathfrak{L}_{n-t}\,(\beta^r)$ and

$$0 = |m_1(z) - l(z)| < |p_1(z)|, \; z \in V_t.$$

From continuity it follows that the same inequality would hold for an open neighbourhood $\mathcal{V}$ of V_t. Hence we have for all $\varepsilon \in \,]0, 1[$ and all $z \in \mathcal{V}$

$$|m_1(z) - \varepsilon l(z)| = |\varepsilon[m_1(z) - l(z)] + (1 - \varepsilon)m_1(z)| < |p_1(z)|. \tag{9}$$

On the set $K - \mathcal{V} \cup U_s$ we have $|m_1(z)| < |p_1(z)|$. But obviously if $z \in U_s$ is not an isolated point of K, then $|m_1(z)| < |p_1(z)|$. Therefore we can have $|m_1(z)| \geqslant |p_1(z)|$ only for $z \in V_t \cup U_k$, where $U_k \subseteq U_s$ is the subset of U_s of isolated points of K. Hence on the compact set $K - U_k - \mathcal{V}$ we have $|m_1(z)| < |p_1(z)|$, therefore if ε_0 is sufficiently small, then

$$|m_1(z) - \varepsilon_0 l(z)| < |p_1(z)| \text{ for } z \in K - U_k - \mathcal{V}. \tag{10}$$

From (9) and (10) we obtain

$$|m_1(z) - \varepsilon_0 l(z)| < |p_1(z)|, \text{ for } z \in K - U_k. \tag{11}$$

But clearly $m_1(z) - \varepsilon_0 l(z) \in \mathfrak{L}_{n-s}(\beta^r)$, hence

$$q(z) = [m_1(z) - \varepsilon_0 l(z)]\, u(z) \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r).$$

The polynomial $q \in \mathcal{U}(K\,;\, p\,;\, \alpha^r)$, because $|q(z)| < |p(z)|$ everywhere in K except at their common zeros $z_1, z_2, \ldots, z_s$. Therefore $p \notin \mathcal{Y}_n(K\,;\,\alpha^r)$, i.e. a contradiction. This completes the proof of theorem.

This theorem permits us to give an alternate definition, more satisfactory, to r-restricted infrapolinomials, when the matrix (α_{ik}) is an interpolatory matrix on K.

DEFINITION 3. Let (α_{ik}), $i = 0, 1, \ldots, r\,;\, k = 0, 1, \ldots, n$ be an interpolatory matrix on K. The polynomial $p \in \mathfrak{L}\ (\alpha^r)$ is called a r-restricted infrapolynomial on K, if for each other polynomial $q \in \mathfrak{L}_n\ (\alpha^r)$ there exists a point $z_q \in K$ so that

$$|q(z_q)| > |p(z_q)|.$$

Remark 1. If

$$\alpha^r = \alpha_0^r = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & & & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & & & A_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & A_r \end{pmatrix}$$

then the class $\mathfrak{L}_n(\alpha_0^r)$ coincides with the subclass $\mathfrak{L}_n(A_1, A_2, \ldots, A_r)$ of polynomials of degree n with prescribed first $r+1$ coefficients $A_0 = 1$, $A_1, \ldots, A_r$. Because the matrix α_0^r is obviously an interpolatory matrix, the theorem rests true in this case too. This is the result of M. Zedek [9].

Remark 2. If

$$\alpha^r = \alpha_1^r = \begin{pmatrix} \zeta_0^n\, \zeta_0^{n-1} & \ldots & 1 & w_0 \\ \zeta_1^n\, \zeta_1^{n-1} & \ldots & 1 & w_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \zeta_r^n\, \zeta_r^{n-1} & \ldots & 1 & w_r \end{pmatrix}$$

where $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_r$ are $r+1$ distinct points in the z-plane, the class $\mathfrak{L}_n(\alpha_1^r)$ coincides with the class of polynomials of degree $\leqslant n$ satisfying the interpolatory conditions

$$p(\zeta_j) = w_j, \quad j = 0, 1, \ldots, r.$$

If $\{\zeta_t\}_0^r \cap K = \Phi$, then it is clear that α_1^r is an interpolatory matrix on K and, therefore the Theorem rests true in this case too.

When $r = n$, then the class $\mathfrak{L}_n(\alpha_1^n)$ contains a single polynomial — the interpolatory polynomial of the degree $\leqslant n$ on the knots $\zeta_0, \zeta_1, \ldots, \zeta_n$.

(Received December 1. 1971)

REFERENCES

1. M. Fekete and J. L. von Neumann, *Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome.* „Iber. Deutsch. Math.-Verein.", **31** (1922), pp. 125–138.
2. Y. Gordon, *Properties of generalized juxtapolynomials,* „Israel J. Math.", **4** (1966), pp. 177–188.
3. I. Maruşciac, *Sur certains infrapolynomes conditionnés,* „Mathematica (Cluj)", **4** (27), 1 (1962), pp. 33–52; **7** (30), 2 (1965), pp. 283–295.
4. I. Maruşciac, *On the structure of restricted generalized infrapolynomials,* „Mathematica (Cluj)", **12** (35), 1 (1970), pp. 111–125.
5. T. S. Motzkin and J. L. Walsh, *Underpolynomials and infrapolynomials* „Illinois J. Math.", **1** (1957), pp. 406–426.
6. O. Shisha and J. L. Walsh, *The zeros of infrapolynomials with some prescribed coefficients,* „J. Analyse Math.", **9** (1961/62) pp. 111–160.
7. J. L. Walsh, *On infrapolynomials with prescribed constant term,* „J. Math. Pures Appl.", **37** (1958), pp. 295–316.
8. J. L. Walsh and M. Zedek, *On generalized Tchebycheff polynomials,* „Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.", **42** (1956); pp. 99–104.
9. M. Zedek, *On the Definition of Restricted Infrapolynomials,* „J. Approx. Theory.", **1**, (1968), pp. 251–254.

ASUPRA DEFINIŢIEI INFRAPOLINOAMELOR LINIAR-RESTRÎNSE

(Rezumat)

Fie K o mulţime compactă din planul complex ce conţine cel puţin $n - r$ puncte şi fie $\mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ clasa polinoamelor de forma

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{1}$$

ai căror coeficienţi verifică condiţiile liniare

$$\alpha_{i0}a_0 + \alpha_{i1}a_1 + \ldots + \alpha_{in}a_n = \alpha_i, \; i = 0, 1, \ldots, r < n, \tag{2}$$

în care matricea $\alpha^r = (\alpha_{ik}, \alpha_i)$ formată din numere complexe este dată şi de rang $(\alpha_{ik}) = r + 1$, $\Sigma |\alpha_i| \neq 0$.

Un polinom $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ se numeşte infrapolinom r-restrîns pe mulţimea K dacă nu există nici un polinom adjunct lui p pe mulţimea K (care verifică condiţiile I–II).

Un polinom $q \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ se numeşte polinom atenuant lui $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ dacă

$$\forall z \in K \Rightarrow |q(z)| \leqslant |p(z)|.$$

Evident că un polinom p care nu admite nici un polinom atenuant pe K este un infrapolinom pe K. Reciproca însă nu este adevărată, adică există polinoame care nu admit nici un polinom adjunct pe K (adică sînt infrapolinoame pe K) şi totuşi admit polinoame atenuante pe K. În prezenta notă se arată că dacă matricea α^r este interpolatoare pe K (Definiţia 2), atunci un polinom $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ este un infrapolinom r-restrîns pe K dacă şi numai dacă nu admite nici un polinom atenuant pe K.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЛИНЕЙНО ОБУСЛОВЛЕННЫХ ИНФРАПОЛИНОМОВ

(Резюме)

Пусть K — компактное множество комплексной плоскости, содержащей не менее $n-r$ точек и пусть $\mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ — класс полиномов вида:

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (1),$$

коэффициенты которых удовлетворяют линейным условиям

$$\alpha_{i0}a_0 + \alpha_{i1}a_1 + \ldots + \alpha_{in}a_n = \alpha_i, \; i = 0, 1, \ldots, r < n, \qquad (2),$$

где матрица $\alpha^r = (\alpha_{ik}, \alpha_i)$, составленная из комплексных чисел, дана и rang $(\alpha_{ik}) = r+1$, $\Sigma |\alpha_i| \neq 0$.

Полином $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ называется r-обусловленным инфраполиномом на множестве K, если p не имеет адъюнкта на множестве K (т.е. полином, который удовлетворяет условиям I—II).

Полином $q \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ называется смягчающим полиномом для $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$, если

$$\forall z \in K \Rightarrow |q(z)| \leqslant |p(z)|.$$

Очевидно, что полином p, который не имеет никакого смягчающего полинома на K, является инфраполиномом на K. Однако обратное утверждение несправедливо, т.е. существуют полиномы, которые не допускают никакого адъюнкта на K (т. е. являются инфраполиномами на K) и всё же имеют смягчающие полиномы на K. В настоящей заметке показано, что если матрица α^r является интерполирующей на K (Определение 2), то полином $p \in \mathfrak{L}_n(\alpha^r)$ является r-обусловленным инфраполиномом на K, тогда и только тогда, когда он не имеет никакого смягчающего полинома на K.

FORMULE DE CUADRATURĂ DE TIP SARD

GH. COMAN

Fie $W_{L_2}^{(r)}(M_r;\ 0, m)$ clasa funcţiilor $f:[0, m] \to R$ şi care au pe intervalul $[0, m]$ derivata de ordinul $r-1$ absolut continuă iar derivata de ordinul r, $f^{(r)}$, satisfăcînd condiţia $\|f^{(r)}\|_{L_2} \leqslant M_r$.

Se consideră formula de cuadratură

$$\int_0^m f(x)dx = \sum_{k=0}^m A_k f(k) + R_m[f], \tag{1}$$

unde A_k, $(k = 0, 1, \ldots, m)$ sînt parametri nedeterminaţi.

Se pune problema determinării parametrilor A_k, $(k = 0, 1, \ldots, m)$ astfel încît formula de cuadratură (1) să aibă gradul de exactitate $r-1$ şi

$$E_m\left(W_{L_2}^{(r)}(M_r;\ 0, m);\ A_k\right) = \sup_{f \in W_{L_2}^{(r)}(M_r;\ 0, m)} |R_m[f]|$$

să ia valoarea minimă. Formula de cudratură corespunzătoare se numeşte optimală pentru clasa de funcţii $W_{L_2}^{(r)}(M_r;\ 0, m)$, iar coeficienţii ei, coeficienţi optimali.

A. Sard şi L. S. Meyers ([3], [5]) au stabilit formulele de cuadratură de tipul (1) optimale pentru clasele de funcţii $W_{L_2}^{(r)}(M_r;\ 0, m)$ în următoarele cazuri: $r = 1$, m oarecare; $r = 2$, $m \leqslant 20$; $m = 3$, $r \leqslant 12$; $r = 4$, $m \leqslant 9$.

În această notă se tratează cazul $r = 2$ şi m oarecare şi se dă o formulă de recurenţă pentru calculul coeficienţilor optimali.

Procedînd ca în [1] se obține

$$E_m(W^{(2)}_{L_2}(M_2 ; 0, m) ; A_k) = M_2 \left(\int_0^m \varphi^2(x)dx \right)^{1/2}, \tag{2}$$

unde

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} - \sum_{k=0}^{m-1} A_k(x-k)_+ ,$$

iar $x_+ = x$ dacă $x \geqslant 0$ și $x_+ = 0$ dacă $x < 0$.

În felul acesta problema considerată s-a redus la determinarea minimului integralei

$$J = \int_0^m \varphi^2(x)dx$$

în raport cu parametrii A_k, $(k = 0, 1, \ldots, m)$, cu legăturile

$$\sum_{k=0}^{m} A_k = m, \quad \sum_{k=0}^{m} kA_k = \frac{m^2}{2},$$

impuse de faptul că formula de cuadratură are gradul de exactitate egal cu unu.

Folosind metoda multiplicatorilor lui Lagrange, sîntem conduși, în urma unor calcule simple, la sistemul de ecuații

$$\begin{cases} 6A_0 + A_1 = \dfrac{7}{2} \\ 4A_1 + A_2 = \dfrac{11}{2} \\ A_1 + 4A_2 + A_3 = 6 \\ A_{m-3} + 4A_{m-2} + A_{m-1} = 6 \\ A_{m-2} + 4A_{m-1} + 2A_m - 6\lambda_2 = 6 \\ A_0 + A_1 + \ldots + A_m = m \\ A_1 + \ldots + mA_m = \dfrac{m^2}{2} \\ \lambda_1 + m\lambda_2 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Determinantul acestui sistem fiind diferit de zero, rezultă că el admite soluție unică. Prin urmare formula optimală există și este unică. Folosind proprietatea că coeficienții optimali sînt simetrici (vezi [6]), adică $A_0 = A_m$, $A_1 = A_{m-1}, \ldots$ sistemul (3) devine

$$\begin{cases} 6A_0 + A_1 & = \frac{7}{2} \\ 4A_1 + A_2 & = \frac{11}{2} \\ A_1 + 4A_2 + A_3 & = 6 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ A_{p-2} + 4A_{p-1} + A_p & = 6 \\ 2A_{p-1} + 4A_p & = 6 \end{cases} \quad (4)$$

dacă m este un număr par, adică $m = 2p$ şi

$$\begin{cases} 6A_0 + A_1 & = \frac{7}{2} \\ 4A_1 + A_2 & = \frac{11}{2} \\ A_1 + 4A_2 + A_3 & = 6 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ A_{p-2} + 4A_{p-1} + A_p & = 6 \\ A_{p-1} + 5A_p & = 6 \end{cases} \quad (5)$$

dacă m este impar, adică $m = 2p + 1$.

Acest sistem se rezolvă relativ uşor folosind formula de recurenţă

$$A_{k+2} = 6 - 4A_{k+1} - A_k, \ (k = 1, 2, \dots, p - 2), \quad (6)$$

unde

$$A_1 = \frac{7}{2} - 6A_0, \ A_2 = 24A_0 - \frac{17}{2}.$$

Cu ajutorul acestei formule de recurenţă se determină parametrii A_k, $(k = 1, 2, \dots, p)$ în funcţie de A_0. Pentru determinarea lui A_0 se folosesc ultimele ecuaţii ale sistemelor (4) sau (5) după cum m este par sau impar.

Formula (6) se aplică cu succes pentru $m \geqslant 4$. Pentru $m = 2$ şi $m = 3$ se foloseşte sistemul (3) şi se obţine $A_0 = A_2 = \frac{3}{8}$, $A_1 = \frac{10}{8}$ respectiv $A_0 = A_3 = \frac{4}{10}$, $A_1 = A_2 = \frac{11}{10}$. Pentru $m = 1$, coeficienţii $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$ se determină din condiţiile ca gradul de exactitate al formulei să fie unu. Deasemenea, introducînd valorile coeficienţilor optimali în (2) se obţine restul formulei optimale corespunzătoare.

Cu ajutorul formulei de recurenţă stabilite se regăsesc rezultatele lui A. Sard şi L. S. Meyers [5] pentru $m \leqslant 20$. Ea permite însă calculul, relativ uşor, al coeficienţilor optimali pentru orice m. În tabelul ce urmează sînt daţi aceşti coeficienţi pentru $20 < m \leqslant 30$.

m	21	22	23	24	25
$1/\rho$	1432070	3912488	5344558	14601604	19946162
$A_0\rho$	564719	1542841	2107560	5757961	7865521
$A_1\rho$	1623931	4436662	6060593	16557848	22618441
$A_2\rho$	1380661	3772036	5152697	14077430	19230127
$A_3\rho$	1445845	3950122	5395967	14742056	20138023
$A_4\rho$	1428379	3902404	5330783	14563970	19894753
$A_5\rho$	1433059	3915190	5348249	14611688	19959937
$A_6\rho$	1431805	3911764	5343569	14598902	19942471
$A_7\rho$	1432141	3912682	5344823	14602328	19947151
$A_8\rho$	1432051	3912436	5344487	14601410	19945897
$A_9\rho$	1432075	3912502	5344577	14601656	19946233
$A_{10}\rho$	1432069	3912484	5344553	14601590	19946143
$A_{11}\rho$		3912490	5344559	14601608	19946167
$A_{12}\rho$				14601602	19946161

m	26	27	28	29	30
$1/\rho$	54493928	74440090	203374108	277814198	759002504
$A_0\rho$	21489003	29354524	80198051	109552575	299303201
$A_1\rho$	61794730	84413171	225221072	315034243	860689558
$A_2\rho$	52537684	71767811	196073306	267841117	731755540
$A_3\rho$	55018102	75156125	205330352	280486477	766303306
$A_4\rho$	54353476	74248229	202849934	277098163	757046260
$A_5\rho$	54531562	74491499	203514560	278006059	759526678
$A_6\rho$	54483844	74426315	203336474	277762789	758862052
$A_7\rho$	54496630	74443781	203354192	277827973	759040137
$A_8\rho$	54493204	74439101	203371406	277810507	758992420
$A_9\rho$	54494122	74440355	203374832	277815187	759005206
$A_{10}\rho$	54493876	74440019	203373914	277813933	759001780
$A_{11}\rho$	54493942	74440109	203374160	277814269	759002698
$A_{12}\rho$	54493924	74440085	203374094	277814179	759002452
$A_{13}\rho$	54493930	74440091	203374112	277814203	759002518
$A_{14}\rho$			203374106	277814197	759002500
$A_{15}\rho$					759002506

(Intrat în redacție la 16 iunie 1971)

BIBLIOGRAFIE

1. Coman, Gh., *Asupra unor formule optimale de cuadratură*, „Stud. Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math.-Mech.", **XV**, 1970, 1, p. 39–54.
2. Ionescu, D. V., *Cuadraturi numerice*, Bucureşti, 1957.
3. Meyers, L. S., Sard, A., *Best approximate integration formulas*, „Journal of Mathematics and Physics", **29**, 1950, 2, p. 165–177.
4. Nikolski, S. M., *Kvadraturnîe formulî*, Moskva, 1958.
5. Sard, A., *Best approximate integration formulas, best approximation formulas*, „American Journal of Mathematics", **71**, 1949, 1, p. 80–91.
6. Sard, A., *Linear Approximation*, „American Math. Soc., Providence", 1963.

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА САРД

(Резюме)

В [3] и [5] были установлены квадратурные формулы типа (1), имеющие степень точности r и являющиеся оптимальными в классе функций $W_{L_2}^{(r)}(M_r;\ 0,\ m)$ для случая $r = 1$, m — произвольный; $r = 2,\ m \leq 20$; $r = 3,\ m \leq 12$; $r = 4,\ m \leq 9$.

В настоящей работе рассматривается случай $r = 2$ и m — произвольный и даётся формула рекуррентности для вычисления оптимальных коэффициентов.

SARD TYPE QUADRATURE FORMULAE

(Summary)

Quadrature formulae of type (1) have been established in [3] and [5], having r exactitude degree, optimal on $W_{L_2}^{(r)}(M_r;\ 0,\ m)$ class of functions in cases $r = 1$, m optional; $r = 2$, $m \leq 20$; $r = 3$, $m \leq 12$; $r = 4$, $m \leq 9$.

The case $r = 2$ and m optional is discussed in this paper, a formula of recurrence being given for the calculation of optimal coefficients.

ASUPRA DETERMINĂRII TEMPERATURII ÎN JETURI VÎSCOASE SEMIMĂRGINITE

P. BRĂDEANU şi ŞT. MAKSAY

1. Introducere. Problema dinamică a propagării jetului incompresibil semimărginit*, pe una din feţele unei plăci semi infinite care are în bordul de atac o sursă, este studiată în lucrarea [1] cu ajutorul variabilelor şi ecuaţiei lui Mises din teoria stratului limită.

Pentru repartiţia vitezei u în jet se obţine formula:

$$u = \sqrt{\frac{E_0}{\nu x}}\,\varphi\,(\eta),\ \ \varphi(\eta) = \frac{\eta_\infty^2}{6}\left(\sqrt{\frac{\eta}{\eta_\infty}} - \frac{\eta^2}{\eta_\infty^2}\right) \tag{1'}$$

$$(\eta = \psi(E_0 \nu x),^{-1/4} \eta_\infty = 2{,}515,\ \ \eta_\infty^2/6 = 1{,}054), \tag{2'}$$

ca urmare a integrării ecuaţiei diferenţiale ordinare:

$$2(\varphi^2)'' + \eta\varphi' + 2\varphi = 0 \tag{3'}$$

$$\varphi(0) = 0,\ \ \varphi(\eta_\infty) = 0, \int_0^{\psi_\infty} u\psi d\psi = E_0 \text{ (dat)} \tag{4'}$$

---

* Notaţii:

x, ψ,	variabilele lui Mises din stratul limită
ψ,	funcţia de curent
u,	viteza locală a jetului în direcţia plăcii
η	variabilă de automodelare dată de (2′)
E_0, $\mathfrak{I}$, $\mathfrak{I}_1$,	constante date (condiţii integrale de conservare)
φ,	funcţia vitezei u, dată de (1′)
μ, ν, ρ, c_p,	coeficienţii de vîscozitate dinamică şi cinematică, densitatea şi căldura specifică ($\nu = \mu/\rho$)
λ,	coeficientul de conductibilitate termică
$\sigma = \mu c_p/\lambda$,	numărul lui Prandtl
T,	temperatura absolută în fluid
$i = c_p T$,	entalpia unităţii de masă a fluidului
h, i_1	funcţii introduse în formula (3)
w, ∞	(indici) indică valori pe placă şi, respectiv, pe frontiera exterioară a stratului limită

În lucrarea de faţă, folosind aceste rezultate, vom studia unele probleme termice care se pun în legătură cu propagarea, după modelul de scurgere cu strat limită, a unui jet de fluid vîscos incompresibil de-a lungul plăcii plane. Aceste probleme se referă la determinarea analitică a temperaturii cu ajutorul variabilelor şi ecuaţiilor lui Mises.

2. Formularea şi ecuaţiile problemelor. Se consideră o placă semi infinită, aşezată pe partea pozitivă a axei $Ox(x > 0)$, şi se presupune că spaţiul înconjurător este umplut cu un fluid vîscos incompresibil în repaos. În vîrful plăcii ($x = 0$) se găseşte o sursă punctuală din care ţîşneşte un fluid, de aceeaşi natură cu cel din spaţiul înconjurător, care se mişcă, sub formă de jet, pe una din feţele plăcii (de exemplu $y > 0$). Vom presupune, de asemenea, că, în condiţii care urmează să fie precizate, temperatura jetului este diferită de aceea a fluidului înconjurător.

Vom admite că mişcarea jetului satisface ecuaţiile stratului limită termic care, în raport cu variabilele lui Mises (x, ψ), au următoarea formă [3].

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial}{\partial \psi}\left(u \frac{\partial u}{\partial \psi}\right) \tag{1}$$

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial i}{\partial x} = u \left(\frac{\partial u}{\partial \psi}\right)^2 + \frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \psi}\left(u \frac{\partial i}{\partial \psi}\right) \tag{2}$$

$$\left(u = \frac{\partial \psi}{\partial y},\quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},\quad \nu = \frac{\mu}{\rho} = \text{const.}\right)$$

unde $u(x, \psi)$ şi $i(x, \psi)$ reprezintă necunoscutele principale ale problemei. Aici, ecuaţia dinamică (1) este independentă de ecuaţia energiei (2). Studiul ecuaţiei energiei (2) este dependent de rezolvarea ecuaţiei (1).

Problema fundamentală, în această lucrare, este determinarea entalpiei $i(x, \psi)$, sau a temperaturii $T(x, \psi)$, în interiorul jetului. De aceea, ne vom îndrepta atenţia asupra ecuaţiei energiei (2) pentru care căutăm o soluţie de forma

$$i(x, \psi) = i_1(x) h(x, \eta) + i_\infty, \quad \eta = \psi (E_0 \nu x)^{-1/4} \tag{3}$$

unde $h(x, \eta)$ este noua funcţie necunoscută principală iar $i_1(x)$ este o funcţie arbitrară care urmează să fie determinată (i_∞ = const.).

Folosind formula (3), calcule elementare transformă ecuaţia energiei (2) în următoarea ecuaţie, necesară pentru determinarea funcţiei $h(x, \eta)$:

$$\frac{1}{\sigma} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\varphi \frac{\partial h}{\partial \eta}\right) + \frac{\eta}{4} \frac{\partial h}{\partial \eta} - x \frac{\partial h}{\partial x} - x \frac{di_1/dx}{i_1} h = - \frac{E_0}{\nu x i_1} \varphi \varphi'^2 \tag{4}$$

care conţine funcţia $\varphi(\eta)$ dată de formula (1') şi funcţia necunoscută $i_1(x)$.

Pentru a determina funcţia $i_1(x)$ se vor folosi condiţii suplimentare, condiţiile integrale termice de conservare (invarianţi integrali termici) care reprezintă constanţa anumitor mărimi exprimate prin integrale. Prin urmare, la ecuaţia (4) se vor ataşa, pe lîngă condiţiile la limită, şi condiţii integrale termice de conservare. În timp ce condiţiile la limită exprimă concordanţa fenomenului studiat cu comportarea sa exterioară cunoscută, condiţiile integrale asigură soluţii nebanale, permit îndeplinirea unor condiţii de automodelare (obţinerea unor ecuaţii diferenţiale ordinare) şi determinarea diferitelor constante. În raport cu condiţiile la limită particulare date şi condiţii de conservare corespunzătoare vom studia determinarea temperaturii în cadrul a două probleme.

3. Placa are temperatura egală cu a fluidului exterior (mişcare nedisipativă cu $\sigma = 1$). În acest caz, la ecuaţia energiei (4) asociem condiţiile la limită

$$i(x,\ 0) = i_w, \qquad i(x,\ \psi_\infty) = i_\infty, \qquad i_w = i_\infty \tag{5}$$

(debitul $\psi_\infty \neq \infty$, $u(x,\ 0) = 0$, $u(x,\ \psi_\infty) = 0$)

În această problemă termică o condiţie integrală de conservare se deduce astfel: se înmulţeşte ecuaţia energiei (2) cu $\psi d\psi$, se integrează ecuaţia primită, întîi în raport cu ψ, de la $\psi = 0$ la $\psi = \psi_\infty$ şi apoi în raport cu x de la $x = 0$ la $x = x$.

Condiţia integrală de conservare se poate pune în următoarea formă ($\mathcal{Y}$ este o mărime dată):

$$\frac{1}{\nu}\int_0^{\psi_\infty}(i_\infty - i)\psi d\psi + \int_0^x dx\int_0^{\psi_\infty} u\left(\frac{\partial u}{\partial\psi}\right)^2\psi d\psi - \frac{1}{\sigma}\int_0^x dx\int_0^{\psi_\infty}(i_\infty - i)du = \text{const.} \equiv \mathcal{J}$$

$$\left(\int_0^{\psi_\infty}\psi d\left(u\frac{\partial i}{\partial\psi}\right) = \psi u\frac{\partial i}{\partial\psi}\Big|_0^{\psi_\infty} + \int_0^{\psi_\infty} ud\ (i_\infty - i) = -\int_0^{\psi_\infty}(i_\infty - i)du\right) \tag{6'}$$

Condiţia integrală termică de conservare (6′), dacă se folosesc (1′) şi (3), se scrie în forma

$$\sqrt{x}\ i_1(x)\int_0^{\eta_\infty} h\eta\, d\eta + \frac{2}{\sqrt{x}}\left(\frac{E_0}{\nu}\right)\int_0^{\eta_\infty}\varphi\,\varphi'^2\eta d\eta - \frac{1}{\sigma}\int_0^x\frac{i_1}{\sqrt{x}}\left(\int_0^{\eta_\infty}\varphi' h d\eta\right)dx = -\mathcal{J}\sqrt{\frac{\nu}{E_0}}. \tag{6}$$

Ne vom mărgini la căutarea soluţiilor automodelate (similare) de forma $h = h(\eta)$, care pot exista, după condiţia integrală (6), numai dacă mişcarea este nedisipativă (ceea ce este admis în fluidul incompresibil) şi dacă luăm

$$i_1(x) = cx^{-1/2} \quad (c = \text{const.}) \tag{7}$$

Se cere, deci, să se determine funcţia $h(x,\ \eta)$, în domeniul $x \geqslant 0$ şi $0 \leqslant \eta \leqslant \eta_\infty$, definită în modul următor:

$$h = 0 \text{ pentru } x = 0 \text{ şi } h = h(\eta) \text{ pentru } x > 0\ (\psi > 0)$$

care satisface, după (4), (3), (5) şi (6) cu $\sigma = 1$, ecuaţia şi condiţiile

$$4(\varphi h')' + \eta h' + 2h = 0 \tag{8}$$

$$h(0) = h(\eta_\infty) = 0\,; \quad (\varphi(0) = \varphi(\eta_\infty) = 0) \tag{9}$$

$$c\int_0^{\eta_\infty} h\eta d\eta - \left(\int \frac{dx}{x}\right)\int_0^{\eta_\infty}\varphi' h d\eta = -\mathcal{J}\sqrt{\frac{\nu}{E_0}} \tag{10}$$

Integrala generală a ecuaţiei (8), luînd în considerare şi (3'), are forma

$$h(\eta) = \varphi(A + BF) \tag{11}$$

unde A şi B sînt constante de integrare iar $F(t)$, $t = \sqrt{\eta/\eta_\infty}$, are expresia

$$F(t) = \int \varphi^{-3}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_\infty}\right)^{3/2}\right]d\eta = \int \frac{6}{\eta_\infty^6}\,\frac{1-t^3}{t^3(1-t^3)^3}\,2\eta_\infty\, tdt = \frac{2\cdot 6^3}{\eta_\infty^5}\int\frac{dt}{t^2(1-t^3)^2} =$$

$$= \frac{2\cdot 6^3}{\eta_\infty^5}\left[-\frac{1}{t} + \frac{t^2}{3(1-t^3)} + \frac{2}{9}\ln\frac{1-t^3}{(1-t)^3} - \frac{4}{3\sqrt{3}}\,arctg\,\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right] + \text{const.}$$

Se poate arăta uşor că:

a) Wronskianul $W(\varphi, \varphi F)$ al soluţiilor particulare φ şi φF este diferit de zero (neidentic nul) pentru $t \in [0, 1]$, deoarece

$$W(\varphi, \varphi F) = \varphi[(\varphi F)' - \varphi' F] = \varphi^2 F' = \frac{6}{t\eta_\infty}$$

În consecinţă, funcţiile φ şi φF formează un sistem fundamental de soluţii.

b) $$\lim_{t\to 0}(\varphi F) = -\frac{2\cdot 6^2}{\eta_\infty^3}, \qquad \lim_{t\to 1}(\varphi F) = \frac{2\cdot 6^2}{3\eta_\infty^3}$$

Pentru a satisface condiţiile la limită va trebui, deci, ca $B = 0$. Deoarece $i_1(x)$ conţine constanta c în forma entalpiei (3), se va putea lua $A = 1$. Prin urmare, soluţia care să corespundă condiţiilor la limită este, după (11),

$$h = \varphi(\eta) \tag{12}$$

unde funcţia $\varphi(\eta)$ este dată de formula (1').

Condiţia integrală termică de consrevare (10), care urmează să fie verificată cu soluţia (12), permite determinarea constantei c în forma

$$c = -\frac{\mathcal{J}\sqrt{\dfrac{\nu}{E_0}}}{\displaystyle\int_0^{\eta_\infty}\varphi\eta\, d\eta} = -\frac{\mathcal{J}\sqrt{\nu/E_0}}{1} = -\mathcal{J}\sqrt{\frac{\nu}{E_0}} \qquad 13)$$

Repartiţia entalpiei (temperaturii), folosind (3), (7), (12) şi (13) va fi dată de formula

$$i(x,\ \eta) = i_w - \mathcal{J}\sqrt{\frac{\nu}{E_0 x}}\,\varphi(\eta) = i_w - 1{,}054\,\mathcal{J}\sqrt{\frac{\nu}{E_0 x}}\left(\sqrt{\frac{\eta}{\eta_\infty}} - \frac{\eta^2}{\eta_\infty^2}\right) \quad (14)$$

$$(i = c_p T,\ i_w = c_p T_w,\ \sigma = 1)$$

Observaţie. Dacă mişcarea este nedisipativă şi numărul lui Prandtl $\sigma = 1$, ecuaţiile (1) şi (2), ca şi condiţiile la limită (5)—(5′), primesc forma identică

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \nu\frac{\partial}{\partial\psi}\left(u\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\right]Z = 0, \quad \text{unde} \quad Z = u \ \text{şi/sau}\ i - i_w$$

$$Z(x,\ 0) = 0,\quad Z(x,\ \psi_\infty) = 0,\quad (i_w = \text{const.})$$

care arată că profilul de temperatură este asemenea cu profilul de viteză. Avem, deci, soluţia $i = Ku + i_w (K = \text{const.})$. Pentru a obţine soluţia nebanală ($K \neq 0$) vom folosi condiţia integrală (6′) care, în acest caz, se reduce la

$$-\frac{1}{\nu}\int_0^{\psi_\infty} Ku\,\psi\,d\psi = \mathcal{J} \Rightarrow K = -\frac{\nu\mathcal{J}}{\int_0^{\psi_\infty} u\psi\,d\psi} = -\frac{\nu\mathcal{J}}{E_0}$$

Distribuţia entalpiei (temperaturii) va fi dată de formula

$$i = i_w - \mathcal{J}\frac{\nu}{E_0}u = i_w - \mathcal{J}\sqrt{\frac{\nu}{E_0 x}}\,\varphi$$

care coincide cu (14). În acest procedeu de rezolvare a problemei nu s-a făcut nici o referire la soluţii automodelate prin intermediul ecuaţiilor mişcării sau a condiţiei integrale de conservare (6′).

4. Placa este izolată termic (mişcare nedisipativă cu $\sigma \neq 1$. Să presupunem că jetul incompresibil semimărginit pe placa plană satisface următoarele condiţii: 1. placa este neconducătoare de căldură, 2. fluidul din exteriorul jetului este în repaos la temperatura constantă, dată T_∞, 3. stratul limită este nedisipativ şi 4. $\sigma \neq 1$.

Pentru determinarea temperaturii în jet folosim expresia (3) în care funcţia necunoscută h satisface, după (4), ecuaţia şi condiţiile

$$\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\varphi\frac{\partial h}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{4}\eta\frac{\partial h}{\partial\eta} - x\frac{\partial h}{\partial x} - x\frac{di_1/dx}{i_1}h = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial h}{\partial\eta}(x,\ 0) = 0, \qquad h(x,\ \eta_\infty) = 0 \quad (16)$$

La aceste ecuaţii vom adăuga o condiţie integrală termică de conservare. Integrînd ecuaţia energiei (2) în raport cu ψ de la $\psi = 0$ la $\psi = \psi_\infty$ se găseşte imediat, neglijînd disipaţia, următorul invariant integral termic

$$\frac{1}{\nu}\frac{d}{dx}\int_0^{\psi_\infty}(i - i_\infty)\,d\psi = 0$$

sau

$$\rho(E_0\nu x)^{1/4} i_1 \int_0^{\eta_\infty} h(x, \eta)\,d\eta = \text{const.} \equiv \mathcal{J}_1 \tag{17}$$

care exprimă conservarea diferenţei de entalpie de-a lungul jetului.

Problema admite, dacă $i_1 = cx^{-1/4}$, soluţia automodelată $h = h(\eta)$ care satisface, după (15), (16) şi (17), ecuaţia şi condiţiile următoare

$$(\varphi h')' + \frac{\sigma}{4}(\eta h)' = 0 \tag{18}$$

$$h'(0) = 0, \quad h(\eta_\infty) = 0 \tag{19}$$

$$c\int_0^{\eta_\infty} h(\eta)\,d\eta = \frac{\mathcal{J}_1}{\rho(E_0\nu)^{1/4}} \tag{20}$$

Integrînd ecuaţia (18) cu condiţia $h(\eta_\infty) = 0$ [există şi condiţia $h'(\eta_\infty) = 0$] găsim ecuaţia

$$\varphi h' + \frac{\sigma}{4}\eta h = \text{const.} = 0 \tag{21}$$

Integrarea acestei ecuaţii, dacă se convine ca pentru constanta de integrare să se ia valoarea $K = 1$ (în formula entalpiei (3) constantele apar în forma produsului cK), conduce la soluţia

$$h(\eta) = \left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_\infty}\right)^{3/2}\right]^\sigma \tag{22}$$

Pentru a determina constanta c din expresia funcţiei $i_1(x)$ folosim condiţia integrală (20). Avem valoarea

$$c = \frac{\mathcal{J}_1}{({}_0\nu)^{1/4}}\frac{1}{\int_0^{\eta_\infty} h\,d\eta} = \frac{\mathcal{J}_1}{\rho(E_0\nu)^{1/4}\eta_\infty}\frac{1}{\int_0^1 (1 - t^{3/2})^\sigma\,dt}, \quad t = \frac{\eta}{\eta_\infty}$$

Distribuţia entalpiei (temperaturii) $i = c_p T$ este dată, după (3), de formula

$$i(x,\eta\,;\ \sigma)) = \frac{\mathcal{J}_1}{\rho(E_0\nu x)^{1/4}\eta_\infty}\,\frac{1}{\int_0^1 (1 - t^{3/2})^\sigma dt}\left[1 - \left(\frac{\eta}{\eta_\infty}\right)^{3/2}\right]^\sigma + i_\infty \tag{23}$$

Temperatura T_w a plăcii se obţine din (23), în care se face $\eta = 0$, în forma

$$T_w(x\,;\ \sigma) = \frac{\mathcal{J}_1}{\rho c_p \eta_\infty (E_0\nu x)^{1/4}}\,\frac{1}{\int_0^1 (1 - t^{3/2})^\sigma dt} + T_\infty \tag{24}$$

Această formulă evaluează încălzirea adiabatică a plăcii.

Aplicarea formulelor (23)—(24) presupune evaluarea integralei binoame

$$A(\sigma) = \int_0^1 (1 - t^{3/2})^\sigma dt$$

pentru diferite valori ale parametrului σ. Avem

$$A(1) = 0{,}60, \quad A(2) = 0{,}45, \quad A(1/3) = 2\int_0^\infty \frac{z^3}{(1 + z^3)^2}dz =$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^\infty \frac{dz}{1 + z^3} = \frac{4\pi}{9\sqrt{3}} \approx 0{,}81\,; \quad (t = (1 + z^3)^{-2/3})$$

În alte cazuri integrala $A(\sigma)$ se poate calcula cu ajutorul desvoltării în serie de puteri. Se găsesc valorile

$$A(\sigma) = 1 + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\sigma(\sigma - 1)\ldots(\sigma - n + 1)}{n!}\,\frac{2}{3n + 2}$$

$$A(1/2) = 1 - \frac{1}{5} - \sum_{n=2}^\infty \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n - 3)}{2^n\cdot n!}\,\frac{2}{3n + 2} \approx 0{,}75$$

$$A(3/4) = 1 - 3\left(\frac{1}{10} - \sum_{n=2}^\infty \frac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n - 7)}{4^n\cdot n!}\,\frac{2}{3n + 2}\right) \approx 0{,}67$$

(Intrat în redacţie la 16 iunie 1971)

BIBLIOGRAFIE

1. Akatnov, H. I., „Priclad. Mat. i Mehanika (PMM)", 1, 1960.
2. Vulis, L. A., Kaşkarov, V. P., *Teoria strui viaskoi jidkosti*, Izd. Nauka, Moskva, 1965.
3. Oroveanu, T., *Mecanica fluidelor vîscoase*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1967.
4. Shih-I Pai, *Fluid Dynamics of Jets*, D. Van Nostrand Comp., Inc., New-York.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ В ВЯЗКИХ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫХ СТРУЯХ

(Резюме)

В статье определяется в аналитическом виде, с помощью переменных Мизеса из теории пограничного слоя, распределение температуры в струе, распространяющейся вдоль плоской пластинки. Предполагается, что струя является вязкой и несжимаемой и что окружающая жидкость находится в состоянии покоя при постоянной температуре.

SUR LA DÉTERMINATION DE LA TEMPÉRATURE DANS LES JETS VISQUEUX SEMI-LIMITÉS

(Résumé)

Les auteurs de l'article déterminent sous une forme analytique, à l'aide des variables de Mises, dans la théorie de la couche limite, la répartition de la température dans un jet qui se propage le long d'une plaque plane. On suppose que le jet est visqueux et incompressible et que le fluide environnant est en repos à une température constante.

CRONICA

ALMOST COQUATERNION STRUCTURES

Abstract of the doctor thesis of Mathematical Sciences, prepared by CONSTANTIN N. UDRIŞTE, *maintained at the Cluj University, on September* 28, 1971.

The paper defines and studies a structure for some $(4n + 3)$-dimensional manifolds which is named almost coquaternion (metric) structure. This structure is composed of three almost cocomplex (metric) structures which satisfy some relations and may be considered as analogue to the almost quaternion (Hermitian) structure for $(4n + 4)$-dimensional manifolds.

The results are included in seven chapters whose contents are given shortly. Chapter I gives some necessary and sufficient conditions for the existence of an almost coquaternion (metric) structure. In Chapter II the author constructs and studies almost quaternion (Hermitian) structures on some product manifolds in which one of the factors is an almost coquaternion (Riemannian) manifold. Chapter III describes those affine connections which are compatible with an almost coquaternion (metric) structure. In Chapter IV it is shown that an orientable hypersurface of an almost quaternion (Hermitian) manifold has a naturally induced almost coquaternion (metric) structure and that an almost coquaternion Riemannian manifold can be imbedded in a certain almost quaternion Hermitian manifold as a totally umbilical or geodesic hypersurface. Chapter V gives some conditions under which an almost coquaternion (Riemannian) manifold is the bundle space of a principal fiber bundle and investigates some properties of this fibering. In Chapter VI it is shown that a certain subset of all Φ-transformations over an almost cocomplex compact manifold is a Lie group and some implications of this fact are studied. Also one proves that every $(4n + 3)$-dimensional Lie group admits a left invariant almost coquaternion structure. In Chapter VII the author gives explicitly almost coquaternion (metric) structures on some manifolds.

President: Prof. PETRE MOCANU
Scientific leader: Prof. GHEORGHE TH. GHEORGHIU
Reviewers: Acad. Prof. GHEORGHE CĂLUGĂREANU
Prof. FRANCISC RADO
Prof. CORNEL SIMIONESCU.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL STRUCTURILOR DE INCIDENŢĂ BI- ŞI TRI-DIMENSIONALE

Rezumatul tezei de doctorat susţinută la 13 martie 1971, la Universitatea „Babeş-Bolyai" din Cluj, de V. GROZE, pentru obţinerea titlului de doctor în matematici.

În primul capitol se extinde metoda de coordonatizare dată de M. Hall pentru structuri de incidenţă care generalizează planul proiectiv. Se generalizează însăşi noţiunea de structură de incidenţă, cerînd unicitatea dreptei prin două puncte numai pentru perechile de puncte aşezate pe dreptele a două ţesuturi. Se introduc în acest fel prestructurile de incidenţă şi prestructurile de incidenţă slabe. Acestora le corespund structuri algebrice cu o operaţie ternară parţială. Tranzitivităţile se definesc cu ajutorul unor aplicaţii, numite perspectivităţi slabe şi omologii, care păstrează coliniaritatea numai a anumitor puncte. Ca şi în cazul clasic, tranzivităţile implică în structura algebrică asociată proprietăţi de reprezentare prin două operaţii, proprietăţi de asociativitate şi distributivitate. În ipoteza unor tranzitivităţi, o prestructură de incidenţă slabă este scufundabilă într-o prestructură de incidenţă.

În capitolul II se studiază structurile de incidenţă de translaţie, care generalizează planele proiective de translaţie. În timp ce acestora din urmă le corespund sistemele Veblen-Wedderburn avînd ca operaţie aditivă un grup comutativ, la structurile de incidenţă de translaţie corespund sisteme Veblen-Wedderburn generalizate, în care operaţia de adunare încă formează un grup, dar în general necomutativ. Se arată că centrul acestui grup sau se reduce la elementul neutru sau este egal cu grupul întreg. Se dau condiţiile în care o structură de incidenţă de translaţie poate fi scufundată într-un plan proiectiv de translaţie. Acestea se exprimă prin închiderea unor configuraţii care se deduc din teorema mică a lui Desargues. Se extind pentru structurile de incidenţă de translaţie rezultatele cu privire la nucleu şi la structura de spaţiu vectorial peste nucleu al grupului translaţiilor. Caracterizarea lui André a planelor de translaţie prin congruenţe se extinde cu ajutorul cvazicongruenţelor.

În literatură teoria planelor proiective nu s-a generalizat la spaţiul tridimensional, căci din axiomele de incidenţă proiective rezultă deja teorema lui Desargues şi se pierd analoagele tuturor situaţiilor în care această teoremă nu este valabilă.

În capitolul III, utilizîndu-se generalizările noţiunii de structură de incidenţă bidimensională, se defineşte structura de incidenţă tridimensională ca o mulţime împreună cu două sisteme de submulţimi, numite drepte şi plane care satisfac 11 axiome. Se introduc coordonate şi o operaţie cvinară pe mulţimea de coordonate. În ipoteze de tranzitivitate operaţia cu 5 argumente poate fi compusă cu ajutorul unei operaţii aditive şi două multiplicative, care se reduc la una singură în cazul unor ipoteze mai tari de tranzitivitate. Se extinde studiul translaţiilor şi a sistemelor Veblen-Wedderburn generalizate. Lucrarea se încheie cu o nouă caracterizare a spaţiului proiectiv tridimensional.

COMISIA DE DOCTORAT
Preşedinte: Prof. Dr. P. MOCANU
Conducător ştiinţific: Acad. G. CĂLUGĂREANU
Membri: Prof. Dr. doc. D. V. IONESCU
Prof. Dr. doc. LASCU L. BAL
Prof. Dr. F. RADO.

CONTRIBUŢII LA STUDIUL REZOLVĂRII ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE ÎN SPAŢII SUPERMETRICE

Rezumatul tezei de doctorat susţinută la 6 februarie 1971, la Universitatea „Babeş-Bolyai" din Cluj, de S. GROZE, *pentru obţinerea titlului de doctor în matematici.*

În lucrare se face un studiu privind rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare în spaţii supermetrice, continuînd şi extinzînd în acest spaţiu rezultatele obţinute de către unii autori. Se aduc contribuţii la elucidarea unor probleme importante în studiul rezolvării acestor ecuaţii, prin metode iterative şi anume: construirea de metode iterative, studiul convergenţei procedeului utilizat, stabilirea condiţiilor de existenţă şi de unicitate a soluţiilor, studiul rapidităţii convergenţei, a ordinului de convergenţă precum şi delimitarea efectivă a erorii.

Capitolul I este dedicat stabilirii noţiunilor fundamentale care creează cadrul de studiu al lucrării, fiind expuse rezultatele necesare din teoria operatorilor liniari şi a calculului diferenţial în spaţiile supermetrice. Se utilizează şi se precizează unele rezultate obţinute de către I. Collatz şi B. Jankó.

Capitolul II prezintă rezultate privind metodele convergente de ordinul k, extinzîndu-se noţiunea de ordin de convergenţă dată pentru spaţii liniar normate, în condiţiile spaţiului supermetric. Studiul acesta se face — spre deosebire de L. Collatz — în spaţii supermetrice nesupuse condiţiei suplimentare de „L-supermetricitate".

În capitolul III se studiază rezolvarea ecuaţiilor operaţionale cu ajutorul diferenţelor divizate generalizate, evitîndu-se astfel utilizarea derivatelor în sens Fréchet. Se continuă studiul asupra diferenţelor divizate efectuate de către unii autori: B. Jankó şi Balazs — Goldner, trecînd apoi la studiul metodei coardei (şi a variantei de tip Steffensen a ei) şi a metodelor iterative de ordinul superior construite cu ajutorul diferenţelor divizate (metoda analogă metodei parabolelor tangente, respectiv analoga metodei hiperbolelor tangente.)

Capitolul IV este consacrat rezultatelor privind condiţiile de existenţă a soluţiei, respectiv de convergenţă a metodei folosite, utilizîndu-se principiul general al majorantei formulat de către L. V. Kantorovici. Astfel, pe lîngă ecuaţia operaţională se consideră o ecuaţie reală majorantă şi pe baza condiţiilor de convergenţă folosite pentru ecuaţia majorantă se stabilesc condiţii de exigenţă şi convergenţă pentru ecuaţia operaţională studiată. După studierea din această perspectivă a metodei aproximaţiilor succesive, se cercetează în acelaşi mod şi metodele expuse în capitolul III.

În capitolul V se utilizează rezultatele capitolelor precedente la găsirea soluţiilor unor clase de ecuaţii diferenţiale ordinare, ecuaţii cu derivate parţiale şi sisteme de ecuaţii algebrice, spaţiul supermetric în care au fost expuse rezultatele precedente facilitînd, prin posibilităţile de alegere a normei, rezolvarea problemelor concrete propuse.

COMISIA DE DOCTORAT
Preşedinte: Prof. Dr. P. MOCANU
Conducător ştiinţific: Acad. G. CĂLUGĂREANU
Membri: Prof. emerit Dr. doc. D. V. IONESCU
Prof. Dr. doc. GH. PIC
Prof. Dr. B. JANKÓ

CONTRIBUŢII LA INTEGRAREA APROXIMATIVĂ A ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE CU AJUTORUL FUNCŢIILOR SPLINE

Rezumatul tezei de doctorat susţinută la 3 aprilie 1971, la Universitatea „Babeş-Bolyai" din Cluj, de GHEORGHE MICULA, *pentru obţinerea titlului de doctor în matematici.*

În lucrare sînt aduse unele contribuţii la integrarea aproximativă a ecuaţiilor diferenţiale cu condiţii (iniţiale sau polilocale) date, utilizînd teoria funcţiilor spline. Soluţiile aproximative construite sînt funcţii spline polinomiale care se arată că converg către soluţia exactă, iar derivatele lor pînă la un anumit ordin, către derivatele soluţiei exacte.

Lucrarea conţine o introducere şi cinci capitole.

Capitolul I este consacrat unei succinte sinteze a teoriei funcţiilor spline, enumerînd dintre numeroasele proprietăţi remarcabile ale acestor funcţii numai pe acelea care sînt utilizate în capitolele următoare. Relaţiile de consistenţă ce caracterizează funcţiile spline permit stabilirea legăturii între metodele discrete ale multipaşilor şi cele date de autor.

Capitolul II conţine metoda de construcţie a soluţiei aproximative spline pentru soluţia problemei lui Cauchy relativ la ecuaţia diferenţială neliniară de ordinul n. Se dau teoreme de existenţă şi de convergenţă a soluţiei aproximative spline.

Capitolul III conţine metode de aproximare prin funcţii spline a soluţiilor sistemelor neliniare de ecuaţii diferenţiale cu condiţii iniţiale studiindu-se şi convergenţa acestor metode.

În Capitolul IV se dau noi metode de aproximare în care aproximaţiile spline construite sînt de grad $2m$ şi de clasă C_m. Renunţîndu-se la ordinul înalt de netezime a soluţiei aproximative se obţin metode convergente oricare ar fi m.

În Capitolul V se dau metode de aproximare ale soluţiilor unor probleme bilocale pentru ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul doi, cu ajutorul funcţiilor spline cubice. Se arată că soluţia aproximativă construită cu ajutorul funcţiilor B-spline există în mod unic şi converge către soluţia exactă.

Rezultatele cuprinse în teză evidențiază eficacitatea funcțiilor spline ca instrument de aproximare a soluțiilor ecuațiilor diferențiale prin faptul că aproximează global soluțiile exacte, sînt continue, derivabile și au remarcabile proprietăți de convergență.

Rezultatele originale ale autorului, cuprinse în această teză au fost publicate în revistele; Z.A.M.M., 52–3, (1972), pp. 189–190; Anal. St. Univ. „Al. I. Cuza" din Iași, 17, (1971), pp. 139–155; Studia Univ. „Babeș-Bolyai" Cluj, Ser. Math.-mec. Fasc. 2, 1971, pp. 25–39; Fasc. 1, 1972, pp. 21–31; iar o parte se află sub tipar la revistele: Revue Roumaine de Math. Pures et Appliq. Bucarest, și Journal of Approx. Theory.

COMISIA DE DOCTORAT

Președinte: Prof. Dr. P. MOCANU,
Conducător științific: Prof. Emerit Dr. Doc. D. V. IONESCU
Membri: Prof. Emerit Dr. Doc. A. HAIMOVICI (Iași)
Prof. Dr. D. D. STANCU (Cluj)
Conf. Dr. E. SCHECHTER (Cluj).

TEOREME DE CARACTERIZARE A SOLUȚIILOR ANUMITOR PROBLEME DE OPTIMIZARE

Rezumatul tezei de doctorat susținută la 24 iunie 1971, la Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj, de WOLFGANG WERNER BRECKNER, *pentru obținerea titlului de doctor în matematici.*

Problemele de optimizare studiate în matematică pot fi încadrate într-una din următoarele formulări:

Fie F o mulțime nevidă în care s-a introdus o relație binară notată cu $<$ și $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ două submulțimi nevide ale lui F.

Problema I: Să se determine un element a_0 al mulțimii $\mathfrak{A}$ în așa fel încît în mulțimea $\mathfrak{A}$ să nu existe nici un element a cu proprietatea $a < a_0$.

Orice problemă de acest fel se numește problemă de minimizare, iar soluțiile ei, elemente minimale ale mulțimii $\mathfrak{A}$.

Problema II: Să se determine un element a'_0 al mulțimii $\mathfrak{A}'$ în așa fel încît în mulțimea $\mathfrak{A}'$ să nu existe nici un element a' cu proprietatea $a'_0 < a'$.

Problemele de acest fel se numesc probleme de maximizare, iar soluțiile lor elemente maximale ale mulțimii $\mathfrak{A}'$.

Dacă $\leqslant$ este o relație binară în F și unei probleme de minimizare i se poate atașa o problemă de maximizare în așa fel încît mulțimile $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ corespunzătoare să se bucure de proprietățile:

1° un element $a_0 \in \mathfrak{A}$ este atunci și numai atunci minimal, dacă există un element maximal $a'_0 \in \mathfrak{A}'$ pentru care are loc relația $a_0 \leqslant a'_0$;

2° un element $a'_0 \in \mathfrak{A}'$ este atunci și numai atunci maximal, dacă există un element minimal $a_0 \in \mathfrak{A}$ pentru care are loc relația $a_0 \leqslant a'_0$;

atunci cele două probleme de optimizare se numesc duale față de relația binară $\leqslant$.

Scopul principal al lucrării de față, care conține o introducere și patru capitole, este de a arăta că anumite clase foarte generale de probleme de optimizare din spații vectoriale (respectiv vectoriale topologice) ordonate sînt duale față de o anumită relație binară.

În introducere se prezintă un scurt istoric al teoriei dualității problemelor de optimizare, iar în capitolul I aparatul matematic necesar în capitolele următoare. Capitolul II este consacrat expunerii unei teorii generale a dualității, ale cărei rezultate principale sînt cuprinse în două teoreme de dualitate. Una dintre aceste teoreme este prezentată și sub forma unor teoreme de punct-șa.

Capitolul III cuprinde particularizarea teoremelor din capitolul precedent pentru problema programării convexe și o generalizare a teoriei funcțiilor conjugate elaborată de W. Fenchel. Tot ca aplicații ale teoremelor generale, stabilite în lucrare, se demonstrează criterii de caracterizare a elementelor minimale cu ajutorul subgradienților, criterii care generalizează teoreme cunoscute din teoria celei mai bune aproximații din spații vectoriale normate. Capitolul III se încheie cu o secțiune consacrată studiului sorilor față de funcționale subliniare

În capitolul IV se studiază o generalizare a problemei celei mai bune aproximații, considerîndu-se în locul normei o funcțională de forma $||T(\cdot)||$, unde T este o aplicație continuă a unui spațiu vectorial normat $(Y, ||\cdot||)$ în el însuși. Ideea de bază constă în definirea unei proprietăți de regularitate față de o mulțime de conuri și în demonstrarea unui criteriu de tip Markov-Kolmogorov pentru mulțimi care au această proprietate.

Bibliografia cuprinde 97 de titluri.

COMISIA DE DOCTORAT

Președinte: Prof. Dr. PETRU MOCANU
Conducător științific: Acad. Prof. Dr. Doc. TIBERIU POPOVICIU (Cluj)
Membri: Prof. Dr. ELENA POPOVICIU (Cluj)
Conf. Dr. IOAN MARUȘCIAC (Cluj)
Șef de Sector Dr. DUMITRU RIPIANU (Cluj).

PRELUNGIREA COLINIAȚIILOR DEFINITE PE O PARTE A SPAȚIULUI PROIECTIV

Rezumatul tezei de doctorat susținută la 6 martie 1971, la Universitatea „Babeș-Bolyai" din Cluj, de ADALBERT ORBAN, *pentru obținerea titlului de doctor în matematici.*

Problema principală studiată în această teză este următoarea:

Fie $\mathfrak{P}$ și $\mathfrak{P}'$ mulțimile de puncte a două spații proiective generale, iar $\mathcal{C}$ o submulțime a lui $\mathfrak{P}$. Se cere caracterizarea mulțimii $\mathcal{C}$, astfel ca pentru orice coliniație $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathfrak{P}'$ să existe o coliniație $f: P \rightarrow P'$ cu proprietatea $f|C = \Phi$, cu alte cuvinte se caută condiții cu privire la mulțimea $\mathcal{C}$ care să asigure prelungibilitatea coliniației Φ pe spațiul întreg.

Se știe că dacă $\mathcal{C}$ este formată din trei drepte ale planului proiectiv, o coliniație Φ, dată pe ea, în general nu este prelungibilă pe întregul plan. J. Aczél, W. Benz și M. A. Mc.-Kiernan au demonstrat în 1969 că orice coliniație dată pe patru drepte (nu toate concurente) se poate prelungi pe întregul plan, iar F. Rado a arătat că prelungibilitatea are loc și atunci cînd $\mathcal{C}$ este formată din trei drepte și un punct nesituat pe ele.

Lucrarea generalizează aceste rezultate în mai multe privințe. În cazul planului proiectiv desarguesian, în capitolul I al tezei se arată că dacă $\mathcal{C}$ este formată din drepte concurente, o coliniație dată pe $\mathcal{C}$, în general nu se poate prelungi, iar dacă $\mathcal{C}$ este formată din punctele unei conice, o dreaptă și un punct, orice coliniație dată pe $\mathcal{C}$ se poate prelungi pe întregul plan.

Tot în cazul planului proiectiv desarguesian, în capitolul II, aplicînd o metodă nouă, bazată pe proprietățile corpului de endomorfisme al translațiilor planului proiectiv se determină proprietăți generale de natură geometrică ale unei mulțimi $\mathcal{C}$ de puncte oarecare care asigură prelungibilitatea oricărei coliniații date pe ea. Particularizînd aceste condiții, se găsesc o serie de teoreme, fiecare reprezentînd cîte o generalizare a rezultatelor cunoscute. Deosebit de simplu este rezultatul găsit în cazul unui plan proiectiv ordonat.

În capitolul III se studiază problema de mai sus în cazul unui spațiu proiectiv tridimensional, respectiv general.

Capitolul IV tratează problema coliniațiilor neinjective (omomorfismele) definite pe o mulțime $\mathcal{C}$ a planului proiectiv, precum și prelungibilitatea lor.

Ținînd seamă de strînsa legătură ce există între coliniațiile planului definite pe o mulțime $\mathcal{C}$ și transformarea nomogramelor în puncte aliniate, capitolul V, cu caracter aplicativ, tratează mai multe rezultate ale autorului în privința optimizării nomogramelor cu ajutorul coliniațiilor diferite pe scările nomogramei.

COMISIA DE DOCTORAT

Președinte: Prof. Dr. P. MOCANU
Conducător științific: Acad. Prof. Dr. doc. G. CĂLUGĂREANU
Membri: Prof. Dr. doc. GH. PIC
Prof. Dr. doc. LASCU L. BAL
Prof. Dr. F. RADO.

Şedinţe de comunicări

La şedinţele de comunicări organizate în anul 1971 la Facultatea de Matematică-Mecanică s-au prezentat următoarele referate:

8 ianuarie

Acad. prof. Gh. Călugăreanu, Invarianţi de contracţie în grupuri II.

Prof. dr. D. D. Stancu, Cercetări relative la aproximarea uniformă a funcţiilor.

12 februarie

Prof. dr. A. Pal, Mecanica cerească şi modelul atmosferei terestre.

Lect. dr. M. I. Pop, Despre stratul limită nestaţionar tridimensional.

29 octombrie

Prof. dr. doc. Gh. Pic, Despre o teoremă a lui J. Thompson.

3 decembrie

Conf. dr. M. Ţarină, Cercetarea matematică la Universitatea din Pisa (Italia).

Lect. dr. Gh. Coman, Monospline bidimensionale şi formule optimale de cubatură.

Participări la manifestări ştiinţifice internaţionale

11 noiembrie 1970—31 octombrie 1971. Conf. dr. M. Ţarină a beneficiat de o bursă dată de statul italian fiind la Scuola Normale Superiore din Pisa. În această perioadă a ţinut conferinţe din următoarele teme: „Cîmpuri de vectori pe suprafeţe compacte" şi „Fibrate vectoriale omogene pe spaţii simetrice".

18—31 martie. Conferinţa de geometrie, Waterloo (Canada). A participat Prof. dr. Fr. Radó şi a ţinut comunicarea „Prelungirea coliniaţiilor".

17—23 mai. Simpozionul internaţional „Variaţia parametrilor atmosferei înalte cauzată de activitatea solară", Kazimierz (Polonia) A participat lect. dr. V. Ureche.

24—29 mai. Simpozionul I.U.T.A.M. de strat limită nestaţionar, Quebec (Canada). A participat lect. dr. I. Pop.

27 mai — 11 iunie. Prof. dr. A. Pal a făcut o vizită de documentare şi conferinţe în U.R.S.S., în cadrul căreia a vizitat: Moscova, Institutul Astronomic „P. K. Sternberg" de pe lîngă Universitatea din Moscova şi Consiliul Astronomic al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S., unde a ţinut conferinţa „Despre lucrările Observatorului Astronomic din Cluj" şi comunicarea „O orbită intermediară a satelitului Pămîntului, construită cu ajutorul metodei de mediere a ecuaţiilor mişcării"; Leningrad, Universitatea „Jdanov" — catedra de Astronomie şi Institutul de Astronomie Teoretică al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S. şi Pulkovo, Observatorul Astronomic Central al Academiei de Ştiinţe a U.R.S.S.

2—12 iunie. Şcoala de vară C.I.M.E. de stereodinamică, Bressanone (Italia). Au participat Conf. dr. A. Turcu şi Lect. dr. T. Petrilă.

16 iunie. Colocviul „Metode numerice ale teoriei aproximării", Oberwolfach (R.F.G.) Au participat:

1. Prof. dr. I. Maruşciac, Caracterizarea matricială a justapolinoamelor.
2. Acad. Prof. T. Popoviciu, Über die Approximation der Funktionen und der Losungen einer Gleichung durch quadratische Interpolation.
3. Prof. dr. E. Popoviciu, Asupra unui procedeu de rezolvare aproximativă a ecuaţiilor.
4. Prof. dr. D. D. Stancu, Approximation of functions by means of a new class of positive linear operators.

21 iunie. Acad. Prof. T. Popoviciu şi Prof. dr. E. Popoviciu au vizitat Universitatea din Stuttgart (R.F.G) unde au ţinut respectiv conferinţele „Uber die Invarianz der Gestalt einer Funktion bei Interpolation" şi „Einige Bemerkungen bezuglich der besten Approximation mit Nebenbedingungen".

iunie. Congresul A.I.M.E.T.A., Udine (Italia). A participat Lect. dr. I. Stan care a ţinut comunicarea „Sulla strato limito di diffusia".

7—13 iunie. Conferinţa anuală de fizică cosmică din cadrul programului INTERKOSMOS, Praga (Cehoslovacia). A participat Prof. dr. doc. Gh. Chiş.

15 august — 15 septembrie. Şcoala de vară de matematici organizată de UNESCO, Universitatea din Perugia (Italia). A participat Lect. dr. Gh. Micula care a ţinut două conferinţe cu tema „Integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale cu ajutorul funcţiilor spline".

13—17 septembrie. Şcoala de vară „Analiza spectrală a operatorilor neliniari"-Babylon (Cehoslovacia). Au participat Conf. dr M. Balazs şi Lect. dr. I. Kolumbàn.

12—18 septembrie. A IV-a Conferinţă de Teoria Probabilităţilor, Braşov. A participat Lect. dr. E. Frățilă care a ținut comunicarea: „La méthode Monte Carlo pour déterminer la solution des quelques équations différentielles d'ordre superieur'..

19—21 semptembrie. Sesiunea științifică a Tineretului Matematic Balcanic, București. Au participat:

1. Asist. Gr. Călugăreanu și asist. H. Wiesler, V-triple în V—categorii.
2. Asist. Rodica Neagoe, Contribuții la studiul grupurilor cu multioperatori.
3. Asist. D. Trif, Teoreme de continuitate pentru funcții subaditive și cîteva aplicații ale lor.
4. Asist. M. Frențiu, Asupra aproximării funcțiilor prin combinații liniare de operatori liniari pozitivi.

15 septembrie — 15 decembrie. Lector. dr. T. Petrilă a fost la o specializare în Cehoslovacia la Universitatea din Praga, Catedra de Analiză Aplicată, unde a ținut comunicarea „A new method for computing the influence of the walls on the ideal flows".

20 octombrie — 20 decembrie: Conf. dr. I. A. Rus a fost la o specializare în U.R.S.S. la Universitatea din Moscova.

decembrie. Prof. dr. C. Kalik a vizitat Universitățile din Praga și Brno (Cehoslovacia) unde a ținut conferința: „Rezolvarea problemei lui Neumann cu metoda lui Schwarz".

Participări la manifestări științifice din țară

2—3 aprilie. SESIUNEA DE COMUNICĂRI A INSTITUTULUI POLITEHNIC, Cluj. Au participat:

1. Prof. emerit Dumitru V. Ionescu, Cîteva formule simple de cuadratură.
2. Lect. dr. Paraschiva Pavel, Asupra unei clase de formule de derivare numerică.
3. Lect. dr. Gheorghe Coman, Funcții „monospline" generalizate și formule optimale de cuadratură.
4. Lect. dr. Gh. Micula, Integrarea sistemelor de ecuații diferențiale cu ajutorul funcțiilor „spline".
5. Conf. dr Ioan A. Rus, Teoreme de punct fix de tip Banach-Kannan-Perov.

16—17 aprilie. SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A ACADEMIEI, Cluj. Au participat:

1. Acad. Prof. dr. T. Popoviciu, Despre conservarea alurii șirurilor prin operația de convoluție.
2. Prof. dr. E. Popoviciu, Asupra problemei celei mai bune aproximații cu restricții.

2—3 aprilie. SEMINARUL DE TEORIA ECUAȚIILOR FUNCȚIONALE CLUJ. A participat:

Conf. dr. A. Ney, Caracterizarea funcțională a elementelor spațiului $l^p(p \geqslant 1)$.

9—10 aprilie. SESIUNEA DE COMUNICĂRI A UNIVERSITĂȚII „BABEȘ-BOLYAI", CLUJ. Au participat:

1. Lect. Dorina Borșan, Aplicații o — continue.
2. Asist. Nicolae Both, Teorii deductive și alegebre universale.
3. Acad. Prof. Gheorghe Călugăreanu, Invarianți de conjugare în grupuri.
4. Lect. dr. Gheorghe Coman, Funcții „monospline" de cea mai bună aproximație și formule optimale de cuadratură.
5. Lect. dr. Pavel Enghiș, Asupra spațiilor Ricci recurente.
6. Lect. dr. Elena Frățilă, Evaluarea măsurii de informație pe baza unei selecții.
7. Asist. Militon Frențiu, Studiul unor combinații liniare de operatori liniari pozitivi.
8. Lector dr. Victoria Groze, Generalizarea planelor de translație.
9. Prof. dr. Ioan Marușciac și conf. dr. Marcel Rădulescu, Curbe de eficiență pentru o problemă de programare matematică generală.
10. Prof. dr. Petru Mocanu, Asupra unei proprietăți geometrice în teoria reprezentărilor conforme.
11. Asist. dr. Grigore Moldovan, Asupra operatorilor convolutivi relativ la funcții de mai multe variabile.
12. Lect. dr. Béla Orbàn, Prelungirea unei coliniații definite pe o parte a spațiului proiectiv n-dimensional.
13. Prof. dr. doc. Gheorghe Pic și lect. dr. Ioan Purdea, Ideale în inele n-are.
14. Prof. dr. Francisc Rádo, Izomorfismele grupului de translație asociat unui plan de translație.
15. Asist. Maria Schechter, Asupra unor rezultate ale lui R. C. Lyndon.
16. Prof. dr. Dimitrie Stancu, Cercetări relative la aproximarea funcțiilor cu ajutorul unor clase de operatori liniari pozitivi.
17. Asist. Felicia Stancu, Asupra aproximării funcțiilor cu ajutorul unor clase de operatori liniari pozitivi.

18. Lect. Cornel Tarția, Asupra grupului automorfismelor unui graf.

19. Asist. Angela Vasiu, Spații metrice generalizate.

20. Lect. dr. Emeric Virag, Despre o clasă de grupuri finite.

21. Conf. dr. Violeta Zelmer, Un analog al algebrei booleene.

22. Conf. dr. Martin Balázs și asist. Gavrilă Goldner, Asupra existenței diferențelor divizate în spații abstracte.

23. Asistent dr. Wolfgang Breckner, Asupra criteriului lui Markov-Kolmogorov.

24. Lect. dr. Margareta Frenkel, Aplicarea metodei de mediere pentru studiul sistemelor de ecuații diferențiale cu un parametru unic.

25. Prof. emerit Dumitru V. Ionescu, Extinderea la o formulă de cubatură a unei formule de cuadratură de tip Gauss.

26. Conf. dr. Carol Kalik, Despre rezolvarea aproximativă a unor probleme la limită.

27. Lector dr. Iosif Kolumbàn, Asupra unor probleme de optimizare neliniară.

28. Asistent Luciana Lupaș, Asupra generalizării noțiunii de funcție stelară.

29. Lect. dr. Gheorghe Micula, Integrarea aproximativă a ecuațiilor diferențiale neliniare de ordinul doi cu ajutorul funcțiilor spline.

30. Conf. dr. Ioan Muntean, Soluții aproape periodice pentru ecuația oscilațiilor neliniare.

31. Conf. dr. Andrei Ney, Un nou studiu structural în mulțimea șirurilor numerice.

32. Lect. dr. Paraschiva Pavel, O generalizare a unei formule de derivare a lui Schwarz.

33. Prof. dr. Elena Popoviciu, Teoreme de medie legate de cea mai bună aproximație cu restricții.

34. Acad. prof. Tiberiu Popoviciu, Asupra poligoanelor înscrise și circumscrise unui arc convex.

35. Conf. dr. Ioan A. Rus, Teoreme de punct fix în spații metrice.

36. Conf. dr. Ervin Schechter, Evaluări interioare în integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale.

37. Lector dr. Paul Szilagyi, Variabile proprii ale unei clase de operatori eliptici.

38. Conf. dr. Petre Brădeanu, Considerații asupra integrării ecuațiilor stratului limită.

39. Prof. dr. doc. șt. Gheorghe Chiș, Variația masei binarei Y Leonis.

40. Fizician Dorin Gh. Chiș, Determinarea elementelor fotometrice ale variabilei UX Ceti.

41. Matematician Paul Horedt, Studiul obiectivului camerei UFISZ—25—2 de la Observatorul Astronomic — Cluj.

42. Cercet. șt. Tiberiu-Oproiu, Influența rezistenței atmosferei asupra perioadei modale a sateliților artificiali cu excentricități mici.

43. Prof. dr. Arpàd Pàl, O nouă orbită intermediară a satelitului artificial al Pămîntului (cazul rezistenței atmosferei), construită prin metoda medierii ecuațiilor mișcării.

44. Lector dr. Ioan Pop, Soluții ale ecuațiilor stratului limită nestaționar tridimensional.

45. Cercet. șt. Vasile Pop, Variabila scurt periodică BK Eridani.

46. Lect. dr. Titus Petrilă, Asupra unor formule legate de influența pereților în mișcarea fluidelor ideale.

47. Lect. dr. Ioan Stan, Unele probleme ale scurgerilor cu reacții chimice.

48. Cercet. șt. princ. Ioan Todoran, Considerații asupra determinării mișcării apsidiale lung periodice.

49. Lector dr. Vasile Ureche, Asupra metodei lui Napier pentru reflexia luminii în sistemele binare strînse.

15 mai. SESIUNEA DE COMUNICĂRI A INST. PEDAGOGIC DIN TG. MUREȘ. Au participat:

1. Prof. dr. A. Pàl, O orbită intermediară a sateliților artificiali ai Pămîntului ce se mișcă sub influența presiunii luminii.

2. Lect. dr. Gh. Coman, Monospline generalizate de abatere minimă în L^2 [a, b].

3. Lector dr. Elena Frățilă, O metodă statistică de derivare numerică.

4. Conf. dr. M. Balázs, Asupra aplicabilității metodei coardei la rezolvarea unor ecuații integrale.

5. Lect. dr. Gh. Micula, Funcții spline de aproximare a soluțiilor unor probleme bilocale.

6. Conf. dr. A. Ney, Rezolvarea unor ecuații funcționale ce caracterizează sumabilitatea simplă și integrabilitatea improprie.

7. Lector dr. P. Szilagyi, Operatorul diferențial al lui Bițadze.

8. Lect. dr. V. Ureche, Despre pierderea de lumină în cursul eclipselor stelelor binare strînse pentru o lege pătratică de întunecare spre margine.

9. Cercet. șt. T. Oproiu, Asupra perioadei anomalistice a sateliților artificiali ai Pămîntului.

10. Asistent. G. Goldner, Aproximații succesive pentru transformări multivoce în spații uniforme.

11. Lect. dr. E. Virág, O generalizare a sumei directe în grupuri cu multioperatori.

12. Asist. Ileana Rus, Asupra polinoamelor prime între ele.

13. Conf. dr. I. Maurer, Asupra seriilor dintr-un grup topologic.

14. Lect. dr. I. Purdea, Despre o teoremă a lui Poincaré.

15. Asist. Lucia Negrea, Observații asupra unor probleme de teoria numerelor.

28—30 mai. SESIUNEA DE COMUNICĂRI A INSTITUTULUI PEDAGOGIC DIN ORADEA. Au participat:

1. Prof. dr. I. Marușciac, Asupra unor mulțimi extremale în teoria aproximării.

2. Conf. dr. A. Ney, O integrală booleană.

3. Conf. dr. A. Ney, Asupra șirului generalizat de sume integrale.

4. Conf. dr. M. Rădulescu, Construirea unei baze pentru o funcție integrală M*.

31 mai — 1 iunie. CONSFĂTUIREA „INTRODUCEREA ELEMENTELOR DE CALCUL NUMERIC ȘI PROGRAMARE MATEMATICĂ ÎN LICEU", ORADEA. Au participat:

1. Conf. dr. I. Muntean, Introducere în teoria controlului optimal.

2. Acad. Prof. Tiberiu Popoviciu, Problema reprezentării numerelor naturale și întregi într-o bază prin regula de poziție.

noiembrie. COLOCVIUL DE TEORIA JETURILOR, CLUJ. Au participat:

1. Conf. dr. P. Brădeanu, Asupra jeturilor vîscoase semimărginite.

2. Prof. dr. A. Pàl, Noul model al atmosferei terestre construit cu ajutorul observațiilor sateliților artificiali ai Pămîntului.

3. Lect. dr. I. Pop, Mișcarea nestaționară în jurul unui corp de rotație.

4. Lect. dr. I. Stan, Reacții chimice în stratul limită.

13—15 noiembrie. CONFERINȚA NAȚIONALĂ DE ASTRONOMIE, CLUJ. Au participat:

1. Prof. dr. doc. șt. Gh. Chiș, a) Pierderea de masă la unele sisteme binare strînse. b) 50 de ani de existență a Observatorului Astronomic din Cluj.

2. Prof. dr. doc. Gh. Chiș, Matematician V. Mioc, Determinarea perioadei de rotație a sateliților artificiali din observații fotometrice.

3. Cercet. G. P. Horedt, Determinarea erorilor globale ale teodolitului de tip TZK.

4. Cercet. T. Oproiu, Considerații asupra funcției de rezistență a lui Persen din Teoria mișcării sateliților artificiali ai Pămîntului.

5. Prof. dr. A. Pál, Asupra unei metode de integrare a ecuațiilor mișcării satelitului artificial al Pămîntului.

6. Cercet. V. Pop, Determinări de viteze radiale la variabila β Cephei.

7. Cercet. princ. I. Todoran, Considerații asupra perioadei stelei T. W. Draconis.

8. Cercet. princ. I. Todoran, cercet. V. Pop, Variația perioadei binarei strînse V. W. Cephei.

9. Cercet. princ. I. Todoran, lect. dr. V. Ureche, cercet. V. Pop, cercet. Dorin Chiș, Fotometrul fotoelectric al Observatorului Astronomic din Cluj. Determinarea constantelor de extincție și de trecere la sistemul U.B.V.

10—11 decembrie. SEMINARUL DE TEORIA ECUAȚIILOR FUNCȚIONALE, SUCEAVA. A participat:

Conf. dr. I. Muntean, Asupra convergenței soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale.

20—22 decembrie. CONFERINȚA NAȚIONALĂ DE GEOMETRIE ȘI TOPOLOGIE, IAȘI. Au participat:

1. B. Orbán, Despre prelungibilitatea coliniațiilor definite pe o mulțime de puncte a planului proiectiv desarguesian.

2. M. Țarină, Varietăți riemanniene W-eliptice.

Vizite

1. Prof. Z. O p i a l, Universitatea din Cracovia.
2. Prof. M. K u c z m a, Universitatea din Katovice.
3. Prof. K á l m á n L á s z l ó n é, Institutul „Bolyai", Szeged.
4. Prof. P h. H o l g a t e, Universitatea din Londra.
5. Prof. J. F e r r a n d, Universitatea Paris IV.
6. Prof. V. S k a d o v, Universitatea din Moscova.
7. Prof. F. M a k s u d i n, Inst. Mat. Acad. Baku.
8. Prof. V. T r n k o v a, Universitatea din Praga.

Intreprinderea Poligrafică Cluj 288/1972

În cel de al XVII-lea an de apariţie (1972) *Studia Universitatis Babeş–Bolyai* cuprinde seriile:

matematică–mecanică (2 fascicule);
fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie–mineralogie (2 fascicule);
geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
sociologie;
ştiinţe economice (2 fascicule);
psihologie–pedagogie;
ştiinţe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică–literatură (2 fascicule).

На XVII году издания (1972) *Studia Universitatis Babeş–Bolyai* выходит следующими сериями:

математика–механика (2 выпуска);
физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология–минералогия (2 выпуска);
география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
социология;
экономические науки (2 выпуска);
психология–педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание–литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XVII-me année de publication (1972) les *Studia Universitatis Babeş–Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques–mécanique (2 fascicules);
physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie–minéralogie (2 fascicules);
géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie;
sociologie;
sciences économiques (2 fascicules);
psychologie–pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique–littérature (2 fascicules).

43 875