

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 1

1972

C L U J

REDACTOR ȘEF: Prof. ȘT. PASCU, membru corespondent al Academiei

REDACTORI ȘEFI ADJUNCȚI: Acad. prof. ȘT. PÉTERFI, prof. GH. MARCU,
prof. A. NEGUCIOIU

COMITETUL DE REDACȚIE AL SERIEI MATEMATICĂ—MECANICĂ: Acad. prof.
G. CĂLUGĂREANU (redactor responsabil), prof. GH. CHIȘ, prof. P. MOCANU,
lector GH. COMAN (secretar de redacție)

STUDIA

UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 1

Redacția: CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 • Telefon: 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — CONTENTS

P. ENGIȘ, Sur les espaces V_n récurrents et Ricci récurrents • Asupra spațiilor V_n recurente și Ricci recurente • О V_n рекуррентных и Риччи рекуррентных пространствах	3
V. GROZE, Caracterizarea structurilor de incidență de translație cu ajutorul unei svasicongruențe • Характеристика трансляционных структур падения с помощью одной квазиконгруентности • A Characterization of the Structures of Translation Incidence with the Help of a Quasicongruence	7
C. N. UDRIȘTE, On Almost Coquaternion Structures • Asupra structurilor aproape cocuaternionice • О почти кокватернионовых структурах	11
GH. MICULA, Funcții spline de grad superior de aproximare a soluțiilor sistemelor de ecuații diferențiale • „Spline” функции высшей степени приближения решений систем дифференциальных уравнений • Spline Functions of Higher Degree of Approximation for Solutions of Systems of Differential Equations	21
P. T. MOCANU, Equations fonctionnelles aux implications • Ecuații funcționale cu implicații • Функциональные уравнения с импликациями	33
M. RĂDULESCU, Quasimesures algébriques définies sur des champs d'événements • Svasimăsurii algebrice definite pe câmpuri de evenimente • Алгебраические квазимеры, определенные на полях событий	37
E. FRĂȚILĂ, L'évaluation du paramètre inconnu de la densité de probabilité par la méthode d'approximations stochastiques • Evaluarea parametrului necunoscut al densității de probabilitate prin metoda aproximațiilor stochastice • Оценка неизвестного параметра плотности вероятности методом стохастических приближений	41
P. PAVEL, O extindere a unei formule de derivare numerică a lui V. N. Fadeeva. • Одно распространение формулы числового дифференцирования В.Н. Фадеевой • Extension d'une formule de dérivation numérique de V. N. Fadeeva	47
B. JANKÓ, S. GROZE, Sur la méthode de Newton dans les espaces L -supermétriques • Asupra metodei lui Newton în spații L -supermetrice • О методе Ньютона в L -сверхметрических пространствах	55

GH. COMAN, Asupra unor formule practice de cuadratură ● О некоторых практических квадратурных формулах ● On Some Practical Quadrature Formulae	61
G. MOLDOVAN, Asupra unor relații convolutive ● О конволютивных соотношениях ● Sur certaines relations convolutives	67
P. BRĂDEANU, Un calcul aproximativ al stratului limită hipersonic axial-simetric pe corpuri subțiri ● Приближённое вычисление пограничного сверхзвукового аксиально-симметрического слоя на тонких телах ● An Approximate Calculation of the Axisymmetrical Hypersonic Boundary Layer on Thin Bodies	73
D. BRĂDEANU, O soluție numerică a unei ecuații algebrice și folosirea ei în aerodinamică ● Числовое решение одного алгебраического уравнения и его применение в аэродинамике ● A Numerical Solution of an Algebraic Equation and its Application in Aerodynamics	83

Recenzii — Рецензии — Books — Livres parus

Eduard Stiefel, Einführung in die numerische Mathematik (D. D. STANCU)	93
Boursin, Jean Louis et Caussat, Pierre, Autopsie du hasard, (N. GHIRCOIAȘIU)	93
Schwarz, H. R., Ruthishauser, H. und Stiefel, E., Numerik symmetrischer Matrizen. Leitfaden der angewandten Mathematik und Mechanik (N. GHIRCOIAȘIU)	94
Jaeger, Arno, und Wenke, Klaus, Lineare Wirtschafts algebra. Eine Einführung. Leitfaden der angewandten Mathematik und Mechanik (N. GHIRCOIAȘIU)	94
Hermes, H., Einführung in die mathematische Logik (H. STEIN)	95
Toutes les mathématiques de base en „programmé” méthode Edouard Labin, Volume spécimen (AL. TOTH)	95

SUR LES ESPACES V_n RÉCURRENTS ET RICCI RÉCURRENTS

P. ENGHIS

1. Espaces récurrents. Un espace riemannien V_n est récurrent, d'après H. S. Ruse [1] et A. G. Walker [2], s'il existe un vecteur covariant φ_r tel que

$$R_{jkh,r}^i = \varphi_r R_{jkh}^i \quad (1)$$

où R_{jkh}^i sont les composants du tenseur de courbure des espaces V_n , et où la virgule désigne la dérivée covariante par rapport au tenseur métrique de l'espace.

En contractant la relation (1) en i et k on obtient

$$R_{jh,r} = \varphi_r R_{jh} \quad (2)$$

R_{jh} étant le tenseur de Ricci. Un espace V_n pour lequel la relation (2) est vérifiée est nommé Ricci récurrent [3]. De la manière dont on déduit la relation (2) il résulte qu'un espace de courbure récurrente est toujours Ricci récurrent, la réciproque n'étant pas toujours vraie [4], [5].

Si dans (1) $\varphi_r = 0$, l'espace est nommé espace symétrique dans le sens de Cartan [6]. Les espaces récurrents apparaissent comme une généralisation des espaces de Cartan.

Soit maintenant V_n un espace récurrent. Nous avons :

THÉORÈME 1. *Dans un espace V_n récurrent, le vecteur de récurrence φ_r vérifie la relation :*

$$[R_{jkh}^i - (\delta_k^i R_{jh} - \delta_h^i R_{jk})] \varphi_i = 0 \quad (3)$$

En effet, si l'on considère l'identité de Bianchi $R_{jkh,r}^i + R_{jhr,k}^i + R_{jrk,h}^i = 0$ dans laquelle on tient compte du (1), on obtient la relation donnée par Walker [2] : $\varphi_r R_{jkh}^i + \varphi_h R_{jhr}^i + \varphi_k R_{jrk}^i = 0$ qui, contractée en i et h , donne : $-\varphi_r R_{jk} + \varphi_k R_{jr} + \varphi_i R_{jrk}^i = 0$ de laquelle il résulte (3).

Si l'on pose :

$$A_{jkh}^i = R_{jkh}^i - (\delta_k^i R_{jh} - \delta_h^i R_{jk}) \quad (4)$$

on peut énoncer :

THÉORÈME 2. *Une condition nécessaire pour qu'un espace V_n soit récurrent est que le rang de la matrice $\|A_{jkh}^i\|$ soit plus petit que n .*

Le théorème 2 est une conséquence immédiate du théorème 1.

Le tenseur A_{jkh}^i étant introduit, on voit immédiatement qu'il vérifie les relations :

$$A_{jkh}^i + A_{jkh}^i = 0 \quad A_{jkh}^i + A_{khj}^i + A_{hjk}^i = 0$$

et ses tenseurs contractés vérifient les relations :

$$A_{ikh}^i = A_{khh} = 0 \quad A_{jih}^i = B_{jh} = (2 - n)R_{jh}$$

Une autre conséquence du théorème 1 est :

THÉORÈME 3. *Dans un espace V_n récurrent nous avons les relations :*

$$(R\delta_h^i - 2R_h^i) \varphi_i = 0 \quad (5)$$

En effet (5) est obtenue de (3) par l'augmentation de l'indice j et par contraction en j et k .

2. Espaces V_n de courbure projective récurrente. Dans un travail antérieur [8] nous avons introduit les espaces V_n de courbure projective récurrente notés par Ψ_n^* . Ce sont les espaces V_n pour lesquels il existe un vecteur covariant ψ_r tel que :

$$K_{jkh, r}^i = \psi_r K_{jkh}^i \quad (6)$$

où K_{jkh}^i sont les composants du tenseur de courbure projective

$$K_{jkh}^i = R_{jkh}^i - \frac{1}{n-1} (\delta_k^i R_{jh} - \delta_h^i R_{jk}) \quad (7)$$

Les espaces Ψ_n^* généralisent les espaces projectivement symétriques Ψ_n considérés par G. Y. S o o s [7] et étudiés par B a n d a n a G u p t a [9], espaces pour lesquels $\psi = 0$

THÉORÈME 4. *Un espace récurrent est toujours de courbure projective récurrente avec le même vecteur de récurrence.*

En prenant la dérivée covariante de la relation (7), nous avons :

$$K_{jkh, r}^i = R_{jkh, r}^i - \frac{1}{n-1} (\delta_k^i R_{jh, r} - \delta_h^i R_{jk, r})$$

et comme l'espace est récurrent, donc (1) et (2) ont lieu et il résulte (6) avec $\psi_r = \varphi_r$.

La réciproque n'est pas toujours vraie. Un tel exemple est donné dans le travail antérieurement cité [8]. Pour voir dans quelles conditions un espace de courbure projective récurrente est aussi récurrent nous énoncerons :

THÉORÈME 5. *Un espace de courbure projective récurrente est aussi récurrent avec le même vecteur de récurrence si et seulement s'il est Ricci récurrent de même vecteur de récurrence.*

La démonstration de ce théorème résulte immédiatement de notre théorème 4 et du théorème 1 du travail antérieurement cité [8].

3. Espaces Ψ_n^* Ricci récurrents. Soit maintenant V_n un espace de courbure projective récurrent avec le vecteur de récurrence ψ , et en même temps Ricci récurrent de vecteur v , donc un espace pour lequel (2) et (6) ont lieu.

THÉORÈME 6. *Dans un espace Ψ_n^* Ricci récurrent de vecteur v , le tenseur de courbure et le tenseur de Ricci vérifient la relation :*

$$\psi_i R_{jkh}^i - \left(\frac{1}{n-1} \psi_i + \frac{n-2}{n-1} v_i \right) (\delta_k^i R_{jh} - \delta_h^i R_{jk}) = 0. \tag{8}$$

En effet, si nous écrivons pour V_n la formule de Weyl [10] nous avons

$$R_{jkh, i}^i = \frac{n-2}{n-1} (R_{jh, k} - R_{jk, h}) \tag{9}$$

qui, si V_n est Ricci récurrent, peut être écrite

$$K_{jkh, i}^i = \frac{n-2}{n-1} (\delta_k^s R_{jh} - \delta_h^s R_{jk}) v_s. \tag{10}$$

En contractant (6) en i et r et tenant compte de (7) et (10) il résulte (8).

THÉORÈME 7. *Dans un espace Ricci récurrent de vecteur v , nous avons*

$$R_{,k} = v_k R \tag{11}$$

où R est la courbure scalaire.

La relation (11) résulte de (2) par l'augmentation de l'indice j et par contraction en j et h .

THÉORÈME 8. *Un espace Ψ_n^* Ricci récurrent de vecteur v , vérifie la relation*

$$\left(\psi_h + \frac{n-2}{2} v_h \right) R - n R_h^j \psi_j = 0. \tag{12}$$

En effet, dans le travail antérieurement cité [8], théorème 2, on a montré que dans un espace Ψ_n^* avec vecteur de récurrence ψ , nous avons

$$(R \delta_h^j - n R_h^j) \psi_j = - \frac{n-2}{2} R_{,h}$$

Si dans cette relation nous tenons compte de (11), il en résulte immédiatement la relation (12).

BIBLIOGRAPHIE

1. Ruse, H. S., *On simply harmonic spaces*, „Journal London Math. Soc.”, **21** (1946), 243–247.
2. Walker, A. G., *On Ruse's space of recurrent curvature*, „Proc. London Math. Soc.”, **2** (1950), 36–64.
3. Patterson, E. M., *Some theorems on Ricci-recurrent spaces*, „Journal London. Math. Soc.” **27** (1952), 287–295.
4. Roter, W., *Quelques remarques sur les espaces récurrents et Ricci-récurrents*, „Bull. de l'Acad. Polonaise des Sciences”, **X** (1962), 10, 533–536.
5. Chaki, M. C., *Some theorems on recurrent and Ricci recurrent spaces*, in „Rendiconti del Seminario Matematico della Univ di Padova” 1956, **XXVI**, 168–176.
6. Cartan, E., *Les espaces riemanniens symétriques*, in „Verh. Int. Math. Kongr. Zürich”, **I**, 1932, 152–161.
7. Soos, Gy., *Über die geodäsische Abbildungen von Riemannschen Räumen auf projectiv-symmetrische Riemannsche Räume*, „Acta Mat. Acad. Sc. Hungariae”, **9** (1958), 359–361.
8. Sandovici, P., Enghiş, P., Ţarină, M., *Spaţii V_n de curbură proiectivă recurentă*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, ser. Math. Phys.”, fasc. 1, 1969, 17–22.
9. Gupta Bandana, *On projective-symmetric spaces*, „The Journal of the Australian Mathematical Society”, **IV** (1964), 1, 113–121.
10. Eisenhart, L. P., *Non-riemannian Geometry*, in „New-York American Math. Soc. Coll. Publ.”, **VIII** (1927).

ASUPRA SPAŢIILOR V_n RECURENTE ŞI RICCI RECURENTE

(R e z u m ă t)

În prima parte a lucrării, autorul arată că spaţiile recurente verifică relaţiile (3) şi (5). Se indică şi un criteriu necesar pur algebric după care se poate verifica dacă un spaţiu V_n este recurent. În enunţul acestei condiţii (teorema 2) se introduce tensorul A_{jkl}^i dat de formulele (4), care are proprietăţi analoge tensorului de curbură.

În partea a doua se arată că spaţiile recurente sînt şi de curbură proiectivă recurentă şi se dă un criteriu necesar şi suficient pentru ca un spaţiu de curbură proiectivă recurentă să fie recurent.

În ultima parte se studiază spaţiile Ψ_n^* Ricci recurente, pentru care se arată că verifică relaţiile (8), (11), (12).

О V_n РЕКУРРЕНТНЫХ И РИЧЧИ РЕКУРРЕНТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Р е з ю м е)

В первой части работы автор показывает, что рекуррентные пространства удовлетворяют соотношениям (3) и (5). Указывается также необходимый, чисто алгебраический критерий, по которому можно проверить если V_n пространство является рекуррентным. В формулировке этого условия (теорема 2) вводится тензор A_{jkl}^i данный формулами (4), который имеет свойства, аналогичные тензору кривизны.

Во второй части работы показывается, что рекуррентные пространства имеют также рекуррентную проективную кривизну, и даётся необходимое и достаточное условие для того, чтобы пространство рекуррентной проективной кривизны было рекуррентным.

В последней части работы изучаются Ψ_n^* Риччи рекуррентные пространства, для которых показывается, что они удовлетворяют соотношениям (8), (11), (12).

CARACTERIZAREA STRUCTURILOR DE INCIDENȚĂ DE TRANSLAȚIE CU AJUTORUL UNEI CVASICONGRUENȚE

VICTORIA GROZE

Structurile de incidență de translație studiate în lucrarea [1] le vom caracteriza cu ajutorul cvasicongruențelor, care sînt generalizări ale congruențelor introduse de către J. André [2] în studiul planelor de translație.

Fie G un grup abelian, 0 elementul său neutru și $-a$ opusul elementului a .

DEFINIȚIA 1. O mulțime de subgrupuri ale grupului abelian G cu proprietatea că orice element din G , diferit de elementul neutru, aparține exact unui subgrup, se numește *partiție a grupului G* . Grupul G se va numi *grup suport al partiției*, iar subgrupurile partiției se numesc *componentele* sale.

DEFINIȚIA 2. O partiție se numește *cvasicongruență* și se va nota cu \mathcal{C} , dacă există o componentă a ei U , cu proprietatea că

$$G = U + V$$

oricare ar fi componenta V a partiției diferite de U .

Dacă relația $G = U + V$ are loc pentru oricare componente distincte U și V , partiția este o congruență în sensul lui J. André.

Să presupunem acum că grupul G este grupul T al translațiilor unei structuri de incidență \mathcal{S} de translație în raport cu axa l .

Fie $\tau \in T$ o translație de direcție

$$m = d(\tau) = l \cap \overline{O_3\tau(O_3)},$$

unde prin $\overline{O_3\tau(O_3)}$ am notat dreapta incidentă cu O_3 și $\tau(O_3)$.

Considerăm mulțimea translațiilor

$$U_m = \{\tau \mid \tau \in T, d(\tau) = m\},$$

a căror direcție este $d(U_m) = m$. Mulțimea U_m astfel definită este un subgrup al grupului translațiilor T .

Mulțimea subgrupurilor U_m constituie o partiție a grupului translațiilor T , pe care o notăm cu

$$\mathcal{C} = \{U_m | m \in I\}.$$

Într-adevăr, avem

- a) $U_m \cap U_{m'} = \{O\}$, dacă $U_m \neq U_{m'}$,
 b) $\bigcup U_m = T$.

Vom demonstra acum

TEOREMA 1. *Partiția \mathcal{C} a grupului translațiilor T a unei structuri de incidență în raport cu axa l este o cvasicongruență cu grupul suport T .*

Demonstrație. În baza definiției 2 trebuie să arătăm existența unei componente U a partiției, astfel ca $U + V = T$, oricare ar fi componenta V diferită de U .

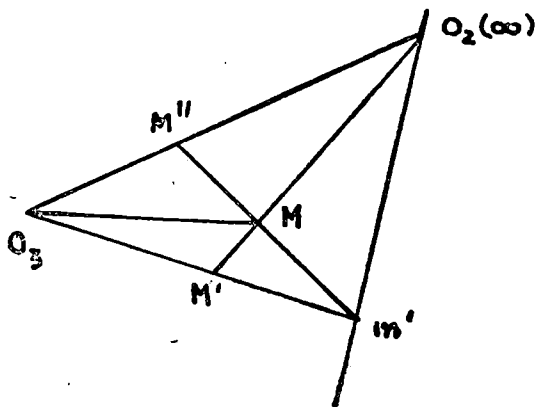


Fig. 1.

Pentru aceasta considerăm mulțimea U_2 formată din translațiile de direcție $m = \infty$ și fie τ o translație oarecare din T , iar $\tau(O_3) = M$ (fig. 1). În baza condiției 3° a definiției 3 din [1] este asigurată existența punctului M'' , care este punctul de intersecție al dreptei O_3O_2 cu dreapta $m'M$, m' fiind direcția componente V . Există de asemenea și punctul M' , ca fiind punctul de intersecție a două drepte din trișutul de înmulțire.

Notînd cu τ_2 respectiv τ' translațiile de direcție $m = \infty$ respectiv de direcție m' , putem scrie

$$\tau_2\tau'(O_3) = \tau_2(M') = M = \tau(O_3);$$

de aici rezultă că $\tau_2\tau' = \tau$, adică avem

$$U_2 + V = T$$

și astfel teorema este demonstrată.

Am văzut deci, că, plecînd de la o structură de incidență de translație în raport cu o dreaptă, am determinat o cvasicongruență \mathcal{C} cu grupul suport T .

Vom arăta acum, că și invers, plecînd de la o cvasicongruență cu un grup suport, se poate construi o structură de incidență de translație în raport cu o axă.

TEOREMA 2. *Unei cvasicongruențe \mathcal{C} cu grupul suport corespunzător G i se poate asocia o structură de incidență $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ de translație în raport cu o axă, avînd ca grup al translațiilor grupul suport G .*

Demonstrație. Construim structura de incidență de translație $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ în felul următor:

1° Punctele lui $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ sînt elementele lui G .

2° Dreptele lui $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ sînt clasele laterale $V + a$, $a \in G$, a subgroupurilor $V \in \mathcal{C}$.

Vom completa această structură afină prin: Mulțimea dreptelor $U + a$ pentru U fix, ca puncte improprii și mulțimea acestor puncte improprii, care va fi dreapta improprie l .

Arătăm că $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ astfel construită este o structură de incidență de translație față de dreapta l . Pentru aceasta vom dovedi mai întîi că prin două puncte trece exact o dreaptă.

Fie a, b două elemente distincte din G și $U_{b-a} \in \mathcal{C}$, care conține pe $b - a$. Dreapta $U_{b-a} + a$ conține evident pe a și b deoarece $b - a + a = b$. Pe de altă parte, orice dreaptă care conține punctul a , este de forma $V + a$, cu $V \in \mathcal{C}$ și $a \in G$. Dacă $V + a$ trece și prin punctul b , avem $b \in V + a$, adică $b - a \in V$, deci $b - a \in V \cap U_{b-a}$, dar cum $V \cap U_{b-a} = \{0\}$, ar rezulta $b = a$, ceea ce contrazice ipoteza, deci $U_{b-a} = V$. Astfel am arătat unicitatea dreptei prin două puncte.

Demonstrăm acum că orice dreaptă $V + a$ intersectează o dreaptă de forma $U_2 + x$, cu $U_2 \in \mathcal{C}$ și $x \in G$, exact într-un punct.

Considerăm $G = U_2 + V$; atunci pentru orice element $y \in G$ ce poate fi scris $y = x - a$, vom avea

$$y = x - a = -u_2 + v$$

sau

$$u_2 + x = v + a,$$

unde

$$u_2 \in U_2, v \in V.$$

Rezultă că

$$U_2 + x \quad \text{și} \quad V + a$$

au un punct comun.

Avem, în mod evident, că prin orice punct $x_0 \in G$ trece exact o dreaptă de forma $U_i + x_0$ ($i = 0, 1, \infty, m$).

Am verificat astfel că $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ este o structură de incidență.

Vom defini acum translațiile în $\mathfrak{S}(\mathcal{C})$ prin

$$\tau: \begin{cases} x \rightarrow x + h \\ U + a \rightarrow U + a + h \end{cases} \quad x, h \in G.$$

Ultima relație arată că o dreaptă se transformă într-o dreaptă de aceeași direcție.

Avem de asemenea că $x, x + h, d(U)$ sînt coliniare :

Într-adevăr, există $U_h \in \mathcal{C}$ cu $h \in U_h$; atunci dreapta $U_h + x$ care conține punctul x conține și punctul $x + h$.

De asemenea avem că punctul a prin translația $-a + b$ trece în punctul b , deci grupul translațiilor este tranzitiv și prin urmare $\mathcal{S}(\mathcal{C})$ este o structură de incidență de translație în raport cu axa l .

În sfîrșit, vom demonstra că grupul suport G al cvasicongruenței \mathcal{C} este izomorf cu grupul translațiilor T al lui $\mathcal{S}(\mathcal{C})$.

În baza celor arătate, avem între G și T stabilită o corespondență biunivocă: pentru un $h \in G$ corespunde un $\tau_h \in T$ caracterizat de ecuația $x' = x + h$. Se vede imediat că această corespondență este un izomorfism.

(Intrat în redacție la 12 noiembrie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Groze, V., *Asupra structurilor de incidență de translație*, (sub tipar).
2. André, J., *Über nicht Desarguessche Ebenen mit transitiver Translationsgruppe*, „Math. Zeitsch“, Bd. 60 s. (1954), 156–186.

ХАРАКТЕРИСТИКА ТРАНСЛЯЦИОННЫХ СТРУКТУР ПАДЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОДНОЙ КВАЗИКОНГРУЕНТНОСТИ

(Резюме)

В работе дается характеристика трансляционных структур падения по отношению к одной оси, с помощью квазиконгруентности, являющейся обобщением понятия конгруентности в группах, введенного Ж. Андре.

Доказывается, что исходя из одной трансляционной структуры падения по отношению к одной прямой, можно определить квазиконгруентность \mathcal{C} с группой-носителем T и обратно, исходя из квазиконгруентности с группой-носителем, можно построить трансляционную структуру падения по отношению к одной оси, имеющей в качестве группы трансляций рассматриваемую группу-носитель.

A CHARACTERIZATION OF THE STRUCTURES OF TRANSLATION INCIDENCE WITH THE HELP OF A QUASICONGRUENCE

(Summary)

A characterization of the structures of translation incidence in comparison with an axis is given in the paper with the help of a quasicongruence which is a generalization of the notion of congruence in groups formulated by J. André.

It is demonstrated that starting from a structure of translation incidence in comparison with a straight line, a quasicongruence \mathcal{C} with the support group T can be determined.

Reciprocally, a structure of translation incidence in comparison with an axis, having the consider red support group as a translation group, can be constructed starting from a quasicongruence with a support group.

ON ALMOST COQUATERNION STRUCTURES

CONSTANTIN N. UDRIȘTE

In § 1 we give certain definitions and certain results on almost coquaternion structures. After several preliminaries we notice in § 2 that the product manifold $M \times P$, where M is an almost coquaternion manifold and P is an almost quaternion contact manifold [4], has an induced almost quaternion structure. The study of the almost quaternion structure of the manifold $M \times R$, where R is the real line, permits us to introduce some tensor fields attached to the almost coquaternion structure on M (§ 3). Our results are similar to those presented in [6, Chapter 2] by S. Sasaki.

Unless otherwise stated, manifolds, mappings and geometric objects considered in this paper are all assumed to be of differentiability class C^∞ .

§ 1. Almost coquaternion structures. An almost coquaternion structure on a $(4n + 3)$ -dimensional manifold M is given by three almost cocomplex structures or almost contact structures (Φ, ξ, η) , $a = 1, 2, 3$, satisfying the following conditions

$$\begin{aligned}
 \Phi \circ \Phi - \xi \otimes \eta &= -\Phi \circ \Phi + \xi \otimes \eta = \Phi, \\
 \Phi \xi &= -\Phi \xi = \xi, \\
 \eta \circ \Phi &= -\eta \circ \Phi = \eta, \\
 \eta(\xi) &= \eta(\xi) = 0,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

for any cyclic permutation $\{a, b, c\}$ of $\{1, 2, 3\}$.

M is said to be an *almost coquaternion manifold* [7].

THEOREM 1.1. *If M is an almost coquaternion manifold, then the structural group of its tangent bundle TM reduces to $GL(n, H) \times 1 \times 1 \times 1$. The converse is also true.*

Consequently, every almost coquaternion manifold is orientable.

THEOREM 1.2. *Every almost coquaternion manifold admits a positive definite Riemannian metric g such that*

$$\eta(X) = g(\xi, X), \quad (2)$$

$$g(\Phi X, \Phi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \quad a = 1, 2, 3, \quad \forall X, Y \in \mathcal{O}(M).$$

Proof. \bar{M} possesses three vector fields ξ and three 1-forms η such that $\eta(\xi) = \delta_{ab}$, $a, b = 1, 2, 3$. Let f be an arbitrary positive definite Riemannian metric on M . We modify the metric f so that the new Riemannian metric h has the properties:

- (i) ξ are orthonormal vector fields with respect to the metric h ;
- (ii) ξ are orthogonal to $Q_x M$ with respect to h , where

$$Q_x M = \{X \mid X \in T_x M, \eta_1(X) = 0, \eta_2(X) = 0, \eta_3(X) = 0\};$$

- (iii) h coincides with f on $Q_x M$.

The metric h is given by

$$h(X, Y) = f(X - \sum_a \eta_a(X)\xi_a, Y - \sum_a \eta_a(Y)\xi_a) + \sum_a \eta_a(X)\eta_a(Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{O}(M)$$

We put

$$g(X, Y) = \frac{1}{4} \{h(X, Y) + \sum_a [h(\Phi X, \Phi Y) + \eta_a(X)\eta_a(Y)]\}, \quad \forall X, Y \in \mathcal{O}(M).$$

Then g is the desired metrics. Another proof of this fact can be found in [7].

We shall say that the metric which has the properties (2) is an *associated Riemannian metric* to the given almost coquaternion structure. If a differentiable manifold M admits tensor fields (Φ, ξ, η, g) so that g is an associated Riemannian metric of the almost coquaternion structure, then we say that M has an *almost coquaternion metric structure* and M is said to be an *almost coquaternion Riemannian manifold*.

THEOREM 1.3. *If M is an almost coquaternion Riemannian manifold then the structural group of its tangent bundle TM reduces to $Sp(n) \times 1 \times 1 \times 1$. The converse is also true [7].*

Suppose (Φ, ξ, η) , $a = 1, 2, 3$ be an almost coquaternion structure on M and put

$$\varphi_1 = \Phi_1 + \xi_2 \otimes \eta_3 - \xi_3 \otimes \eta_2,$$

$$\varphi_2 = \Phi_2 + \xi_3 \otimes \eta_1 - \xi_1 \otimes \eta_3,$$

$$\varphi_3 = \Phi_3 + \xi_1 \otimes \eta_2 - \xi_2 \otimes \eta_1.$$

We can verify without difficulty that

$$\begin{aligned} \varphi_a^2 &= -\text{id} + \sum_b \xi_b \otimes \eta_b, \quad \eta(\xi) = \delta, \quad a, b = 1, 2, 3, \\ \varphi_1 \circ \varphi_2 &= -\varphi_2 \circ \varphi_1 = \varphi_3, \quad \varphi_2 \circ \varphi_3 = -\varphi_3 \circ \varphi_2 = \varphi_1, \quad \varphi_3 \circ \varphi_1 = -\varphi_1 \circ \varphi_3 = \varphi_2, \quad (3) \\ \varphi_a \xi_b &= 0, \quad \eta_a \circ \varphi_b = 0, \quad \text{rank } \varphi_a = 4n. \end{aligned}$$

and we say that M in consideration has a $(\varphi_a, \xi_a, \eta_a)$ -structure or an almost three-hor-complex structure [1]. The maps

$$\varphi_a + \sum_b \xi_b \otimes \eta_b : T_x M \rightarrow T_x M, \quad a = 1, 2, 3,$$

are non-singular transformations and their inverses are respectively

$$-\varphi_a + \sum_b \xi_b \otimes \eta_b.$$

A manifold M admits an almost coquaternion structure if and only if it admits a $(\varphi_a, \xi_a, \eta_a)$ -structure.

We define a new metric \bar{g} on M by

$$\bar{g} = \frac{1}{2} (g + \sum_a \eta_a \otimes \eta_a).$$

The set $(\varphi_a, \xi_a, \eta_a, \bar{g})$, $a = 1, 2, 3$, satisfies the relations (3) and

$$\eta_a(X) = \bar{g}(\xi_a, X),$$

$$\bar{g}(\varphi_a X, \varphi_a Y) = \bar{g}(X, Y) - \sum_b \eta_b(X) \eta_b(Y), \quad a = 1, 2, 3, \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

and we say that M in consideration has a $(\varphi_a, \xi_a, \eta_a, \bar{g})$ -structure.

A differentiable manifold M admits an almost coquaternion metric structure if and only if it admits a $(\varphi_a, \xi_a, \eta_a, \bar{g})$ -structure.

An almost coquaternion structure has close analogy with an almost quaternion structure (see § 2) while an associated Riemannian metric has close analogy with a Hermitian metric.

§ 2. Almost quaternion structures. An *almost quaternion structure* on a $(4n + 4)$ -dimensional manifold M is given by three almost complex structures J_a , $a = 1, 2, 3$, which satisfy

$$J_a \circ J_b = -J_b \circ J_a = J_c, \quad (4)$$

where $\{a, b, c\}$ is an even permutation of $\{1, 2, 3\}$. Every almost quaternion manifold is orientable and admits a positive definite Riemannian metric G such that

$$G(JX, JY) = G(X, Y), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(\overline{M}).$$

The aggregate (J, G) , $a = 1, 2, 3$, is called an *almost quaternion Hermitian structure* on M .

The torsion or the Nijenhuis tensor of J ($a = \text{fixed}$) is defined as being the tensor field N of type $(1, 2)$ given by

$$N(X, Y) = [JX, JY] - J[JX, Y] - J[X, JY] + J^2[X, Y],$$

$$\forall X, Y \in \mathcal{X}(\overline{M}).$$

From N we can build up a new tensor field of type $(1, 2)$

$$T(X, Y) = \frac{2}{3} \sum_a N(X, Y)$$

which is named the *structure tensor* [2].

LEMMA 2.1. *The relations*

$$\begin{aligned} 2N_1(X, Y) &= N_2(X, Y) + J_1(N_1(X, JY)) + J_1(N_1(JX, Y)) - N_2(JX, JY) + \\ &+ N_3(X, Y) + J_1(N_1(X, JY)) + J_1(N_1(JX, Y)) - N_3(JX, JY), \\ 4N_1(X, Y) &= T_1(X, Y) + J_1(T_1(X, JY)) + J_1(T_1(JX, Y)) - \\ &- T_1(JX, JY), \quad \forall X, Y \in \mathcal{X}(\overline{M}), \end{aligned}$$

and those got by cyclic permutations over $\{1, 2, 3\}$ hold good.

Proof. This follows from the fact that J satisfy (4).

By virtue of lemma 2.1. the following theorem is evident.

THEOREM 2.2. N_1, N_2 and N_3 vanish identically if any two of them vanish identically [5]. T vanishes identically if and only if N simultaneously vanish identically.

Among all possible almost quaternion connections on M , the most important is the Obata connection whose existence is given by the following theorem [2].

THEOREM 2.3. *An almost quaternion manifold admits a torsion-free almost quaternion affine connection if and only if the structure tensor T vanishes identically.*

DEFINITION 2.4. If there exists a coordinate system in which the fields J have simultaneously numerical components, the almost quaternion structure is said to be integrable.

An integrable almost quaternion structure on M is induced by a quaternion structure on M and we have

THEOREM 2.5. *An almost quaternion structure of class C^ω in a real analytic manifold is integrable if and only if the manifold is locally affine [3], [5], [2].*

If M admits an analytic quaternion structure, then it has a torsion-free almost quaternion affine connection and consequently the structure tensor T vanishes identically. The curvature of this linear connection vanishes identically, because the manifold is locally affine.

Conversely, from $T = 0$ follows that M possesses a torsion-free almost quaternion affine connection without the almost quaternion structure to be integrable. If this symmetric connection has zero curvature, then the manifold is locally affine and consequently the almost quaternion structure is integrable.

DEFINITION 2.6. An almost quaternion structure is said to be pseudo-quaternion if it has no structure tensor, i.e., $T = 0$.

A straightforward computation shows that we have

LEMMA 2.7. *The structure tensor satisfies the identities*

$$T(X, Y) = \sum_a J(T(X, JY)),$$

$$T(X, Y) = - \sum_a T(JX, JY),$$

for any vector fields X and Y .

In [7], [8] we proved that

THEOREM 2.8. *An orientable hypersurface M of an almost quaternion (Hermitian) manifold M has a naturally induced almost coquaternion (metric) structure.*

Let P be a $(4p + 1)$ -dimensional manifold. If there exist tensor fields ψ , $a = 1, 2, 3$, of type $(1,1)$, a vector field ξ and a 1-form η over P , such that

$$\begin{aligned} \psi_a^2 &= -id + \xi \oplus \eta, \quad \eta(\xi) = 1, \\ \psi_a \xi &= 0, \quad \eta \circ \psi_a = 0, \quad \text{rank } \psi_a = 4p, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\psi_1 \circ \psi_2 = -\psi_2 \circ \psi_1 = \psi_3, \quad \psi_2 \circ \psi_3 = -\psi_3 \circ \psi_2 = \psi_1, \quad \psi_3 \circ \psi_1 = -\psi_1 \circ \psi_3 = \psi_2,$$

then we say that P has an *almost quaternion contact structure* [4] and that P is an *almost quaternion contact manifold*.

THEOREM 2.9. *The product manifold $M \times P$, where M is an almost coquaternion manifold and P is an almost quaternion contact manifold, has an almost quaternion structure defined by*

$$J \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi X + \eta(Y)\xi \\ \psi Y - \eta(X)\xi \end{pmatrix}, \quad \forall X \in T_x M, \quad \forall Y \in T_y P, \quad a = 1, 2, 3.$$

Proof. By virtue of (1), (5) we can easily verify the relations (4).

§ 3. The almost quaternion structure of the manifold $M \times R$. Let \mathcal{R} be a real line. If we denote the Cartesian coordinate of R by t , then $\left(0, \frac{d}{dt}, dt\right)$ can be considered as an almost cocomplex structure on R .

Let M be a differentiable manifold with an almost coquaternion structure $\left(\Phi, \xi, \eta\right)$. Then we have

THEOREM 3.1. *The product manifold $M \times R$ has an almost quaternion structure*

$$J = \begin{pmatrix} \Phi & \xi \\ -\eta & 0 \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3, \quad (6)$$

induced by $\left(\Phi, \xi, \eta\right)$ and $\left(0, \frac{d}{dt}, dt\right)$.

As in [6], we get immediately the following

THEOREM 3.2. *If M is an almost coquaternion manifold, then the twelve sets of components N_{jk}^i, N_{jk}, N_j^i and N_j of the Nijenhuis tensors N of the almost complex structures (6) on $M \times R$ give twelve tensors on the manifold M which are uniquely determined by the almost coquaternion structure.*

The expressions of these tensor fields are

$$N(X, Y) = N(X, Y; \Phi) + 2d\eta(X, Y)\xi \quad \text{of type (1,2),}$$

$$N(X, Y) = -2d\eta(\Phi X, Y) - 2d\eta(X, \Phi Y) \quad \text{of type (0,2),}$$

$$N(X) = -(L_\xi \Phi)(X) \quad \text{of type (1,1),}$$

$$N(X) = 2d\eta(X, \xi) = -(L_\xi \eta)(X) \quad \text{of type (0,1), } \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

where

$$N(X, Y; \Phi) = [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y] + \Phi^2[X, Y]$$

is the Nijenhuis tensor of the endomorphism Φ .

S. Sasaki [6] has proved that

THEOREM 3.3. *If $\overset{1}{N}_a$ vanishes, then all the other tensors $\overset{2}{N}_a$, $\overset{3}{N}_a$ and $\overset{4}{N}_a$ vanish ($a = \text{fixed}$).*

It is well known that an almost complex structure reduces to a complex structure if and only if its Nijenhuis tensor vanishes identically over the whole manifold. Hence, the almost complex structure J ($a = \text{fixed}$) over $M \times R$ defined by (6) reduces to a complex structure if and only if $\overset{1}{N}_a$ vanishes identically over the whole manifold M .

S. Sasaki called the almost contact structure whose tensor $\overset{1}{N}_a$ ($a = \text{fixed}$) vanishes identically a *normal almost contact structure* and the manifold with such structure as a *normal almost contact manifold*.

An example of normal almost contact manifold is the $(2n + 1)$ -dimensional sphere.

Using the structure tensor T of the almost quaternion structure on $M \times R$ and the Theorem 3.2, we deduce that the almost coquaternion structure determines on M the following tensor fields:

$$\overset{1}{T}(X, Y) = \frac{2}{3} \sum_a \overset{1}{N}_a(X, Y) \quad \text{of type (1,2),}$$

$$\overset{2}{T}(X, Y) = \frac{2}{3} \sum_a \overset{2}{N}_a(X, Y) \quad \text{of type (0,2),}$$

$$T(X) = \frac{2}{3} \sum_a \overset{3}{N}_a(X) \quad \text{of type (1,1),}$$

$$\overset{4}{T}(X) = \frac{2}{3} \sum_a \overset{4}{N}_a(X) \quad \text{of type (0,1), } \forall X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

THEOREM 3.4. For any almost coquaternion structure, the relations

$$\overset{1}{T}(X, Y) = \sum_a \{ \Phi(\overset{1}{T}(X, \Phi Y)) + \overset{2}{T}(X, \Phi Y) \xi - \eta(Y) \Phi(\overset{3}{T}(X)) + \overset{4}{T}(X) \eta(Y) \xi \},$$

$$\overset{3}{T}(X) = \sum_a \{ \Phi(\overset{1}{T}(X, \xi)) + \overset{2}{T}(X, \xi) \xi \},$$

$$\overset{3}{T}(X) = \sum_a \{ \Phi(\overset{3}{T}(\Phi X)) - \overset{4}{T}(\Phi X) \xi \},$$

$$0 = \sum_a \{ \overset{4}{T}(\xi) \xi - \Phi(\overset{3}{T}(\xi)) \},$$

$$\overset{2}{T}(X, Y) = \sum_a \{ \eta(\overset{3}{T}(X)) \eta(Y) - \eta(\overset{1}{T}(X, \Phi Y)) \},$$

$$\overset{4}{T}(X) = \sum_a \eta(\overset{1}{T}(X, \xi)),$$

$$\overset{4}{T}(X) = \sum_a \eta(\overset{3}{T}(\Phi X)), \quad (7)$$

$$0 = \sum_a \eta(\overset{3}{T}(\xi)),$$

$$\overset{1}{T}(X, Y) = \sum_a \{ -\overset{1}{T}(\Phi X, \Phi Y) + \eta(Y) \overset{3}{T}(\Phi X) - \eta(X) \overset{3}{T}(\Phi Y) \},$$

$$\overset{3}{T}(X) = \sum_a \{ \overset{1}{T}(\xi, \Phi X) - \eta(X) \overset{3}{T}(\xi) \},$$

$$0 = \sum_a \overset{1}{T}(\xi, \xi),$$

$$\overset{2}{T}(X, Y) = \sum_a \{ -\overset{2}{T}(\Phi X, \Phi Y) - \overset{4}{T}(\Phi X) \eta(Y) + \overset{4}{T}(\Phi Y) \eta(X) \},$$

$$\overset{4}{T}(X) = \sum_a \{ \overset{2}{T}(\Phi X, \xi) - \overset{4}{T}(\xi) \eta(X) \}.$$

$$0 = \sum_a \overset{2}{T}(\xi, \xi)$$

hold good.

Proof. These relations are an immediate consequence of the lemma 2.7.

From (7) we can easily see that the following theorem is true

THEOREM 3.5. If any one of $\overset{1}{T}$, $\overset{2}{T}$, $\overset{3}{T}$ vanishes, then $\overset{4}{T}$ vanishes.

Proof. If $\overset{1}{T} = 0$, then $\overset{4}{T} = 0$ follows from (7.6). If $\overset{3}{T} = 0$, then $\overset{4}{T} = 0$ follows from (7.7). If $\overset{2}{T} = 0$, then

$$\overset{4}{T}(X) = - \sum_a \overset{4}{T}(\xi_a) \eta_a(X)$$

follows from (7.13). By virtue of

$$\eta_a(\xi_b) = \delta_{ab}, \quad a, b = 1, 2, 3,$$

we have $\overset{4}{T} = 0$.

THEOREM 3.6. *If $\overset{1}{T}$ vanishes, then all the other tensors $\overset{2}{T}$, $\overset{3}{T}$, $\overset{4}{T}$ vanish.*

Proof. If $\overset{1}{T} = 0$, then

$$\overset{3}{T}(X) = - \sum_a \eta_a(X) \overset{3}{T}(\xi_a)$$

follows from (7.10). From this equation we get $\overset{3}{T} = 0$. $\overset{2}{T} = 0$ follows from (7.5). $\overset{4}{T} = 0$ follows from theorem 3.6.

The Theorem 3.5. was stated by virtue of the Lemma 2.7. Other relations of the type (7) can be got from the Lemma 2.1. and consequently we have

THEOREM 3.7. $\overset{1}{N}_1, \overset{1}{N}_2, \overset{1}{N}_3$ vanish identically if any two of them vanish identically. $\overset{1}{T}$ vanishes identically if and only if $\overset{1}{N}_1, \overset{1}{N}_2, \overset{1}{N}_3$ simultaneously vanish identically.

From the former discussions, it seems to us that the almost coquaternion structure whose tensor $\overset{1}{T}$ vanishes identically is an important object which corresponds to the pseudo-quaternion structure in almost quaternion structure. So, we call the almost coquaternion structure whose tensor $\overset{1}{T}$ vanishes identically as a *pseudo-coquaternion structure*.

More, if the almost quaternion structure (6) on $M \times R$ is integrable, then we say that the almost coquaternion structure on M is *normal* and that M is a *normal almost coquaternion manifold*.

An example of normal almost coquaternion manifold is the $(4n + 3)$ -dimensional sphere.

We notice that a normal almost coquaternion structure is a pseudo-coquaternion structure. The converse is not true.

We can easily see that the following theorem is true.

THEOREM 3.8. *Let M be an almost coquaternion Riemannian manifold. Then the product manifold $M \times R$ has an almost quaternion Hermitian structure*

$$J = \begin{pmatrix} \Phi & \xi \\ a & a \\ -\eta & 0 \end{pmatrix}, \quad a = 1, 2, 3, \quad G = \begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

induced by (Φ, ξ, η, g) and $(0, \frac{d}{dt}, dt, 1)$.

(Received November 2, 1970)

REFERENCES

1. de Barros, Constantino M., *G-structures définies par des suites de certains types de champs d'endomorphismes et par des suites de 2-formes différentielles extérieures*, Communication présentée au Congrès International des Mathématiciens, Nice (France), 1–10 Septembre 1970.
2. Bonan, E., *G-structures de type quaternion*, Thèse, Paris, 1967.
3. Ehresmann, C., *Sur la théorie des espaces fibrés*, in „Coll. Int. C.N.R.S. Top. Alg.”, Paris, 1947, 3–35.
4. Hashimoto, S., *On differentiable manifolds with almost quaternion contact structure*, „Tensor (N.S.)”, 15 (1964), 258–268.
5. Obata, M., *Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or Hermitian structure*, „Japanese J. of Math.”, 26 (1956), 43–77.
6. Sasaki, S., *Almost contact manifolds*, „Math. Inst. Tohoku Univ.”, Part I, 1965.
7. Udriște, C., *Structures presque coquaternioniennes*, „Bull. Math. Soc. Sci. Math. de la R.S.R.”, 13 (1969), 4, 487–507.
8. Udriște C., *Almost coquaternion hypersurfaces*, „Rev. Roum. Math. Pures et Appl.”, 15 (1970), 9, 1545–1553.

ASUPRA STRUCTURILOR APROAPE COCUATERNIONICE

(Rezumat)

În (§ 1) se dau unele proprietăți ale structurilor aproape cocuaternionice. Apoi în (§ 2, § 3) se construiesc structuri aproape cuaternionice pe unele varietăți produs în care unul dintre factori este o varietate aproape cocuaternionică. De asemenea, în § 3 se cercetează proprietăților unor cimpuri tensoriale ce pot fi atașate unei structuri aproape cocuaternionice după modelul lui S. Sasaki [6, cap. 2].

О ПОЧТИ КВАЗТЕРНИОНОВЫХ СТРУКТУРАХ

(Резюме)

В (§ 1) даны некоторые свойства почти кваaternionовых структур. Затем в (§ 2, § 3) конструируются почти quaternionовые структуры на некоторых многообразиях-произведениях, в которых один из факторов является почти кваaternionовым многообразием. Также в § 3 изучаются свойства некоторых тензорных полей, которые могут быть присоединены к почти кваaternionовой структуре по образцу С. Сасаки [6, гл. 2].

FUNCȚII SPLINE DE GRAD SUPERIOR DE APROXIMARE A SOLUȚIILOR SISTEMELOR DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

GH. MICULA

Sînt cunoscute metodele de aproximare prin funcții spline ale soluțiilor ecuațiilor diferențiale cu anumite condiții (inițiale sau polilocale), date de R. F. Loscalzo, T. D. Talbot, I. J. Schoenberg, [1], [2], [3], M. Sakai [4] etc. În [5], [6] noi am extins aceste metode pentru ecuații diferențiale de ordin superior și pentru sisteme de ecuații diferențiale. Funcțiile spline care aproximează soluțiile, construite în aceste lucrări, prezintă însă neajunsul că dacă gradul lor este mare, nu converg către soluția exactă.

În [1] s-a dat o nouă metodă de aproximare prin spline a soluției problemei $y' = f(x, y)$, $y(0) = y_0$.

Urmînd aceeași idee, în prezenta lucrare se va extinde această metodă, pentru sisteme neliniare de ecuații diferențiale. Soluția aproximativă construită va consta din funcții spline de grad par $2m$ și de clasă C^m . Deși soluția are o netezime mai coborîtă, ea are avantajul că converge către soluția exactă, după cum se va vedea, oricare ar fi m .

1. Formula de cuadratură a lui Hermite. Fie funcția $g \in C^{2m} [0, h]$. Formula de cuadratură a lui Hermite (a se vedea [1]) este

$$\int_0^h g(x) dx = C_{1,m} h [g(0) + g(h)] + C_{2,m} h^2 [g'(0) - g'(h)] + \dots +$$

$$+ C_{m,m} h [g^{(m-1)}(0) + (-1)^{m-1} g^{(m-1)}(h)] + \quad (1)$$

$$+ \int_0^h \varphi(x) g^{(2m)}(x) dx$$

unde coeficienții $C_{i,m}$ sînt

$$C_{i,m} = \frac{1}{m!} \frac{m(m-1) \dots (m-i+1)}{2m(2m-1) \dots (2m-i+1)} \quad i = \overline{1, m} \quad (2)$$

iar

$$\varphi(x) = \frac{[x(x-h)]^m}{(2m)!}.$$

Dacă înlocuim funcția $g(x)$ cu $y'(x)$, unde $y \in C^{2m+1} [0, h]$, rezultă din (1)

$$y'(h) - y'(0) = C_{1,m} h [y'(0) + y'(h)] + C_{2,m} h^2 [y''(0) - y''(h)] + \dots +$$

$$+ C_{m,m} h^m [y^{(m)}(0) + (-1)^{m-1} y^{(m)}(h)] + \int_0^h \varphi(x) y^{(2m+1)}(x) dx. \quad (3)$$

Facem notația

$$H_m[y; 0, h] = y(h) - y(0) - C_{1,m} h [y'(0) + y'(h)] - \dots - C_{m,m} h^m [y^{(m)}(0) + (-1)^{m-1} y^{(m)}(h)] \quad (4)$$

Restul formulei (3) se poate scrie sub forma

$$\int_0^h \varphi(x) y^{(2m+1)}(x) dx = (-1)^m \frac{(m!)^2}{(2m)!} h^{(2m+1)} \left[\overbrace{[0, 0, \dots, 0]}^{m+1}, \overbrace{[h, h, \dots, h]}^{m+1}; y \right] \quad (5)$$

unde $[0, 0, \dots, 0, h, h, \dots, h; y]$, înseamnă diferența divizată a funcției $y \in C^{m+1} [0, h]$, pe nodurile 0 și h multiple de $m+1$ ori.

Notăm cu Π_k spațiul liniar al polinoamelor de grad cel mult k . Dacă $y \in \Pi_{2m}$, rezultă că

$$H_m[y; 0, h] = 0 \quad y \in \Pi_{2m}. \quad (6)$$

LEMĂ. Următoarele $2m+2$ cantități

$$y^{(k)}(0), y^{(k)}(h) \quad k = \overline{0, m}$$

pot fi interpolate cu un polinom de interpolare Hermite pe nodurile 0 și h multiple de $m+1$ ori, dacă și numai dacă

$$H_m[y; 0, h] = 0.$$

Demonstrație. Există în mod unic un polinom de grad $2m+1$ care interpolatează aceste date. Coeficientul lui x^{2m+1} este tocmai $H_m[y; 0, h]$. Pentru ca polinomul să fie de grad $2m$ este necesar și suficient ca $H_m[y; 0, h] = 0$.

2. Aproximarea locală a soluției prin polinoame. Considerăm sistemul neliniar de ecuații diferențiale

$$y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \quad i = \overline{1, n} \quad (7)$$

cu condițiile lui Cauchy

$$y_i(0) = y_{i,0} \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

Funcțiile $f_i: [0, B] \times R^n \rightarrow R$ le presupunem suficient de netede. Presupunem că există în mod unic soluția (y_1, y_2, \dots, y_n) a problemei (7), (8) definită pe intervalul $[0, b]$. Vom nota cu D_H un subdomeniu mărginit al lui $[0, b] \times R^n$, care va fi precizat în cele ce urmează. Vom construi o soluție aproximativă (s_1, s_2, \dots, s_n) , pentru soluția problemei (7)–(8), formată din funcții spline $s_i \in \mathcal{S}_{2m}(i = \overline{1, n})$, unde prin \mathcal{S}_{2m} notăm spațiul liniar al funcțiilor spline de grad $2m$.

Vom arăta mai întâi cum se determină o aproximație polinomială, în vecinătatea originii pentru soluția (y_1, y_2, \dots, y_n) . Împărțim intervalul $[0, b]$ în q părți egale prin nodurile $x = jh$, ($qh = b$). Menționăm că metoda poate fi folosită și pentru noduri oarecare.

DEFINIȚIE. Vom spune că funcțiile $P_i: [0, b] \rightarrow R$ ($i = \overline{1, n}$) satisfac sistemul de ecuații diferențiale (7) în punctele x_j ($j = \overline{1, m}$) dacă au loc egalitățile

$$P'_i(x_j) = f_i(x_j, P_1(x_j), \dots, P_n(x_j)) \quad (i = \overline{1, n}), \quad (j = \overline{1, m}). \tag{9}$$

Vom spune că funcțiile $P_i: [0, b] \rightarrow R$ ($i = \overline{1, n}$), satisfac sistemul [7] în punctul x_1 multiplu de m ori, dacă au loc egalitățile

$$y'_i = f_i(x, y_1, \dots, y_n) \tag{10}$$

$$y''_i = \frac{d^1}{dx^1} f_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_i^{(m)} = \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} f_i(x, y_1, \dots, y_n)$$

pentru $x = x_1$ și $y_i(x) = P_i(x)$, $i = \overline{1, n}$.

Asemenea funcții care satisfac sistemul (7) în anumite puncte există. De exemplu soluția exactă y_i ($i = \overline{1, n}$), a problemei (7)–(8) satisface relațiile (10) pentru orice $x_1 \in [0, b]$ și pentru orice m . Cunoscînd pe $y(0) = y_{i,0}$, putem calcula din (7) succesiv derivatele $y_i^{(k)}(0)$ și obținem dezvoltarea

$$y_j(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} y_i^{(k)}(0) x^k.$$

Prin urmare sumele parțiale

$$P_i(x) = \sum_{k=0}^j \frac{1}{k!} y_i^{(k)}(0) x^k \tag{11}$$

sînt polinoame care satisfac sistemul (7) în nodul x_0 multiplu de j ori.

Dacă alegem în afară de punctul $x = 0$, încă j noduri x_1, x_2, \dots, x_j în vecinătatea lui $x = 0$ și cerem ca $P_i \in \Pi_j$ să satisfacă (7) în toate aceste puncte, putem determina polinoamele P_i ($i = \overline{1, n}$), care să aproximeze soluția y_i ($i = \overline{1, n}$) a problemei (7)–(8) în vecinătatea originii.

Pentru aproximarea soluției y_i pe tot intervalul $[0, b]$ vom împărți acest interval în q părți egale, prin nodurile $x_k = kh, k = \overline{1, q}$, deci $h = \frac{b}{q}$. Pe fiecare subinterval $[x_k, x_{k+1}]$, vom construi polinoame de grad $2m$, care să satisfacă sistemul (7), în nodurile x_k și x_{k+1} , multiple de m ori. Vom obține, după cum se va vedea o aproximantă spline.

3. Construcția aproximațiilor spline. Fie $j = 2m$ un număr par și pozitiv. Primele două noduri ale diviziunii intervalului $[0, b]$, fiind 0 și h , vom construi polinoamele P_i ($i = \overline{1, n}$), de grad $2m$, definite pe $[0, h]$, cu următoarele cerințe :

- să satisfacă condițiile lui Cauchy $P_i(0) = y_i(0) = y_{i,0}$, ($i = \overline{1, n}$);
- să satisfacă sistemul (7) în $x = 0$ multiplu de m ori, și în $x = h$ multiplu de m ori.

Cu aceste condiții vom arăta că polinoamele P_i sînt univoc determinate. Pentru simplificarea scrierii introducem următoarele formule explicite :

$$\begin{aligned}
 y'_i &= f_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = g_{i,1}(x, y_1, \dots, y_n) \\
 y''_i &= \frac{\partial f_i}{\partial x} + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial y_k} f_k = g_{i,2}(x, y_1, \dots, y_n) \quad (12) \\
 &\dots \dots \dots \\
 y_i^{(m)} &= \frac{\partial^{m-1}}{\partial x^{m-1}} f_i(x, y_1, \dots, y_n) = g_{i,m}(x, y_1, \dots, y_n).
 \end{aligned}$$

Ținînd cont de condițiile $P_j(0) = y_j(0)$ ($i = \overline{1, n}$), satisfacerea sistemului (7) în punctele $x = 0$ și $x = h$, multiple de m ori, se scrie astfel :

$$\begin{aligned}
 P_i^{(k)}(0) &= g_{i,k}(0, P_1(0), \dots, P_n(0)) = g_{i,k}(0, y_{1,0}, \dots, y_{n,0}) \quad (13) \\
 &(k = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})
 \end{aligned}$$

$$P_i^{(k)}(h) = g_{i,k}(h, P_1(h), \dots, P_n(h)); \quad (k = \overline{1, m}), (i = \overline{1, n}). \quad (14)$$

Din aceste ecuații vom determina necunoscutele $P_i^{(k)}(0)$, $P_i^{(k)}(h)$, ($i = \overline{1, n}$, $k = \overline{1, m}$). Dar în (14) apar mărimile $P_i(h)$, ($i = \overline{1, n}$), care sînt necunoscute. Deoarece $P_i \in \Pi_{2m}$, deducem din leasă că

$$H_m[P_i; 0, h] = 0, \quad (i = \overline{1, n}).$$

Vom arăta că din acest sistem pentru h suficient de mic se pot determina unic mărimile $P_i(h)$. Din (4) și (12), acest sistem se poate scrie astfel :

$$\begin{aligned}
 P_i(h) &= y_{i,0} + \frac{1}{2} h [g_{i,0}(0, y_{1,0}, \dots, y_{n,0}) + g_{i,1}(h, P_1(h), \dots, \\
 &P_n(h))] + \dots + c_{m,m} h^m [g_{i,m}(0, y_{1,0}, \dots, y_{n,0}) + (-1)^{m-1} g_{i,m}(h, \\
 &P_1(h), \dots, P_n(h))]. \quad (i = \overline{1, n}).
 \end{aligned} \quad (15)$$

Avînd astfel determinate $P_i^{(k)}(h)$, ($i = \overline{1, n}$; $k = \overline{0, m}$), prin interpolarea Hermite a acestor mărimi obținem în mod univoc polinoamele P_i , definite în $[0, h]$, pe care le vom nota în continuare cu $P_{i,1}$, ($i = \overline{1, n}$).

În intervalul următor $[h, 2h]$ vom determina alte n polinoame $P_{i,2} \in \Pi_{2m}$ ($i = \overline{1, n}$) care să satisfacă sistemul (7) în punctele $x = h$, $x = 2h$, multiple de m ori, și în plus condițiile de racordare

$$P_{i,2}(h) = P_{i,1}(h); \quad (i = \overline{1, n}) \quad (16)$$

Aceste cerințe implică în virtutea relațiilor (14), (16), egalitățile:

$$\begin{aligned} P_{i,2}^{(k)}(h) &= g_{i,k}(h, P_{1,2}(h), P_{2,2}(h), \dots, P_{n,2}(h)) = & (17) \\ &= g_{i,k}(h, P_{1,1}(h), P_{2,1}(h), \dots, P_{n,1}(h)) = P_{i,1}^{(k)}(h), \quad (k = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{i,2}^{(k)}(2h) &= g_{i,k}(2h, P_{1,2}(2h), P_{2,2}(2h), \dots, P_{n,2}(2h)), & (18) \\ &(k = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}). \end{aligned}$$

În aceste egalități, $P_{i,2}(2h)$, ($i = \overline{1, n}$) sînt necunoscute. Dar deoarece $P_{i,k} \in \Pi_{2m}$, vom determina, ca și anterior mărimile $P_{i,2}(2h)$, ($i = \overline{1, n}$), din sistemul

$$H_m[P_{i,2}; h, 2h] = 0. \quad (i = \overline{1, n}). \quad (19)$$

Atunci soluția aproximativă spline a problemei (7)–(8) pe intervalul $[0, 2h]$, va fi

$$s_i(x) = \begin{cases} P_{i,1}(x) & \text{dacă } x \in [0, h] \\ P_{i,2}(x) & \text{dacă } x \in [h, 2h] \end{cases} \quad (i = \overline{1, n})$$

care se vede că sînt funcții spline de grad $2m$ și de clasă $C^m[0, 2h]$. Continuînd în aceeași manieră, vom obține aproximația spline pe tot intervalul $[0, b]$. În general, în intervalul $[(r-1)h, rh]$, s_i va fi egală cu $P_{i,r}$, ($r = \overline{1, q}$; $i = \overline{1, n}$) care sînt polinoame de grad $2m$, determinate prin relațiile:

$$\begin{aligned} P_{i,r}((r-1)h) &= P_{i,r-1}((r-1)h) \\ P_{i,r}^{(k)}((r-1)h) &= g_{i,k}[(r-1)h, P_{1,r}((r-1)h), \dots, P_{n,r}((r-1)h)] = \\ &= P_{i,r-1}^{(k)}((r-1)h) \\ P_{i,r}^{(k)}(rh) &= g_{i,k}[rh, P_{1,r}(rh), \dots, P_{n,r}(rh)], \\ H_m[P_{i,r}; (r-1)h, rh] &= 0. \\ (i = \overline{1, n}; k = \overline{1, m}; r = \overline{1, q}). \end{aligned}$$

Ultimul sistem de egalități ne va determina mărimile $P_{i,r}(rh)$, ($i = \overline{1, n}$) și astfel cu o interpolare Hermite a datelor $P_{i,r}^{(k)}((r-1)h)$, $P_{i,r}^{(k)}(rh)$, ($k = \overline{0, m}$, $i = \overline{1, n}$), vom determina polinoamele $P_{i,r}$, ($i = \overline{1, n}$). Din construcția funcțiilor spline s_i , ($i = \overline{1, n}$), rezultă că sînt de grad $2m$ și clasă $C^m[0, b]$. Vom arăta că pentru h suficient de mic, s_i date de această construcție există în mod unic. În acest scop, facem notațiile:

$$D_H = \{(x, y_1, \dots, y_n) \mid 0 \leq x \leq b, \mid y_i - y_i(x) \mid \leq H\} \quad (20)$$

este o vecinătate a soluției $y_i(x)$, ($i = \overline{1, n}$) problemei (7)–(8).

$$L = \max \left| \frac{g_{i,j}}{y_k} \right|, (x, y_1, \dots, y_n) \in D_H; (i, k = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}) \quad (21)$$

$$\gamma = L(C_{1,m}h + C_{2,m}h^2 + \dots + C_{m,m}h^m) \quad (22)$$

TEOREMA 1. Fie (y_1, y_2, \dots, y_n) soluția problemei

$$y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n), y_i(0) = y_{i,0}; (i = \overline{1, n})$$

definită și continuă pe $[0, b]$. Presupunem că

$$f_i \in C^{2m+1}(D_H). \quad (23)$$

Dacă h este astfel încît

$$\gamma < 1 \quad (24)$$

atunci funcțiile spline de grad $2m$, de clasă $C^m[0, b]$, (s_1, s_2, \dots, s_n) , date de construcția de mai sus există în mod unic.

Demonstrație. Vom arăta că sistemul algebric (15) are soluție unică. Introducem notațiile:

$$\begin{aligned} \Phi_i(x, y_1, y_2, \dots, y_n) &= y_i + C_{1,m}h g_{i,1}(x, y_1, \dots, y_n) + \\ &+ C_{2,m}h^2 g_{i,2}(x, y_1, \dots, y_n) + \dots + C_{m,m}h^m g_{i,m}(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \psi_i(x, y_1, \dots, y_n) &= C_{1,m}h g_{i,1}(x, y_1, \dots, y_n) - C_{2,m}h^2 g_{i,2}(x, y_1, \dots, y_n) + \\ &+ \dots + (-1)^{m-1} C_{m,m}h^m g_{i,m}(x, y_1, \dots, y_n). \end{aligned} \quad (26)$$

Cu aceste notații, sistemul (15) devine

$$P_i(h) = \Phi_i(0, y_{1,0}, \dots, y_{n,0}) + \psi_i(h, P_1(h), \dots, P_n(h)), (i = \overline{1, n}) \quad (27)$$

care trebuie rezolvat în raport cu $P_i(h)$.

Pentru demonstrarea existenței și unicității aproximațiilor spline (s_1, s_2, \dots, s_n) trebuie să arătăm că sistemele

$$\begin{aligned} P_i(x_k) &= \Phi_i(x_{k-1}, P_1(x_{k-1}), \dots, P_n(x_{k-1})) + \\ &+ \psi_i(x_k, P_1(x_k), \dots, P_n(x_k)), (i = \overline{1, n}) \end{aligned} \quad (28)$$

în necunoscutele $P_i(x_k)$, ($x_k = kh$), au soluție unică deoarece $P_i(x_{k-1})$ sînt cunoscute la fiecare pas. Condiția (23) arată că funcțiile Φ_i și ψ_i , ($i = \overline{1, n}$) au derivate parțiale de ordinul întâi continue în D_H . Din (21), rezultă că

$$|g_{i,j}(x, y_1, \dots, y_n) - g_{i,j}(x, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)| \leq L \sum_{r=1}^n |y_r - y_r^*| \forall \quad (29)$$

$$\forall (x, y_1, \dots, y_n), (x, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*) \in D_H.$$

Deoarece $\Phi_i(x_{k-1}, P_1(x_{k-1}), \dots, P_n(x_{k-1}))$ este cunoscut la fiecare pas, notăm prescurtat sistemul (28) în necunoscutele $P_i(x_k)$ astfel

$$P_i = G_i^k(P_1, P_2, \dots, P_n), \quad (i = \overline{1, n}). \quad (30)$$

Vom arăta că operatorul $G^k: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ definit după legea:

$$(P_1, P_2, \dots, P_n) \rightarrow (G_1^k(P_1, \dots, P_n), G_2^k(P_1, \dots, P_n), \dots, G_n^k(P_1, \dots, P_n))$$

este de contracție. Fie $P^{(1)} = (P_1^{(1)}, P_2^{(1)}, \dots, P_n^{(1)})$, $P^{(2)} = (P_1^{(2)}, \dots, P_n^{(2)}) \in D_H$, cu distanța dintre ele

$$\rho(P^{(1)}, P^{(2)}) = \sum_{i=1}^n |P_i^{(1)} - P_i^{(2)}|$$

Avînd în vedere (25), (29), rezultă că

$$\rho(G^k(P^{(1)}), G^k(P^{(2)})) = \sum_{i=1}^n |G_i^k(P^{(1)}) - G_i^k(P^{(2)})| \leq \gamma \rho(P^{(1)}, P^{(2)})$$

Deoarece $\gamma < 1$, operatorul G^k e de contracție, deci are un punct fix unic și teorema este demonstrată.

În continuare, vom studia evaluarea erorii și convergența aproximării prin spline.

În acest scop, vom defini derivatele de ordin mai mare ca m , a aproximației spline, în nodurile x_k , prin următoarea formulă:

$$s_i^{(j)}(x_k) = \frac{1}{2} \left[s_i^{(j)}\left(x_k - \frac{h}{2}\right) + s_i^{(j)}\left(x_k + \frac{h}{2}\right) \right], \quad (31)$$

$$(j = \overline{m+1, 2m}, i = \overline{1, n}, k = \overline{1, q-1}).$$

TEOREMA 2. Fie (y_1, y_2, \dots, y_n) soluția problemei (7)–(8) și (s_1, s_2, \dots, s_n) soluția aproximativă spline construită mai sus. Dacă

$$f_i \in C^{2m+1}(D_H)$$

și

$$\gamma < \frac{1}{n}$$

atunci există o constantă K astfel încât

$$|y_i(x) - s_i(x)| < Kh^{2m}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (32)$$

$$|y_i^{(j)}(x) - s_i^{(j)}(x)| < Kh^{m-j+1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, n}; \quad (33)$$

$$|y_i^{(j)}(x) - s_i^{(j)}(x)| < K, \quad j = \overline{m+1, 2m}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (34)$$

oricare ar fi $x \in [0, b]$, cu condiția ca derivatele $s_i^{(j)}(x_k)$ pentru $j = \overline{m+1, 2m}$ să fie calculate după formula (31).

Demonstrație. Dacă scriem $P_i(x_k) = s_i(x_k)$, sistemul (28) devine

$$\begin{aligned} s_i(x_k) &= \Phi_i(x_{k-1}, s_1(x_{k-1}), \dots, s_n(x_{k-1})) + \\ &+ \psi_i(x_k, s_1(x_k), \dots, s_n(x_k)), \quad (i = \overline{1, n}). \end{aligned} \quad (35)$$

Vom arăta, în continuare, că soluția exactă (y_1, y_2, \dots, y_n) satisface pe nodurile x_k sistemul (35) cu o exactitate pe care o vom preciza. Restul în formula de cuadratură a lui Hermite, din (5), se poate exprima astfel:

$$H_m[y_i; 0, h] = (-1)^m \frac{(m!)^2}{(2m)!(2m+1)!} h^{2m+1} y_i^{(2m+1)}(\xi), \quad 0 < \xi < h. \quad (36)$$

Pe baza relațiilor (35), putem scrie că

$$\begin{aligned} y_i(x_k) &= \Phi_i(x_{k-1}, y_1(x_{k-1}), \dots, y_n(x_{k-1})) + \\ &+ \psi_i(x_k, y_1(x_k), \dots, y_n(x_k)) + R_{i,k}, \quad (i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, q}) \end{aligned} \quad (37)$$

unde

$$R_{i,k} = (-1)^m \frac{(m!)^2}{(2m)!(2m+1)!} h^{2m+1} y_i^{(2m+1)}(\xi_k), \quad x_{k-1} < \xi_k < x_k, \quad (38)$$

Scopul nostru este să evaluăm eroarea

$$e_{i,k} = y_i(x_k) - s_i(x_k), \quad x_k = kh, \quad (k = \overline{0, q}, \quad i = \overline{1, n}). \quad (39)$$

Facem următoarele notații:

$$\begin{aligned} y_{i,k} &= y_i(x_k), \quad s_{i,k} = s_i(x_k) \\ \Phi_{i,k}(y) &= \Phi_i(kh, y_1(kh), \dots, y_n(kh)), \quad \Phi_{i,k}(s) = \\ &= \Phi_i(kh, s_1(kh), \dots, s_n(kh)) \end{aligned}$$

și analog pentru Ψ_i , $(i = \overline{1, n}, \quad k = \overline{0, q})$.

Cu aceste notații, relațiile (35) și (37) devin

$$s_{i,k} = \Phi_{i,k-1}(s) + \Phi_{i,k}(s)$$

$$y_{i,k} = \Phi_{i,k-i}(y) + \Phi_{i,k}(y) + R_{i,k}$$

pe care scăzându-le obținem

$$|e_{i,k}| \leq |\Phi_{i,k-1}(y) - \Phi_{i,k-1}(s)| + |\psi_{i,k}(y) - \psi_{i,k}(s)| + |R_{i,k}| \quad (40)$$

Din (23) și (25), rezultă că în D_H are loc inegalitatea

$$|\Phi_i(x, y_1, \dots, y_n) - \Phi_i(x, y_1^*, y_2^*, \dots, y_n^*)| \leq (1 + \gamma) \sum_{r=1}^n |y_r - y_r^*|$$

Atunci din (40), rezultă că

$$|e_{i,k}| \leq (1 + \gamma) \sum_{j=1}^n |e_{j,k-1}| + \gamma \sum_{j=1}^n |e_{j,k}| + |R_{j,k}|$$

Pentru a delimita această eroare, scriem inegalitatea de mai sus, succesiv pentru valorile lui k de la 1 pînă la q , apoi însumăm fiecare membru după indicele i și notînd

$$e_k = \sum_{i=1}^n |e_{i,k}|, \quad R_k = \sum_{i=1}^n |R_{i,k}| \quad (41)$$

obținem inegalitățile:

$$(1 - n\gamma)e_1 \leq R_1$$

$$(1 - n\gamma)e_2 \leq n(1 + \gamma)e_1 + R_2$$

$$(1 - n\gamma)e_3 \leq n(1 + \gamma)e_2 + R_3$$

$$\dots$$

$$(1 - n\gamma)e_q \leq n(1 + \gamma)e_{q-1} + R_q$$

Deoarece $\gamma < \frac{1}{n}$, înseamnă că $1 - n\gamma > 0$. Înmulțind de jos în sus inegalitățile precedente cu

$$\frac{1}{1 - n\gamma}, \frac{1 - (n + \gamma)}{(1 - n\gamma)^2}, \dots, \frac{n^{q-1}(1 + \gamma)^{q-1}}{(1 - n\gamma)^q}$$

și adunîndu-le, obținem:

$$e_q \leq \frac{1}{1 - n\gamma} R_q + \frac{n(1 + \gamma)}{(1 - n\gamma)^2} R_{q-1} + \dots + \frac{n^{q-1}(\gamma + 1)^{q-1}}{(1 - n\gamma)^q} R_1.$$

Notînd

$$\rho = h^{2m+1} \frac{m!n}{(2m)! (2m + 1)!} M_{2m+1}, \quad M_{2m+1} = \max_{[0,b]} |y_i^{2m+1}(x)|, \quad (i = \overline{1, n}),$$

din inegalitatea de sus, însumînd progresia ce se formează, și avînd în vedere ordinul de mărime în raport cu h al expresiei finale, rezultă că

$$e_q \leq 0(h^{2m})$$

adică există o constantă K astfel încît

$$e_q \leq Kh^{2m}$$

Deoarece șirul $\{e_k\}$ ($k = \overline{0, q}$) este monoton crescător, evident

$$e_k \leq Kh^{2m}, \quad (k = \overline{0, q}).$$

Atunci rezultă din (41) că

$$|e_{i,k}| = |y_{i,k} - s_{i,k}| < Kh^{2m} \quad (i = \overline{1, n}, k = \overline{0, q}) \quad (42)$$

și astfel (32) este demonstrată pentru $x = kh$.

Pentru evaluarea funcțiilor

$$e_i(x) = y_i(x) - s_i(x) \quad (i = \overline{1, n}) \quad x \in [0, b].$$

pe întreg intervalul $[0, b]$, vom folosi polinomul de interpolare a lui Hermite, pe nodurile 0 și 1 multiple de m ori

$$F_i(t) = \sum_{j=0}^m \{F_i^{(j)}(0)\lambda_j(t) + (-1)^j F_i^{(j)}(1)\lambda_j(1-t)\} + \frac{t^{m+1}(t-1)^{m+1}}{(2m+1)!} F_i^{(2m+1)}(\eta), \quad (43)$$

$$0 < \eta < 1, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

unde λ_j sînt polinoamele fundamentale de grad $2m+1$.

Dacă substituim $x = th$ și scriem

$$e_i(x) = e_i(th) = F_i(t)$$

obținem

$$e_i(x) = \sum_{j=0}^m h^j \left[e_i^{(j)}(0)\lambda_j\left(\frac{x}{h}\right) + (-1)^j e_i^{(j)}(h)\lambda_j\left(1 - \frac{x}{h}\right) \right] + R_i^* \quad (44)$$

unde

$$|R_i^*| \leq \frac{h^{2m+1}}{2^{2m+1}(2m+2)!} \max_{[0, h]} |e_i^{(2m+2)}(x)| \quad (45)$$

Vom aplica formula de interpolare a lui Hermite pentru $e_i(x) = y_i(x) - s_i(x)$ în fiecare subinterval $I_k = [(k-1)h, kh]$, ($k = \overline{1, q}$), lui $[0, b]$. Pentru derivatele funcției e_i , pe noduri putem scrie

$$|e_i^{(j)}(kh)| = |y_i^{(j)}(kh) - s_i^{(j)}(kh)| = |g_{i,j}(kh, y_1(kh), \dots, y_n(kh)) - g_{i,j}(kh, s_1(kh), \dots, s_n(kh))| \leq L \sum_{r=1}^n |y_r(kh) - s_r(kh)| \leq n KLh^{2m} \quad (46)$$

$$(j = \overline{1, m}).$$

Notăm cu

$$Q_j = \max_{0 < t < 1} (|\lambda_j(t)| + |\lambda_j(1-t)|) \quad (45)$$

Atunci pe fiecare subinterval I_k , (44), ne dă

$$|y_i(x) - s_i(x)| \leq \sum_{j=0}^m h^j Q_j n KLh^{2m} + \frac{h^{2m+2}}{2^{2m+2} (2m+2)!} M_{2m+2} \quad (46)$$

unde

$$M_{2m+2} = \max_{0, b} |y_i^{(2m+2)}(x)|, \quad (i = \overline{1, n})$$

de unde rezultă că

$$|y_i(x) - s_i(x)| < K^* h^{2m}$$

și astfel relația (32) a teoremei este demonstrată.

Relația (34) se demonstrează analog ca și teorema 4.2. din [1] p. 60, iar relația (33) se demonstrează prin inducție în raport cu indicele j .

În concluzie, rezultă că funcțiile spline ce aproximează soluția problemei (7)–(8), converg către soluția exactă, iar derivatele lor, pînă la ordinul m , converg către derivatele soluției.

(Intrat în redacție la 10 ianuarie 1971)

BIBLIOGRAFIE

1. Loscalzo, F. R., *On the use of spline functions for the numerical solution of ord na differential equations*, Thesis, Univ. Wisconsin, Madison, 1968.
2. Loscalzo, F. R., Schoenberg, I. J., *On the use of spline functions for the approximation of solutions of ordinary differential equations*, Tech. Sum. Rpt. 723, M.R.C. Univ. Wisconsin, Madison, 1967.
3. Loscalzo, F. R., Talbot, T. D., *Spline function approximations for solutions of ordinary differential equations*, „SIAM J. Numer. Anal.”, 4 (1967), 433–45.
4. Sakai, Manabu, *Spline interpolation and two-point boundary value problems*, „Memoire of the Faculty of Science, Kyushu University”, 24 (1970), 1, 17–35.

5. Micula, Gh., *Spline functions approximating the solution of nonlinear differential equation of n order*, (to appear).
6. Micula, Gh., *Fonctions spline d'approximation pour les solutions des systèmes d'équations différentielles*, „Analele Șt. Univ. Al. I. Cuza”, 17 (1971), 1, 139—155.

„SPLINE” ФУНКЦИИ ВЫСШЕЙ СТЕПЕНИ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Резюме)

В статье конструируется „spline” аппроксиманта для решения задачи Коши относительно нелинейной системы дифференциальных уравнений. Изучается существование, единственность и сходимость приближительного „spline” решения.

SPLINE FUNCTIONS OF HIGHER DEGREE OF APPROXIMATION FOR SOLUTIONS
OF SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

(Summary)

An approximate spline is constructed for the solution of Cauchy's problem regarding a non-linear system of differential equations. The existence, unicity and convergence of the approximate spline solution are investigated.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES AUX IMPLICATIONS

PETRU T. MOCANU

1. Une fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est dite *injective (univalente)* si chaque valeur est prise une seule fois dans \mathbf{R} ; cela veut dire qu'une fonction injective est une solution de „l'équation fonctionnelle à implication”

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

(on sous-entend $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$).

Puisque f est une *fonction* (univoquement définie), on a aussi l'implication

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2).$$

L'observation que nous venons de faire plus haut nous suggère l'étude de deux types „d'équations fonctionnelles aux implications” plus générales (nous considérerons seulement des fonctions réelles d'une variable réelle):

Soient les fonctions $\varphi, \psi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Trouver les fonctions $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ qui vérifient

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \Rightarrow \psi[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)] = 0 \quad (\text{I})$$

ou bien

$$\psi[f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)] = 0 \Rightarrow \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (\text{II})$$

On sous-entend partout $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$.

Naturellement, on peut poser le problème de trouver les solutions d'un de ces deux types d'équations aux implications, qui appartienne à une certaine classe de fonctions (par exemple, dont les solutions soient des fonctions continues).

2. Dans cette note, nous nous proposons de concrétiser le problème général sur un exemple.

Soit $\varphi = \psi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$

$$\forall (u, v) \in \mathbf{R}^2, \quad \varphi(u, v) = u + v.$$

Le problème (I) devient en ce cas

$$x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow f(x_1) + f(x_2) = 0,$$

donc

$$\forall x_1 \in \mathbf{R}, f(-x_1) = -f(x_1),$$

ce qui signifie que la solution de ce problème est toute fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ impaire.

Le problème (II) devient

$$f(x_1) + f(x_2) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0.$$

On peut voir immédiatement que, s'il existe $x_0 \in \mathbf{R}$ tel que $f(x_0) = 0$, alors on a $x_0 = 0$.

Cette équation fonctionnelle à implication est évidemment vérifiée par toute fonction $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ qui ne change pas de signe (elle peut s'annuler seulement à l'origine). Dans le cas où la fonction f change de signe, nous avons le résultat suivant :

THÉORÈME. *Les solutions continues qui change de signe de l'équation fonctionnelle à implication $f(x_1) + f(x_2) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$ sont toutes les fonctions $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, continues, impaires, injectives (monotones), qui changent de signe en s'annulant seulement à l'origine.*

Démonstration. La fonction f étant continue et changeant de signe, elle s'annule en un point qui, d'après ce que nous venons de voir, est nécessairement le point $x = 0$.

Pour faire un choix, supposons $xf(x) > 0$ pour $x \neq 0$.

Posons $I = f(\mathbf{R})$. Puisque la fonction f est continue, I c'est un intervalle. Évidemment $0 \in I$ et il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que $[-\alpha, \alpha] \subset I$.

Soient

$$a = \inf \{x/x \in \mathbf{R}, f(x) = \alpha\}$$

$$b = \sup \{x/x \in \mathbf{R}, f(x) = -\alpha\}.$$

Nous avons $a > 0$, $b < 0$ et $f(a) = \alpha$, $f(b) = -\alpha$ (en vertu de la continuité de f).

Donc

$$f(a) + f(b) = 0 \Rightarrow b = -a,$$

c'est à dire

$$f(-a) = -\alpha.$$

De la définition de a et de la continuité de f , il résulte que $f(x) \in]0, \alpha]$, pour $x \in]0, a]$ et $f(x) \in [-\alpha, 0[$, pour $x \in [-a, 0[$.

Dans l'intervalle fermé $[-a, a]$ la fonction f est univalente (donc monotone). En effet, supposons qu'il existe

$$x_1, x'_1 \in]0, a], x_1 \neq x'_1, \text{ tels que } f(x_1) = f(x'_1) = \beta \leq \alpha$$

Alors, il existe $x_2 \in [-a, 0[$ tel que $f(x_2) = -\beta$. On a donc

$$f(x_1) + f(x_2) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$$

$$f(x'_1) + f(x_2) = 0 \Rightarrow x'_1 + x_2 = 0]$$

d'où $x'_1 = x_1$, ce qui contredit l'hypothèse.

De la même façon on démontre l'univalence de la fonction f sur $[-a, 0[$.

Montrons que $x > a$ implique $f(x) > \alpha$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, il existerait un point $x'_1, x''_1 > a$, tel que $f(x'_1) < \alpha$. Alors, on pourrait choisir $x'_1 \in]0, a]$ tel que $f(x'_1) = f(x''_1)$. On déduirait l'existence d'un point $x_2 \in [-a, 0[$ tel que $f(x_2) = -f(x'_1) = -f(x''_1)$, d'où $x_2 + x'_1 = 0$, ce qui serait contradictoire.

D'une manière analogue, on montre que $x < -a$ implique $f(x) < -\alpha$.

Il en résulte que le point a tel que $f(a) = \alpha$ est *unique* et si $\beta > \alpha$, $[-\beta, \beta] \subset I$, alors il existe un point unique $b, b > a$ tel que $f(b) = \beta$. Nous avons dans ce cas $[-b, b] \supset [-a, a]$ et $f(-b) = -\beta$.

Soit

$$\alpha_0 = \sup \{ \alpha / [-\alpha, \alpha] \subset I \}$$

et choisissons une suite de nombres positifs (α_n) tels que

$$\alpha_n < \alpha_{n+1}, \lim \alpha_n = \alpha_0 \text{ et } [-\alpha_n, \alpha_n] \subset I.$$

Alors il existe une suite de nombres positifs (a_n) tels que $a_n < a_{n+1}$, $f(a_n) = \alpha_n$, $f(-a_n) = -\alpha_n$ et que dans l'intervalle fermé $[-a_n, a_n]$ la fonction soit univalente.

Soit

$$a_0 = \lim a_n.$$

Nous pouvons avoir les deux cas suivants :

1° $I = \mathbf{R}$ et alors évidemment $\alpha_0 = +\infty$. Supposons $a_0 < +\infty$. Puisque $\lim \alpha_n = \lim f(a_n) = f(a_0)$, on déduit $f(a_0) = +\infty$, ce qui contredit la continuité de f dans le point a_0 . Donc, dans ce cas, on a nécessairement $a_0 = +\infty$.

2° $I \neq \mathbf{R}$ et alors on a évidemment $\alpha_0 < +\infty$. Mais, α_0 est un point frontière de l'intervalle I . Supposons que $a_0 < +\infty$. Alors, $\lim f(a_n) = f(a_0) = \alpha_0$. On a encore $f(-a_0) = -\alpha_0$. Puisque

$$x > a_0 \Rightarrow f(x) > \alpha_0$$

et

$$x < -a_0 \Rightarrow f(x) < -\alpha_0$$

il en résulte l'existence d'un point $\alpha', \alpha' > \alpha_0$ tel que

$$[-\alpha_0, \alpha_0] \subset [-\alpha', \alpha'] \subset I$$

ce qui contredit la définition de α_0 . Donc, dans ce cas, on a aussi $a_0 = +\infty$.

Il en résulte que la fonction f est univalente sur \mathbf{R} . Elle possède donc une inverse et si on pose $x = f^{-1}(y)$, on déduit que la fonction inverse f^{-1} est une solution du problème de type (I):

$$y_1 + y_2 = 0 \Rightarrow f^{-1}(y_1) + f^{-1}(y_2) = 0,$$

d'où on obtient que f^{-1} est impaire. Donc, la fonction f est aussi impaire, ce qui achève la démonstration.

(Manuscrit reçu le 30 novembre 1970)

ECUAȚII FUNCȚIONALE CU IMPLICAȚII

(Rezumat)

Fie date funcțiile $\varphi, \psi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Se pune problema de a determina funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ care verifică una dintre „ecuațiile funcționale cu implicații” de tip (I) sau (II).

Se rezolvă această problemă în cazul particular $\varphi = \psi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(u, v) = u + v$. Se arată că soluțiile continue care schimbă de semn ale ecuației funcționale cu implicație $f(x_1) + f(x_2) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$ sînt funcțiile $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, continue, impare și injective care schimbă semnul anulîndu-se numai în origine.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИМПЛИКАЦИЯМИ

(Резюме)

Пусть даны функции $\varphi, \psi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Ставится вопрос определения функций $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ удовлетворяющих одному из „функциональных уравнений с импликациями” типа (I) или (II).

Дается решение этого вопроса в частном случае $\varphi = \psi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(u, v) = u + v$. Показано, что непрерывные решения, изменяющие знаки функционального уравнения с импликациями $f(x_1) + f(x_2) = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0$ суть непрерывные, нечетные и инъективные функции $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, которые изменяют знак, аннулируясь лишь в начале.

QUASIMESURES ALGÈBRIQUES DÉFINIES SUR DES CHAMPS D'ÉVÉNEMENTS

MARCEL RĂDULESCU

On utilise en général, pour définir l'information d'un événement, la probabilité de cet événement. Cependant, divers auteurs [1], [2] ont posé dans plusieurs articles le problème de définir l'information sans recourir à la probabilité. On peut de cette façon définir la notion d'information d'une manière indépendante et déduire ensuite la notion de probabilité. Les recherches ont été continuées en ce sens [3], [4], [5], afin d'obtenir une simplification des axiomes respectifs. Malgré la simplification obtenue, les constructions respectives restent toujours liées à la résolution d'une équation fonctionnelle plus ou moins compliquée. Ces recherches démontrent l'étroite liaison qui existe entre les notions de probabilité et d'information.

Il se pose d'une manière naturelle le problème de *trouver une notion plus générale, qui dans certains conditions doit représenter la probabilité et dans d'autres conditions, l'information*. La note présente est consacrée à la définition d'une telle notion.

Soit τ un complexe de conditions. On considère un champ S d'événements aléatoires par rapport à τ . S'il apparaît $B \in S$ lorsque τ se réalise, on peut considérer le couple (τ, B) comme une condition complexe d'apparition de $A \in S$. On écrira en ce cas A/B . On remarque alors que $A \cap B = A \cap (B/A) = B \cap (A/B)$. On peut considérer le champ d'événements S comme un semigroupe commutatif $S(\cap)$ dans lequel l'opération entre les événements est leur intersection. Dans ce semigroupe, l'événement qui apparaît avec certitude est U . On observe que U est l'élément unité. Le semigroupe $S(\cap)$ est ordonné par la relation d'inclusion \subset . On considère de même un semi-groupe commutatif $G(*)$ qui est doué d'un élément unité θ , et qui est ordonné par la relation $<$. Dans ce qui suit on notera par $f: G \rightarrow R$ une application biunivoque de G dans l'axe réel. Nous supposons de plus que f est monotone croissante.

DÉFINITION. On nommera application quasimesurable algébrique une application $\pi: S \rightarrow G$ qui vérifie les axiomes :

Ax. 1. Pour chaque $A, B \in S$

$$\pi(A \cap B) = \pi(A) * \pi(B/A) = \pi(B) * \pi(A/B).$$

Ax. 2. Pour chaque $A, B \in S, A \subset B$ on a

$$\pi(A) < \pi(B).$$

Ax. 3. Il existe une application biunivoque, monotone-croissante $f: G \rightarrow R$ de sorte que pour tout $A, B \in S, A \cap B = \emptyset$

$$f[\pi(A \cup B)] = f[\pi(A)] + f[\pi(B)].$$

On a noté dans le dernier axiome par $\emptyset \in S$ l'événement impossible. L'axiome Ax. 1 nous prouve que l'application π est un homomorphisme, et Ax. 2 démontre que l'homomorphisme est isotone. L'axiome Ax. 3 peut être nommé l'axiome d'additivité par rapport à f .

Si S est infini et forme une σ -algèbre, c'est à dire, si $A_i \in S, i = 1, 2, \dots, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in S$, on peut considérer un autre axiome d'additivité complète par rapport à f , soit :

Ax. 3'. Il existe une application biunivoque, monotone-croissante $f: G \rightarrow R$, telle que pour n'importe quel $A_i \in S, A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$,

$$f[\pi(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i)] = \sum_{i=1}^{\infty} f[\pi(A_i)].$$

Dans le cas où S est une σ -algèbre on considère l'axiome suivant.

Ax. 4. Pour n'importe quelle suite d'événements $B_n \supset B_{n+1}, n = 1, 2, \dots$ de sorte que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$ a lieu la limite $\lim_{n \rightarrow \infty} f[\pi(B_n)] = 0$. Cet axiome peut être nommé l'axiome de continuité par rapport à f .

PROPOSITION 1. Les axiomes d'additivité complète et de continuité par rapport à f sont équivalents.

Si l'axiome d'additivité complète est vérifié, soit $B_n \in S, n = 1, 2, \dots$ une suite d'événements pour laquelle $B_n \supset B_{n+1}, n = 1, 2, \dots, \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Dans ce cas

$$B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} (B_k \cap B_{k+1}),$$

$$f[\pi(B_n)] = \sum_{k=n}^{\infty} f[\pi(B_k \cap B_{k+1})]$$

c'est à dire $f[\pi(B_n)]$ est le reste de la série convergente

$$f[\pi(B_1)] = \sum_{k=1}^{\infty} f[\pi(B_k \cap B_{k+1})].$$

Réciproquement, si l'axiome de continuité est vérifié, alors on considère $B_n = \bigcup_{i=1}^n A_i$ pour $A_i \in S$, $i = 1, 2, \dots$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$. Il résulte que

$B_n \supset B_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$ et $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$. Il suit de Ax. 3 que

$$f[\pi(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)] = f[\pi[(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k) \cup B_n]] = \sum_{k=1}^{n-1} f[\pi(A_k)] + f[\pi(B_n)]$$

donc, de Ax. 4, il résulte Ax. 3'.

Les propriétés suivantes résultent immédiatement. De $A \cup \bar{A} = U$, $A \cap \bar{A} = \emptyset$, $\pi(U) = \theta$, il résulte que $f[\pi(\bar{A})] = f(\theta) - f[\pi(A)]$, $\pi(\emptyset) = f^{-1}(0) = \omega$. De $A \cup B = A \cup (B - A \cap B)$, et $B - A \cap B \subset B$, il résulte que $f[\pi(A \cup B)] \leq f[\pi(A)] + f[\pi(B)]$.

Si $G(\ast)$ est un intervalle de l'axe réel qui contient le point 1, et l'opération \ast est la multiplication, alors la quasimesure algébrique $\pi: S \rightarrow G$ est la quasiprobabilité $P_f: S \rightarrow G$. En ce cas $\theta = 1$, $P_f(U) = 1$, $P_f(A \cap B) = P_f(A)P_f(B/A) = P_f(B)P_f(A/B)$.

PROPOSITION 2. Si la relation d'ordre $<$ est \leq (relation d'inégalité entre nombres) et qu'il existe $A \in S$, $P_f(A) < 1$, alors G est l'intervalle $[0, 1]$.

Il résulte de $\emptyset \subset A$ et $P_f(\emptyset) = \omega$, que $\omega < 1$. Si $\omega \neq 0$, alors $P_f(\emptyset) = P_f(A \cap \emptyset) = P_f(A)P_f(\emptyset/A) = P_f(A)P_f(\emptyset) \neq \omega$.

PROPOSITION 3. Si la relation d'ordre $<$ est \geq et qu'il existe $A \in S$, $P_f(A) > 1$ alors G est l'intervalle $[1, +\infty]$.

THÉORÈME 1. Si G est l'intervalle $[0, 1]$ et $f(x) = x$, alors $P_f: S \rightarrow G$ est la probabilité $P: S \rightarrow G$.

La démonstration est immédiate.

Dans le cas où $G(\ast)$ est un intervalle de l'axe réel qui contient le point 0 et si l'opération \ast est l'addition, alors, la quasimesure algébrique $\pi: S \rightarrow G$ est la quasiinformation $I_f: S \rightarrow G$. En ce cas $\theta = 0$, $I_f(U) = 0$, $I_f(A \cap B) = I_f(A) + I_f(B/A) = I_f(B) + I_f(A/B)$.

PROPOSITION 4. Si la relation d'ordre $<$ est \geq et s'il existe $A \in S$, $I_f(A) > 0$, alors G est l'intervalle $[0, +\infty]$.

PROPOSITION 5. Si la relation d'ordre $<$ est \leq et s'il existe $A \in S$, $I_f(A) < 0$, alors G est l'intervalle $[-\infty, 0]$.

Les démonstrations des propositions 3, 4 et 5 sont semblables à celle de la proposition 2.

THÉORÈME 2. Si G est l'intervalle $[0, +\infty]$ et $f(x) = e^{-x}$, alors $I_f: S \rightarrow G$ est l'information $I: S \rightarrow G$.

Soit $P: S \rightarrow \bar{G}$, l'application $P = f \circ I$, $\bar{G} = [0, 1]$. En ce cas $P(A) = e^{-I(A)}$, $A \in S$ et $I(A) = -\log P(A)$. Pour démontrer le théorème,

il est suffisant de montrer que l'application P vérifie les axiomes de la probabilité. La vérification des axiomes $P(A) \geq 0$, $P(U) = 1$, est immédiate. On remarque, pour l'axiome d'additivité, que de Ax. 3 si $A \cap B = \emptyset$, il résulte $f[I(A \cup B)] = f[I(A)] + f[I(B)]$, donc $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. Si S est une σ -algèbre, il résulte de Ax. 3' la vérification de l'additivité complète de la probabilité.

On remarque que si G est l'intervalle $[-\infty, 0]$ et $f(x) = e^x$, alors $\bar{I}: S \rightarrow G$ définit une quasiinformation qui peut être appelée désinformation, et qui peut jouer un rôle important par exemple dans la théorie des jeux stratégiques.

(Manuscrit reçu le 26 mars 1970)

[BIBLIOGRAPHIE

1. Ingarden, R. S., Urbanik, K., *Information without probability*, „Coll. Math.”, 9, 281–304 (1962).
2. Ingarden, R. S., *Information theory and thermodynamics of light*, „Fortschritte der Physik”, 12 (1964), 567–594; 13 (1965), 755–805.
3. Ingarden, R. S., *Simplified axioms for information without probability* „Prace Matematyczne”, 9 (1965), 273–282.
4. Kampé De Fériet, Forte, B. J., *Information et probabilité*, „C.R. Acad.Sci.”, Paris 265 séries A, B, (1967), 110–114, 142–146, 350–353.
5. Guiaşu, S., *Aplicaţii ale teoriei informaţiei. Sisteme dinamice, sisteme cibernetice*, Apendice 314–323, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1968.

CVASIMĂSURI ALGEBRICE DEFINITE PE CÎMPURI DE EVENIMENTE

(Rezumat)

În această notă se pune problema definirii unei noţiuni mai generale care într-un caz particular să coincidă cu probabilitatea şi în alt caz cu informaţia. Se defineşte astfel o cvasimăsură algebrică $\pi: S \rightarrow G$ cu ajutorul axiomelor 1°, 2°, 3°. Dacă operaţia \star este înmulţirea, relaţia de ordine $<$ este \leq şi $f(x) = x$, atunci π este probabilitatea. În caz că operaţia \star este adunarea, relaţia de ordine $<$ este \geq şi $f(x) = e^{-x}$, atunci π este informaţia.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КВАЗИМЕРЫ, ОПРЕДЕЛЁННЫЕ НА ПОЛЯХ СОБЫТИЙ

(Резюме)

В статье ставится вопрос определения более общего понятия, которое в частном случае совпадало бы с вероятностью, а в другом случае — с информацией. Таким образом определяется алгебраическая квазимера $\pi: S \rightarrow G$ с помощью аксиом 1°, 2°, 3°. Если операция \star является умножением, порядковое соотношение $<$ является \leq и $f(x) = x$, тогда π является вероятностью. В случае если операция \star является сложением, порядковое соотношение $<$ является \geq и $f(x) = e^{-x}$, тогда π является информацией.

L'ÉVALUATION DU PARAMÈTRE INCONNU DE LA
DENSITÉ DE PROBABILITÉ PAR LA MÉTHODE
D'APPROXIMATIONS STOCHASTIQUES

ELENA FRĂȚILĂ

Le travail présente un procédé pour évaluer le paramètre inconnu d'une fonction de densité de probabilité, fondé sur la méthode d'approximations stochastiques. Ce procédé est plus avantageux que les procédés classiques d'évaluer le paramètre inconnu d'une fonction de densité de probabilité (Théorie d'estimation [3]) parce que, d'un côté, il permet de s'approcher de la valeur du paramètre autant que nous désirons; et d'un autre côté, en conformité avec le théorème de H. R o b i n s [4], la suite de valeurs approximatives converge en probabilité vers la vraie valeur du paramètre inconnu.

1. L'idée d'approximations stochastiques appartient à H. R o b i n s [4]. Il part de l'approximation des racines d'une équation

$$M(x) = \alpha, \quad (1)$$

$M(x)$ étant une fonction réelle, et α un nombre réel. Alors la suite

$$x_{n+1} = x_n + a_n [\alpha - M(x_n)], \quad n \geq 1 \quad (2)$$

où x_1 est un nombre arbitraire, $\{a_n\}$ une suite de nombres réels qui satisfont certaines conditions, converge vers la solution de l'équation (1) qui est a plus près de x_1 .

Si $M(x)$ est la valeur moyenne d'une variable aléatoire $y(x)$ qui est inconnue, mais si on connaît toute réalisation de $y(x)$ pour chaque x réel, alors la suite (2) est une suite de variables aléatoires dépendantes qui converge vers la solution correspondante de l'équation (1). On donne dans la littérature [1, 2, 4, 5] une série de théorèmes relatifs à la convergence de la suite (2) vers une solution de l'équation (1).

2. Soit $\xi(\alpha)$ une variable aléatoire avec la densité de probabilité $\rho(\cdot, \alpha)$, où α est un paramètre de valeur inconnue, et x_1, \dots, x_n , un échantillon répété effectué sur une variable aléatoire $\xi(\alpha)$. En réalité $x_i, 1 \leq i \leq n^*$,

sont des valeurs des variables aléatoires indépendantes $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{n^*}$, toutes ayant la même densité de probabilité $\rho(\cdot, \alpha)$ et la même valeur moyenne

$$E\xi(\alpha) = M(\alpha) = \int_R x\rho(x, \alpha) dx. \quad (3)$$

En outre, parce que la moyenne théorique est estimée par la moyenne d'échantillon, pour n assez grand, en conformité à la méthode des moments [3], on a :

$$M(\alpha) = \frac{\sum_{i=1}^{n^*} x_i}{n^*} = m.$$

Par conséquent, pour déterminer la valeur du paramètre inconnu α on considère l'équation

$$M(\alpha) = m, \quad (4)$$

où $M(\alpha)$ est une fonction réelle, inconnue. Dans ces circonstances on peut appliquer le procédé d'approximations stochastiques.

Soit α_1 une valeur arbitraire réelle, voisine de la valeur du paramètre inconnu, et la suite

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + a_n [m - \xi_n] \quad (5)$$

où $\{a_n\}$ satisfait les conditions :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty,$$

et $\xi_n = \xi(\alpha_n)$ sont des variables aléatoires avec la même répartition que celle de $\xi(\alpha)$ et la même valeur moyenne $M(\alpha)$.

THÉORÈME 1. *La suite (5) est une suite d'approximations successives de la racine de l'équation (4) qui est la plus près de α_1 .*

Démonstration. En appliquant à la relation (5) l'opérateur E , on obtient :

$$E\alpha_{n+1} = E\alpha_n + a_n [m - E\xi_n].$$

Puisque $E\xi_n = E\xi(\alpha_n) = M(\alpha_n)$, si α_n est une racine de l'équation (4), on a :

$$E\alpha_{n+1} = E\alpha_n.$$

Et réciproquement, c'est à dire que les égalités $E\alpha_{n+1} = E\alpha_n$ et $M(\alpha_n) = m$, sont équivalentes et que la valeur qui les vérifie simultanément est celle donnée par (5). Par conséquent α_{n+1} , $n > 1$, donné par (5) est la solution de l'équation (4).

S'il existe un nombre δ réel et un nombre $\eta < 0$, arbitraire, tel que

$$\begin{aligned} M(\alpha) &\geq m + \eta \quad \text{pour chaque } \alpha > \delta \\ M(\alpha) &\leq m - \eta \quad \text{pour chaque } \alpha < \delta, \end{aligned} \quad (6)$$

c'est à dire que $M(\alpha) = m$ a une solution réelle et unique ($\alpha = \delta$), alors en conformité avec la théorème 1 [4, 5]:

$$E(\alpha_n - \delta)^2 \rightarrow 0 \text{ pour } n \rightarrow \infty,$$

donc α_n converge en probabilité vers δ , une solution de l'équation (4).

En même temps, parce que la moyenne d'échantillon m est une estimation non-biaisée et consistante de la valeur moyenne théorique, on a

THÉORÈME 2. *La suite (5) converge en probabilité pour $n, n^* \rightarrow \infty$ vers la valeur du paramètre inconnu de la densité de probabilité $\rho(\cdot, \alpha)$.*

Pour construire effectivement l'approximation donnée par (5) on choisit: $a_n = \frac{1}{n}$, ainsi la suite $\{a_n\}$ satisfait les conditions demandées:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

Quant à la variable aléatoire $\xi(\alpha_n)$, celle-ci se détermine en utilisant l'échantillon x_1, \dots, x_{n^*} , effectué sur la variable aléatoire $\xi(\alpha)$, comme il suit:

On prend comme valeur initiale α_1 , une valeur voisine de la solution cherchée de l'équation (4), valeur obtenue par certaines indications théoriques ou expérimentales.

Puis on construit avec la relation (5) la suite $\alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_j, \dots$ et on détermine $\xi(\alpha_j)$ par:

$$\xi(\alpha_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_j \leq \alpha_j, \\ 0, & \text{si } x_j > \alpha_j. \end{cases} \quad (7)$$

Notons:

$$P\{\xi(\alpha_j) = 1\} = \left| \int_R x \rho(\alpha_j, x) dx \right| = |M(\alpha_j)|$$

$$P\{\xi(\alpha_j) = 0\} = 1 - |M(\alpha_j)|,$$

il résulte:

$$E\xi(\alpha_j) = |M(\alpha_j)|.$$

C'est à dire que la variable aléatoire $\xi(\alpha_j)$ ainsi déterminée a la valeur moyenne $|M(\alpha_j)|$ et que l'équation correspondante qui peut être résolue par le procédé décrit ci-dessus, utilisant la suite de variables aléatoires déterminée par (7), est:

$$|M(\alpha)| = |m|,$$

donc $M(\alpha) = \pm m$. Par conséquent la suite de variables aléatoires $\{\xi_j\} = \{\xi(\alpha_j)\}$ donnée par (7) peut être utilisée pour résoudre l'équation (4) par la formule (5).

Exemple. Soit la fonction de densité $\rho(x, \lambda) = e^{-\lambda x}$, $x \in [0, \infty)$ de la variable aléatoire pour laquelle on connaît l'échantillon:

0,85387	1,03152	0,43180	0,48149
0,50864	0,01323	0,24033	2,00000
0,22915	0,23657	0,82391	0,20761
0,85385	0,27571	0,92083	0,95761
0,55284	1,15490	0,95861	0,65758.

et que l'on demande à déterminer la valeur du paramètre inconnu λ .

En conformité au procédé indiqué, on considère l'équation:

$$M(\lambda) = m,$$

où

$$m = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = 0,70465,$$

x_i étant les valeurs d'échantillon données ci dessus. On forme la suite d'approximations:

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + a_n [m - \xi_n],$$

où $a_n = \frac{1}{n}$, et $\xi_n = \xi(\lambda_n)$ on détermine comme il suit:

$$\xi(\lambda_n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n \leq \lambda_n \\ 0 & \text{si } x_n > \lambda_n. \end{cases}$$

En prenant pour λ_1 la valeur 1,5 on obtient:

$$\lambda_2 = 1,5 + 1 [0,704 - 1] = 1,204,$$

$$\lambda_3 = 1,204 + \frac{1}{2} [0,704 - 1] = 1,056$$

$$\lambda_4 = 1,056 + \frac{1}{3} [0,704 - 1] = 0,958$$

etc. En utilisant les 20 valeurs d'échantillon données, on obtient $\lambda_{20} = 0,978$. Puisque la valeur exacte du paramètre inconnu est $\lambda = 1$, pour la dernière approximation considérée λ_{20} , l'erreur est 2%.

(Manuscrit reçu le 15 décembre 1969)

BIBLIOGRAPHIE

1. Derman, C., Sachs, J., *On Dvoretzky's stochastic approximation theorem*, „Ann. Math. Stat.”, 30, 1959, 601-606.
2. Drimel, M., Hans, O., *Continuous stochastic approximations*, „Trans. 2 nd Prague Conf. Inf. Theory”, 1960, 113-122.

3. Iosifescu, M., Mihoc, Gh., Theodorescu, R., *Teoria Probabilităților și Statistică matematică*, Ed. Tehnică, București, 1966.
4. Robbins, H., Monro, S., *A stochastic approximation method*, „Ann. Math. Stat.” 22, 1951 400—407.
5. Schmetterer, L., *Stochastic approximation*, „Proc. 4 th Berkeley Sympos. Math. Stat. and Probab.” I, 1961 587—609.

EVALUAREA PARAMETRULUI NECUNOSCUȚ AL DENSITĂȚII DE PROBABILITATE PRIN METODA APROXIMAȚIILOR STOCHASTICE

(R e z u m a t)

Lucrarea prezintă un procedeu pentru evaluarea parametrului necunoscut al unei funcții de densitate, bazat pe metoda aproximațiilor stochastice [4].

Se consideră ecuația

$$M(\alpha) = m,$$

α -parametru necunoscut, $M(\alpha) = E\xi(\alpha)$ — valoarea medie a variabilei aleatoare $\xi(\alpha)$ fiind necunoscută, m -valoarea medie de selecție. Se obține pentru rădăcina acestei ecuații șirul de aproximații

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + a_n [m - \xi(\alpha_n)] \quad (1)$$

unde $\{a_n\}$ este un șir de numere reale ce satisface anumite condiții; șirul (1) converge în probabilitate către rădăcina cea mai apropiată de α_1 a ecuației considerate.

ОЦЕНКА НЕИЗВЕСТНОГО ПАРАМЕТРА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ МЕТОДОМ СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(Р е з ю м е)

Приводится способ оценки неизвестного параметра функции плотности, основанный на методе стохастических приближений [4].

Рассматривается уравнение

$$M(\alpha) = m,$$

α — неизвестный параметр, $M(\alpha) = E\xi(\alpha)$, среднее значение случайной переменной $\xi(\alpha)$ будучи неизвестным, m — среднее значение селекции. Для корня этого уравнения получена последовательность приближений

$$\alpha_{n+1} = \alpha_n + a_n [m - \xi_n(\alpha)]$$

где $\{a_n\}$ — последовательность действительных чисел, удовлетворяющая определенным условиям и сходящаяся в вероятности к наиболее близкому корню от α_1 рассматриваемого уравнения.

O EXTINDERE A UNEI FORMULE DE DERIVARE NUMERICĂ
A LUI V. N. FADEEVA

PARASCHIVA PAVEL

1. Într-o problemă de integrare numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale, V. N. F a d e e v a [3] a folosit formula de derivare numerică

$$\Delta^2 f(x_1) = \frac{h}{2} [f'(x_3) - f'(x_1)] + R \quad (1)$$

Această lucrare a fost luată ca punct de plecare pentru o primă generalizare a formulei (1) de către prof. D. V. I o n e s c u [1] care a stabilit formula de derivare numerică

$$\Delta^{n-1} f(x_1) = A_1 f'(x_1) + A_2 f'(x_2) + \dots + A_n f'(x_n) + R \quad (2)$$

și a dat coeficienții ei prin formula

$$A_k = (-1)^{n+k-1} \frac{h}{2(n-1)} (n-2k+1) C_{n-1}^{k-1}$$

și restul, când $f \in C^{n+1}[x_1, x_n]$ prin formula

$$R = \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+1)}(x) dx. \quad (3)$$

S-a studiat și funcția $\varphi^{(n-2)}(x)$ care intervine în formula (3), dându-se două teoreme:

TEOREMA 1. *Derivata $\varphi^{(n-2)}(x)$ are $n-2$ zerouri în (x_1, x_n) care sînt nodurile x_2, x_3, \dots, x_{n-1} .*

TEOREMA 2. *Funcția $\varphi(x)$ este negativă pe intervalul (x_1, x_n) .*

2. În această lucrare, urmînd exemplul prof. D. V. Ionescu, vom extinde formula (2), adică vom studia formula de derivare numerică

$$\Delta^{n-1}f(x_1) = A_1 f''(x_1) + A_2 f''(x_2) + \dots + A_n f''(x_n) + R \quad (4)$$

în care nodurile x_1, x_2, \dots, x_n sînt în progresie aritmetică cu rația h .

Vom determina și restul acestei formule de derivare numerică presupunînd că $f \in C^{n+3}[x_1, x_n]$

Metoda de lucru este cea dată în lucrarea [1]

Atașăm intervalelor $[x_1, x_2), [x_2, x_3), \dots, [x_{n-1}, x_n)$ funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$ soluții ale ecuațiilor diferențiale

$$\varphi_1^{(n+2)}(x) = 1, \varphi_2^{(n+2)}(x) = -C_{n-2}^1, \dots, \varphi_{n-1}^{(n+2)}(x) = (-1)^n C_{n-2}^{n-2} \quad (5)$$

care satisfac condițiilor la limită

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(r)}(x_1) &= 0, \quad r = 0, 1, \dots, n-1, n+1 \\ \varphi_1^{(r)}(x_k) &= \varphi_{k-1}^{(r)}(x_k) \quad r = 0, 1, \dots, n-1, n+1; \quad k = 2, 3, \dots, n-1 \\ \varphi_{n-1}^{(r)}(x_n) &= 0 \quad r = 0, 1, \dots, n-1, n+1 \end{aligned} \quad (6)$$

În aceste condiții, avem

$$\int_{x_1}^{x_2} \varphi_1^{(n+3)}(x) f(x) dx = 0, \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2^{(n+3)}(x) f(x) dx = 0, \dots, \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_{n-1}^{(n+3)}(x) f(x) dx = 0$$

și aplicînd formula generalizată de integrare prin părți putem scrie

$$\begin{aligned} &[\varphi_2^{(n+2)}(x)f(x) - \varphi_1^{(n+1)}(x)f'(x) + \dots + (-1)^{n+2}\varphi_1(x)f^{(n+2)}(x)]_{x_1}^{x_2} = \\ &= (-1)^n \int_{x_1}^{x_2} \varphi_1(x)f^{(n+3)}(x) dx \\ &[\varphi_2^{(n+2)}(x)f(x) - \varphi_2^{(n+1)}(x)f'(x) + \dots + (-1)^{n+2}\varphi_2(x)f^{(n+2)}(x)]_{x_2}^{x_3} = \\ &= (-1)^n \int_{x_2}^{x_3} \varphi_2(x)f^{(n+3)}(x) dx. \\ &[\varphi_{n-1}^{(n+2)}(x)f(x) - \varphi_{n-1}^{(n+1)}(x)f'(x) + \dots + (-1)^{n+2}\varphi_{n-1}(x)f^{(n+2)}(x)]_{x_{n-1}}^{x_n} = \\ &= (-1)^n \int_{x_{n-1}}^{x_n} \varphi_{n-1}f^{(n+3)}(x) dx. \end{aligned}$$

Adunând membru cu membru aceste relații, și ținând seama de ecuațiile diferențiale (5) și condițiile la limită (6), obținem formula de derivare numerică (4) în care

$$\begin{aligned}
 A_1 &= (-1)^n \varphi_1^{(n)}(x_1) \\
 A_2 &= (-1)^n [\varphi_2^{(n)}(x_2) - \varphi_1^{(n)}(x_1)] \\
 &\dots\dots\dots \\
 A_{n-1} &= (-1)^n [\varphi_{n-1}^{(n)}(x_{n-1}) - \varphi_{n-2}^{(n)}(x_{n-1})] \\
 A_n &= (-1)^{n+1} \varphi_{n-1}^{(n)}(x_n)
 \end{aligned} \tag{7}$$

și

$$R = \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+3)}(x) dx \tag{8}$$

unde funcția $\varphi(x)$ coincide pe intervalele $[x_1, x_2), [x_2, x_3), \dots, (x_{n-1}, x_n]$ cu funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)$.

3. Soluțiile ecuațiilor diferențiale (5) cu condițiile la limită (6) sînt

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \left[(-1)^{i-1} C_{n-1}^{i-1} \frac{(x-x_i)_+^{n+2}}{(n+2)!} + \lambda_i \frac{(x_i-x)_+^n}{n!} \right] \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \tag{9}$$

unde

$$u_+ = \begin{cases} u & \text{dacă } u > 0 \\ 0 & \text{dacă } u \leq 0 \end{cases}$$

iar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ sînt constante.

Scriind că funcția $\varphi_{i-1}(x)$ satisface și condițiile (6) din punctul x_n , și ținînd seama de formulele

$$(n-1)^r - C_{n-1}^r (n-2)^r + \dots + (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} 1 = 0 \quad \text{pentru } r = 1, 2, \dots, n-2$$

$$(n-1)^{n-1} - C_{n-1}^1 (n-2)^{n-1} + \dots + (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} 1^{n-1} = (n-1)!$$

$$(n-1)^n - C_{n-1}^1 (n-2)^n + \dots + (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} 1^n = (n-1)! \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\begin{aligned}
 (n-1)^{n+1} - C_{n-1}^1 (n-2)^{n+1} + \dots + (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} 1^{n+1} &= \tag{10} \\
 = (n-1)! \frac{n(n-1)(n+1)(3n-2)}{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (n-1)^{n+2} - C_{n-1}^1 (n-2)^{n+2} + \dots + (-1)^{n-2} C_{n-1}^{n-2} 1^{n+2} + \\
 = (n-1)! \frac{(n-1)^2 n^2 (n+1)(n+2)}{48}
 \end{aligned}$$

obținem pentru determinarea lui $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$ sistemul de n ecuații liniare

$$\begin{aligned} \lambda_1(n-1) + \lambda_2(n-2) + \dots + \lambda_{n-2} 2 + \lambda_{n-1} 1 &= 0 \\ \lambda_1(n-1)^2 + \lambda_2(n-2)^2 + \dots + \lambda_{n-2} 2^2 + \lambda_{n-1} 1^2 &= 0 \quad (11) \\ \dots & \dots \\ \lambda_1(n-1)^{n-4} + \lambda_2(n-2)^{n-4} + \dots + \lambda_{n-2} 2^{n-4} + \lambda_{n-1} 1^{n-4} &= 0 \\ \lambda_1(n-1)^{n-3} + \lambda_2(n-2)^{n-3} + \dots + \lambda_{n-2} 2^{n-3} + \lambda_{n-1} 1^{n-3} &= -(n-3)! h^2 \\ \lambda_1(n-1)^{n-2} + \lambda_2(n-2)^{n-2} + \dots + \lambda_{n-2} 2^{n-2} + \lambda_{n-1} 1^{n-2} &= -\frac{(n-1)!}{2} h^2 \\ \lambda_1(n-1)^{n-1} + \lambda_2(n-2)^{n-1} + \dots + \lambda_{n-2} 2^{n-1} + \lambda_{n-1} 1^{n-1} &= - \\ &= -\frac{(n-1)!(n-1)(3n-2)}{24} h^2 \\ \lambda_1(n-1)^n + \lambda_2(n-2)^n + \dots + \lambda_{n-2} 2^n + \lambda_{n-1} 1^n &= -\frac{n!n(n-1)^2}{48} h^2 \end{aligned}$$

Sistemul de ecuații (11) este compatibil.

Pentru a demonstra aceasta să considerăm determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ n-1 & n-2 & \dots & 1 & 0 \\ (n-1)^2 & (n-2)^2 & \dots & 1^2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (n-1)^{n-4} & (n-2)^{n-4} & \dots & 1^{n-4} & (n-3)! \\ (n-1)^{n-3} & (n-2)^{n-3} & \dots & 1^{n-3} & \frac{(n-1)!}{2} \\ (n-1)^{n-2} & (n-2)^{n-2} & \dots & 1^{n-2} & \frac{(n-1)!((n-1)(3n-2))}{24} \\ (n-1)^{n-1} & (n-2)^{n-1} & \dots & 1^{n-1} & \frac{n!n(n-1)^2}{48} \end{vmatrix} \quad (12)$$

Să dezvoltăm acest determinant după ultima coloană și să ținem seama de următoarele formule, ce pot fi demonstrate cu ușurință

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^{k-1} & x_2^{k-1} & \dots & x_n^{k-1} \\ x_1^{k+1} & x_2^{k+1} & \dots & x_n^{k+1} \\ x_1^{k+2} & x_2^{k+2} & \dots & x_n^{k+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1^n & x_2^n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = V(x_1, x_2, \dots, x_n) \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_{n-k}} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_{n-k}}$$

unde $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ este determinantul lui Vandermonde, al numerelor x_1, x_2, \dots, x_n . În lucrare am folosit formula (13) în cazul $k = n - 1, n - 2, n - 3$.

Efectuînd calculele, se constată că avem

$$\Delta = 0$$

adică sistemul de ecuații (11) este compatibil.

Cu aceasta este determinată existența formulei de derivare numerică (4).

4. Soluția sistemului de ecuații (11) este

$$\lambda_k = (-1)^k h^2 \left\{ \frac{C_{n-1}^{k-1}}{12} - C_{n-3}^{k-2} \right\} \text{ pentru } k = 1, 2, \dots, n-1 \quad (14)$$

și ținînd seama de formulele (7) și (9) avem

$$A = (-1)^n \lambda_k \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

iar

$$A_n = (-1)^{n+1} (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}) \text{ pentru } n > 3$$

Avem deci

$$A_k = (-1)^{n+k} h^2 \left\{ \frac{C_{n-1}^{k-1}}{12} - C_{n-3}^{k-2} \right\} \quad k = 1, 2, \dots, n-1$$

$$A_n = \frac{h^2}{12} \quad (15)$$

Formula de derivare numerică poate fi scrisă pentru $n > 3$ sub forma

$$\Delta^{n-1} f(x_1) = (-1)^n h^2 \sum_{k=1}^n (-1)^k \left\{ \frac{C_{n-1}^{k-1}}{12} - C_{n-3}^{k-2} \right\} f''(x_k) + R \quad (4')$$

În cazul $n = 3$, formula (4') devine

$$\Delta^2 f(x_1) = \frac{h^2}{12} [f''(x_1) + 10f''(x_2) + f''(x_3)] - \int_{x_1}^{x_3} \varphi(x) f^{(6)}(x) dx$$

pe care a stabilit-o și prof. D. V. Ionescu.

Observație. Între coeficienții A_1, A_2, \dots, A_n ai formulei de derivare numerică (2) există relația

$$A_k = (-1)^{n+1} A_{n-k+1} \quad (16)$$

5. Prin analogie cu teorema 1, dăm următoarea teoremă:

TEOREMA 1'. Derivata $\varphi^{(n-2)}(x)$ a funcției $\varphi(x)$ are în intervalul (x_1, x_n) $n - 2$ zerouri reale, care sînt punctele x_2, x_3, \dots, x_{n-1} .

Derivata $\varphi_j^{(n-2)}(x)$ fiind un polinom de gradul patru în x , s-a dezvoltat după puterile lui $x - x_{j+1}$, constatîndu-se că admite ca factor pe $x - x_{j+1}$ care înmulțește un polinom de gradul trei.

La rîndul său acest polinom de gradul trei admite ca factor pe $x - x_j$. Aceste observații s-au bazat pe calculul unor expresii de forma

$$E_j^k = j^k - C_{n-1}^1(j-1)^k + \dots + (-1)^{j-2} C_{n-1}^{j-2} 2^k + (-1)^{j-1} C_{n-1}^{j-1} 1^k \quad (17)$$

care au fost calculate în cazul de față pentru $k = 0, 1, 2, 3, 4$ (în cazul $k = 1$ fiind deja calculată în lucrarea (1)), adică

$$E_j^0 = (-1)^{j-1} \frac{(n-2)(n-3)\dots(n-j)}{(j-1)!} \quad (18)$$

$$E_j^1 = (-1)^{j-1} \frac{(n-3)(n-4)\dots(n-j-1)}{(j-1)!} \quad (19)$$

$$E_j^2 = (-1)^{j-1} \frac{(n-4)(n-5)\dots(n-j-1)(n-2j-1)}{(j-1)!} \quad j = 2, 3, \dots \quad (20)$$

$$E_j^3 = (-1)^{j-1} \frac{(n-5)(n-6)\dots(n-j-1)}{(j-1)!} [n^2 - (6j+1)n + 6j(j+1)]$$

$$j = 3, 4, \dots; E_2^3 = -(n-9) \quad (21)$$

$$E_j^4 = (-1)^{j-1} \frac{(n-6)(n-7)\dots(n-j-1)(n-2j-1)}{(j-1)!} (n^2 - 3n(4j-1) + 4(3j^2 + 3j - 1))$$

$$j = 4, 5, \dots, E_2^4 = -(n-17); E_3^4 = \frac{-(n-7)(n-28)}{2}$$

precum și pe formula

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k = (-1)^j \frac{(n-4)(n-5)\dots(n-j)}{12(j-1)!} [n^2 - n(12j-7) + 6(2j^2-1)] h^2$$

pentru $j \geq 3$

iar

$$\lambda_1 = -\frac{h^2}{12} \lambda_1 + \lambda_2 = \frac{n-4}{12} h^2$$

Sîntem astfel conduși la formula care ne dă expresia derivatei $\varphi_j^{(n-2)}(x)$

$$\varphi_j^{(n-2)}(x) = (-1)^{j-1} \frac{(n-3)(n-4)\dots(n-j)}{(j-1)!} h^2 \frac{(x-x_j)(x-x_{j+1})}{4!}$$

$$\{ (n-2)(x-x_j)^2 + (n-4j+2)(x-x_j)h + 2(j-1)h^2 \}$$

pentru $j = 2, 3, \dots, n-2, n-1,$

iar în ceea ce privește funcția $\varphi_1^{(n-2)}(x)$ avem

$$\varphi_1^{(n-2)}(x) = \frac{(x - x_1)^2(x - x_2)(x - x_2 + 2h)}{4!} \quad (25)$$

În formula (24) paranteza mare reprezintă un trinom de gradul doi, care nu se anulează pe intervalul $[x_j, x_{j+1}]$. Mai mult, se arată că pe acest interval, el este pozitiv.

TEOREMA 3. *Funcția $\varphi(x)$ are un singur extremum în intervalul (x_1, x_2) .*

Condițiile la limită (6) arată că funcția $\varphi(x)$ este continuă în intervalul $[x_1, x_2]$, împreună cu derivatele sale pînă la ordinul $n - 1$, și că satisface în punctele x_1 și x_n condițiile:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1) = 0, \quad \varphi'(x_1) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-2)}(x_1) = 0 \\ \varphi(x_n) = 0, \quad \varphi'(x_n) = 0, \quad \dots, \quad \varphi^{(n-2)}(x_n) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Presupunînd că derivata $\varphi'(x)$ ar avea două zerouri în intervalul (x_1, x_n) și aplicînd succesiv teorema lui Rolle funcțiilor $\varphi''(x), \dots, \varphi^{(n-2)}(x)$, am ajunge la concluzia că $\varphi^{(n-2)}(x)$ trebuie să aibă cel puțin $n - 1$ zerouri interioare intervalului (x_1, x_n) .

Acest rezultat este în contradicție cu concluzia teoremei 1'.

Înseamnă că funcția $\varphi'(x)$ nu are decît un zero în interiorul intervalului (x_1, x_n) , adică teorema 3' este demonstrată.

TEOREMA 2'. *Funcția $\varphi(x)$ este negativă în intervalul (x_1, x_n) .*

Într-adevăr, deoarece funcția

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_1)^n}{(n + 2)!} \left[(x - x_1)^2 - \frac{(n + 1)(n + 2)}{12} \right] h^2$$

este negativă cînd $x \in (x_1, x_n)$ și pe baza concluziei teoremei 3, rezultă că funcția $\varphi(x)$ este negativă în intervalul (x_1, x_n) .

(Intrat în redacție la 19 octombrie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Ionescu, D. V., *Généralisation d'une formule de dérivation numérique de V. N. Fadeeva*, „Annales Polonici Mathematici” XIV (1964), 169–181.
2. Ionescu, D. V., *Cuadratură numerică*, București, 1957.
3. Fadeeva, V. N., *La méthode des droites appliquées a quelques problèmes aux limites*, Trudî mat. in-ta”, 28 (1949), 73–103.
4. Pavel, P., *O extindere a unei formule de derivare numerică a lui V. N. Fadeeva*, Comunicare prezentată la sesiunea de comunicări a corpului didactic a Univ. „Babeș-Bolyai” Cluj, ședința din 30 mai 1970.
5. Aubert, P., Papelier, G., *Exercices d'algèbre, d'analyse et de trigonométrie, II*, Paris 1920, p. 18, ex. 47, 48.

ОДНО РАСПРОСТРАНЕНИЕ ФОРМУЛЫ ЧИСЛОВОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ
В. Н. ФАДЕЕВОЙ
(Резюме)

Автор статьи обобщает формулу числового дифференцирования (1), данную Д.В. Ионеску [1], изучая с помощью метода „функции φ ” формулу числового дифференцирования

$$\Delta^{n-1}f(x_1) = \sum_{i=1}^n A_i f''(x_i) + R[f] \quad n \geq 3 \quad (4)$$

коэффициенты которой даны формулами (15), а остаток Rf ставится в виде определённого интеграла

$$R = \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+3)}(x) dx \quad (8)$$

причём доказывается, что функция $\varphi(x)$, данная формулами (9), является отрицательной $\varphi(x_1, x_n)$.

EXTENSION D'UNE FORMULE DE DÉRIVATION NUMÉRIQUE DE V. N. FADEEVA
(Résumé)

L'auteur du présent travail généralise la formule de dérivation numérique donnée par le prof. D. V. Ionescu [1] en étudiant à l'aide de la méthode de la „fonction φ ” la formule de la dérivation numérique

$$\Delta^{k-1}f(x_1) = \sum_{j+1}^n A_j f''(x_j) + R[f] \quad n \geq 3 \quad (4)$$

dont les coefficients sont donnés par les formules (15) et où le reste Rf se met sous la forme d'une intégrale définie

$$R = \int_{x_1}^{x_n} \varphi(x) f^{(n+3)}(x) dx \quad (8)$$

en démontrant que la fonction $\varphi(x)$, donnée par les formules (9), est négative en (x_1, x_n) .

SUR LA MÉTHODE DE NEWTON DANS LES ESPACES L-SUPERMÉTRIQUES

B. JANKÓ et S. GROZE

1. Le problème de la résolution des équations opérationnelles $P(x) = \theta$ dans les espaces L -supermétriques utilisant la méthode généralisée de Newton a été étudiée par L. Collatz [1] dans l'hypothèse de l'existence de l'inverse de la dérivée de Fréchet $[P'(x)]^{-1}$, celle-ci étant uniformément bornée, dans le sens de la norme généralisée, pour chaque élément x appartenant à un certain domaine S . Dans le travail [2] cette condition n'a pas été imposée pour chaque élément, mais seulement pour un élément x_0 , qui est une approximation initiale de la solution de l'équation donnée.

Dans le présent travail on généralise l'étude de l'équation opérationnelle $P(x) = \theta$, en admettant seulement l'existence de l'opérateur $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, mais, on ne suppose plus que la norme généralisée de Γ_0 soit bornée.

2. Soit les espaces linéaires L -supermétriques complets X et Y . On considère l'équation opérationnelle

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

θ -étant l'élément nul de l'espace Y , et $P(x)$ un opérateur non-linéaire défini sur un certain domaine $S \subset X$, avec des valeurs dans Y .

En supposant qu'il existe l'inverse de $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, x_0 étant une approximation initiale de la solution de l'équation (1), son étude sera transposée dans ce qui suit, à l'équation

$$\tilde{P}(x) \equiv \Gamma_0 P(x) = \tilde{\theta} \tag{1'}$$

où $\tilde{\theta}$ est l'élément nul de l'espace X . On remarque que l'équation (1') est équivalente à l'équation (1).

Pour l'équation (1') on a l'algorithme suivant :

$$\tilde{x}_{n+1} = \tilde{x}_n - [\tilde{P}'(\tilde{x}_n)]^{-1} \tilde{P}(\tilde{x}_n). \tag{2}$$

Nous faisons la remarque que si on part de l'approximation initiale $\bar{x}_0 = x_0$, alors la suite $\{\bar{x}_n\}$ obtenue par (2) coïncide avec la suite $\{x_n\}$ donnée par l'algorithme

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1}P(x_n) \quad (3)$$

ce qui sera prouvé en utilisant l'induction. Si $\bar{x}_0 = x_0$ on a

$$\bar{x}_1 = x_0 - I\Gamma_0 P(x_0) = x_0 - \Gamma_0 P(x_0) = x_1$$

En supposant $\bar{x}_n = x_n$, on montre que $\bar{x}_{n+1} = x_{n+1}$. En effet

$$\begin{aligned} \bar{x}_{n+1} &= x_n - \tilde{\Gamma}_n \tilde{P}(x_n) = x_n - [\Gamma_0 P'(x_n)]^{-1} \Gamma_0 P(x_n) = \\ &= x_n - [P'(x_n)]^{-1} \Gamma_0^{-1} \Gamma_0 P(x_n) = x_n - \Gamma_n P(x_n) = x_{n+1}. \end{aligned}$$

On démontre alors la

THÉOREME 1. Si les conditions suivantes ont lieu :

1° Pour l'approximation initiale x_0 , $P'(x_0)$ admet l'inverse Γ_0

2° Pour l'élément x_0 on a la délimitation $\rho_X(\Gamma_0 P(x_0)) \leq \eta_0$

3° La seconde dérivée de Fréchet $P''(x)$ existe et on a

$$\rho_{X^2, X}(\Gamma_0 P''(x)) \leq k$$

quel que soit $x \in S$, où S est défini par $\rho_X(x - x_0) \leq 2\eta_0$

4° Les constantes η_0 , k satisfont à la relation

$$\bar{h}_0 = \eta_0 k \leq \frac{1}{2},$$

alors l'équation (1) admet au moins une solution $x^* \in S$, et la suite d'approximations successives $\{x_n\}$, construites par l'algorithme (3), tend vers x^* , l'erreur ou respectivement la rapidité de la convergence étant données par la délimitation

$$\rho_X(x^* - x_n) \leq 2^{1-n} (2\bar{h}_0)^{2^n - 1} \eta_0.$$

Démonstration. Pour la démonstration du théorème énoncé, on utilise le résultat suivant [2] :

Si les conditions suivantes sont satisfaites, à savoir :

1. s'il existe $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ et $\rho_{Y, X}(\Gamma_0) \leq B_0$

2. $\rho_X(\Gamma_0 P(x_0)) \leq \eta_0$

3. $\rho_{X^2, Y}(P''(x)) \leq k$ pour $x \in S$

4. $\bar{h}_0 \equiv B_0 \eta_0 k \leq \frac{1}{2}$

alors l'équation (1) admet au moins une solution $x^* \in S$ et on a la délimitation

$$\rho_X(x^* - x_n) \leq 2^{1-n} (2\bar{h}_0)^{2^n - 1} \eta_0.$$

On montre que si les conditions 1°—4° de ci-dessus sont satisfaites pour l'équation $\tilde{P}(x) = \tilde{\theta}$, alors sont aussi satisfaites les conditions 1—4 du théorème énoncé pour l'équation (1).

Ainsi on a

1. $\tilde{\Gamma}_0 \equiv [\tilde{P}'(x_0)]^{-1} = [\Gamma_0 P'(x_0)]^{-1} = I$, donc Γ_0 existe et on a $\rho_{Y, X}(\tilde{\Gamma}_0) = 1$, avec $B_0 = 1$.
2. $\rho_X(\tilde{\Gamma}_0 \tilde{P}(x_0)) = \rho_X(\Gamma_0 P(x_0)) \leq \eta_0$
3. $\rho_{X^2, Y}(\tilde{P}''(x)) = \rho_{X^2, Y}(\Gamma_0 P''(x)) \leq k$
4. $\tilde{h}_0 \equiv 1 \cdot \eta_0 k \leq \frac{1}{2}$

De cette manière il résulte que l'équation $\tilde{P}(x) = \tilde{\theta}$ a une solution $x^* \in S$, vers laquelle converge la suite d'approximations successives $\{x_n\}$. De l'égalité $P(x^*) \equiv \Gamma_0 \tilde{P}(x^*) = \tilde{\theta}$ résulte $P(x^*) = \theta$, ce qui était à démontrer.

Remarques. a) Dans les conditions du théorème démontré n'intervient pas séparément la délimitation de $\rho_{Y, X}(\Gamma_0)$, ni l'évaluation de $\rho_{X^2, Y}(P''(x))$. Une délimitation est suffisante pour le produit de ces deux opérateurs $\rho_{X^2, X}(\Gamma_0 P''(x))$.

b) Soit $\rho_{Y, X}(\Gamma_0) \leq B_0$, $\rho_{X^2, Y}(P''(x)) \leq k$; en tenant compte de la délimitation

$$\rho_{X^2, X}(\Gamma_0 P''(x)) \leq \rho_{Y, X}(\Gamma_0) \cdot \rho_{X^2, Y}(P''(x)) = B_0 k$$

il résulte que, en général, on a $\tilde{h} \leq B_0 k$ et donc $\tilde{h} \leq h_0$. De cette manière on voit que le théorème démontré constitue un affaiblissement des conditions du théorème démontré dans [2].

THÉOREME 2. *Si les conditions suivantes sont accomplies*

1. Il existe l'opérateur $\Gamma(x)[P'(x)]^{-1}$ pour chaque $x \in S(x_0, r)$ où x_0 est une approximation initiale et $r = s\eta_0$, $s = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\tilde{h}_0}{2}\right)^{2^i-1}$
2. $\rho_X(\Gamma_0 P(x_0)) \leq \eta_0$
3. $\rho_{X^2, X}(\Gamma P''(x)) \leq M$
4. $\tilde{h} = M\eta_0 < 2$

alors l'équation (1) a au moins une solution $x^* \in S$, ou $x^* = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, et la rapidité de la convergence est caractérisée par

$$\rho_X(x^* - x_n) \leq s\eta_0 \left(\frac{\tilde{h}_0}{2}\right)^{2^n-1}$$

Démonstration. De (3) on déduit

$$P'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = -P(x_{n-1})$$

et alors on a

$$P(x_n) = P(x_n) - P(x_{n-1}) - P'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})$$

ou

$$\Gamma_n(Px_n) = \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n P(x_{n-1}) - \Gamma_n P'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}). \quad (4)$$

En tenant compte de la formule généralisée de Taylor [1], de (4) on déduit

$$\begin{aligned} \rho_X(\Gamma_n P(x_n)) &= \rho_X(\Gamma_n P(x_n)) - \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n P'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) \leq \\ &\leq \frac{1}{2} M \rho_X^2(x_n - x_{n-1}). \end{aligned} \quad (5)$$

Et, à cause de l'algorithme (3), (5) devient

$$\rho_X(x_{n+1} - x_n) \leq \frac{M}{2} \rho_X^2(x_n - x_{n-1}). \quad (6)$$

Puisque

$$\rho_X(x_1 - x_0) = \rho_X(\Gamma_0 P(x_0)) \leq \eta_0,$$

la relation (6) devient

$$\rho_X(x_{n+1} - x_n) \leq \left(\frac{M}{2}\right)^{2n-1} \eta_0^{2^n} \quad (7)$$

et parce que $M \cdot \eta_0 = \bar{h}_0$ on arrive à

$$\rho_X(x_{n+1} - x_n) \leq \eta_0 \left(\frac{\bar{h}_0}{2}\right)^{2^n - 1}, \quad (7')$$

D'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \rho_X(x_0 - x_{n+1}) &\leq \rho_X(x_0 - x_1) + \rho_X(x_1 - x_0) + \dots + \rho_X(x_n - x_{n-1}) \leq \\ &\leq \eta_0 \sum_{i=0}^n \left(\frac{\bar{h}_0}{2}\right)^{2^i - 1} \leq \eta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{h}_0}{2}\right)^{2^i - 1} = s\eta_0 \end{aligned}$$

fait qui prouve que $x_{n+1} \in S$.

On aura aussi

$$\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leq s\eta_0 \left(\frac{\bar{h}_0}{2}\right)^{2^n - 1} \quad (8)$$

et comme $\bar{h}_0 < 2$, il résulte que la suite $\{x_n\}$ est fondamentale, donc elle tend vers une limite $x^* \in S$.

Dans (8), en faisant $p \rightarrow \infty$, on obtient la relation de l'énoncé du théorème qui caractérise la rapidité de la convergence.

BIBLIOGRAPHIE

1. Collatz, I., *Funktionalanalysis und numerische mathematik*, Springer-Verlag, Berlin 1964.
2. Groze, S., Janko, B., *Asupra rezolvării ecuațiilor operaționale neliniare definite în spații L-supermetrice*, „Studia Univ. Babeș-Bolyai, ser. Math.-Mech.”, fasc. 1, 1971, 81–85.

ASUPRA METODEI LUI NEWTON ÎN SPAȚII L-SUPERMETRICE

(R e z u m a t)

În lucrare se studiază problema rezolvării ecuațiilor operaționale

$$P(x) = 0$$

în spațiile L-supermetrice folosind metoda generalizată a lui Newton. Spre deosebire de studiul similar făcut în [1] și [2], în lucrare se evită mărghinirea în sensul normei generalizate, a operatorului $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, presupunind numai existența lui Γ_0 .

О МЕТОДЕ НЬЮТОНА В L-СВЕРХМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Р е з ю м е)

В работе изучается вопрос решения операторных уравнений

$$P(x) = 0$$

в L-сверхметрических пространствах, применяя обобщённый метод Ньютона. В отличие от подобного исследования, проведённого в [1] и [2], авторы статьи избегают ограничения в смысле обобщённой нормы оператора $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, предполагая лишь наличие Γ_0 .

ASUPRA UNOR FORMULE PRACTICE DE CUADRATURĂ

GH. COMAN

Se consideră formula de cuadratură

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = A_0[f(x_0) + f(x_m)] + \dots + A_p[f(x)_p + f(x_{m-p})] +$$

$$+ h[f(x_{p+1}) + \dots + f(x_{m-p-1})] + R[f], \quad (1)$$

unde A_0, \dots, A_p , $0 \leq p \leq \left\lfloor \frac{m-1}{2} \right\rfloor$ sînt parametri arbitrari, iar nodurile sînt în progresie aritmetică cu rația h , adică $x_k = x_0 + kh$, ($k = 0, 1, \dots, m$).

Se pune problema determinării parametrilor A_k , ($k = 0, 1, \dots, p$) astfel încît formula (1) să aibă un grad de exactitate dat, iar în cazul în care din condițiile impuse de gradul de exactitate nu pot fi determinați toți parametrii, să fie satisfăcute condiții suplimentare legate de o evaluare cît mai convenabilă a restului.

Această problemă a fost studiată în anumite cazuri de Durand [8], Lacroix [8], G. Coulmy [2] și D. V. Ionescu [4], [5], [6].

În această lucrare se tratează problema pusă în cazul în care formula de cuadratură are gradul de exactitate 1 și p este oarecare. Condițiile suplimentare puse parametrilor A_k , ($k = 0, 1, \dots, p$), vor fi astfel alese încît restul să ia valoarea minimă. Mai precis, dacă se presupune că f aparține clasei $W_{L_1}^{(2)}(M)$ a funcțiilor a căror derivată este absolut continuă pe intervalul $[x_0, x_m]$ iar derivata a doua, f'' satisface condiția $\|f''\|_{L_1} \leq M$ și dacă se notează cu

$$E_m(W_{L_1}^{(2)}(M); A_k) = \sup_{f \in W_{L_1}^{(2)}(M)} |R_m^-[f]|, \quad [(1)'$$

atunci condițiile suplimentare puse parametrilor A_k sînt astfel alese încît $E_m(W_{L_1}^{(2)}(M); A_k)$ să ia valoarea minimă. În cele ce urmează vom nota

această valoare minimă prin $E_m(W_{L_1}^{(2)}(M))$. Formula de cuadratură cu coeficienții A_k , ($k = 0, 1, \dots, p$) astfel determinați, o vom numi *formulă practică de cuadratură, optimală* pentru clasa de funcții $W_{L_1}^{(2)}(M)$.

THEOREMA 1. *Formula de cuadratură de tipul (1), avînd gradul de exactitate egal cu 1, optimală pentru clasa de funcții $W_{L_1}^{(2)}(M)$ este*

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \frac{5h}{12} [f(x_0) + f(x_m)] + \frac{13h}{12} [f(x_1) + f(x_{m-1})] + \\ + h[f(x_2) + \dots + f(x_{m-2})] + R_m[f], \quad (2)$$

iar

$$E_m(W_{L_1}^{(2)}(M)) = M \sqrt{\left(\frac{1}{216} + \frac{m}{720}\right) h^5},$$

oricare ar fi $p > 0$. Pentru $p = 0$ formula optimală este formula trapezelor.

Demonstrație. Printr-un procedeu analog celui folosit în [1], se obține

$$R[f] = \int_{x_0}^m \varphi(x) f''(x) dx, \quad (3)$$

unde funcția φ este dată pe fiecare din intervalele $[x_{k-1}, x_k]$, ($k = 1, 2, \dots, m$) respectiv prin polinoamele

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} - A_0(x - x_0)$$

.....

$$\varphi_{p+1}(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} - A_0(x - x_0) - \dots - A_p(x - x_p)$$

$$\varphi_{p+2}(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} - A_0(x - x_0) - \dots - A_p(x - x_p) - h(x - x_{p+1})$$

.....

$$\varphi_{m-p-1}(x) = \frac{(x - x_m)^2}{2} + A_0(x - x_m) + \dots + A_p(x - x_{m-p}) + h(x - x_{m-p-1})$$

$$\varphi_{m-p}(x) = \frac{(x - x_m)^2}{2} + A_0(x - x_m) + \dots + A_p(x - x_{m-p})$$

.....

$$\varphi_m(x) = \frac{(x - x_m)^2}{2} + A_0(x - x_m).$$

Din (3), aplicînd inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski, se obține

$$E_m(W_{L_2}^{(2)}(M); A_k) \leq M \left\{ \int_{x_1}^{x_m} \varphi^2(x) dx \right\}^{1/2}. \quad (4)$$

Pentru funcția $f_0(x) = M \int_{x_0}^x (x-t)\varphi(t)dt \left\{ \int_{x_0}^{x_m} \varphi^2(t)dt \right\}^{-1/2}$ inegalitatea (4) de-

vine o egalitate. Cum $f_0 \in W_{L_2}^{(2)}(M)$, rezultă că

$$E_m(W_{L_2}^{(2)}(M); A_k) = M \left\{ \int_{x_0}^{x_m} \varphi^2(x) dx \right\}^{1/2}. \quad (5)$$

Demonstrația teoremei s-a redus, în felul acesta, la determinarea parametrilor A_k , ($k = 0, 1, \dots, p$) astfel încît formula (1) să aibă gradul de exactitate 1 și integrala

$$J = \sum_{k=1}^m I_k, \text{ unde } I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k^2(x) dx$$

să ia valoarea minimă.

Avem, din condiția ca gradul de exactitate al formulei să fie 1,

$$\sum_{k=0}^p A_k = \frac{2p+1}{2} h. \quad (6)$$

Pentru determinarea parametrilor A_k , ($k = 0, 1, \dots, p$) mai sînt necesare pe lîngă ecuația (6), p ecuații. Aceste ecuații se obțin din condiția ca integralele I_k să ia pe intervalele corespunzătoare $[x_{k-1}, x_k]$, ($k = 2, 3, \dots, p+1$) valoarea minimă. Aceasta se întîmplă în cazul unic în care polinomul $\varphi_k(x)$ coincide pe intervalul $[x_{k-1}, x_k]$, ($k = 2, 3, \dots,$

$p+1$) respectiv cu polinomul lui Legendre $L_{2,k}(x) = \frac{x^2}{2} - a_k x - \left(\frac{h^2}{6} - \frac{a_k^2}{2} \right)$,

unde $a_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$, despre care se știe că se abate în medie pătratică cel mai puțin de la zero pe acest interval. Identificînd polinomul $\varphi_k(x)$ cu polinomul corespunzător $L_{2,k}(x)$ se obține

$$\sum_{i=0}^{k-1} A_i = \frac{2k-1}{2} h, \sum_{i=1}^{k-1} iA_i = \frac{6k(k-1)+1}{12} h, \quad (k = 2, 3, \dots, p+1). \quad (7)$$

Rezolvînd sistemul format de ecuațiile (7), printre care se află și ecuația (6), se obține $A_0 = \frac{5h}{12}$, $A_1 = \frac{13h}{12}$, $A_2 = \dots = A_p = h$. Introducînd aceste valori ale parametrilor A în (5) și efectuînd calculele se obține

$$E_m(W_{L_1}^{(2)}(M)) = M \sqrt{\left(\frac{1}{216} + \frac{m}{720}\right) h^5},$$

teorema fiind demonstrată.

În mod analog poate fi tratat și cazul în care extremitățile intervalului $[x_0, x_m]$ nu sînt luate ca noduri, adică formulele de forma

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = A_1[f(x_1) + f(x_{m-1})] + \dots + A_p[f(x_p) + f(x_{m-p})] + \\ + h[f(x_{p+1}) + \dots + f(x_{m-p-1})] + R[f]. \quad (8)$$

Are loc următoarea teoremă:

THEOREMA 2. *Formula de cuadratură de tipul (8), avînd gradul de exactitate egal cu 1, optimală pentru clasa de funcții $W_{L_2}^{(2)}(M)$ este*

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \frac{23h}{12} [f(x_1) + f(x_{m-1})] + \frac{7h}{12} [f(x_2) + f(x_{m-2})] + \\ + h[f(x_3) + \dots + f(x_{m-3})] + R_m[f] \quad (9)$$

și

$$E_m(W_{L_2}^{(2)}(M)) = M \sqrt{\left(\frac{83}{540} + \frac{m}{720}\right) h^5},$$

pentru $p < 1$ și

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \frac{3h}{2} [f(x_1) + f(x_{m-1})] + h[f(x_2) + \dots + f(x_{m-2})] + R[f],$$

iar

$$E_m(W_{L_1}^{(2)}(M)) = M \sqrt{\frac{7m-10}{40} h^5},$$

pentru $p = 1$.

Observație. Formulele (2) și (9) au fost obținute, pe altă cale, de Durand [8], respectiv D. V. Ionescu [5]. Teoremele 1 și 2 dau o caracterizare a acestor formule ele fiind optimale în clasa considerată.

BIBLIOGRAFIE

1. Coman, G. h., *Formule practice de cuadratură, optimale pentru o clasă de funcții*, „Studia Univ. Babeș-Bolyai Ser. Math.-Mech.”, fasc. 1, 1971, 73—79.
2. Coulmy, G., *Opérations sur les courbes expérimentales*, „C.R. de Séances de l'Ac. des Sciences”, Paris, 246, 1958, 1799—1800.
3. Ionescu, D. V., *Cuadraturi numerice*, București, 1957.
4. Ionescu, D. V., *Cîteva formule practice de cuadratură*, „Comunicările Acad. R.S.R.”, 13, 8, 1963, 689—695.
5. Ionescu, D. V., *Construirea [unor formule practice de cuadratură]*, „Studii și Cerc. Matem.”, 15, 6, 1964, 757—769.
6. Ionescu, D. V., *Nouvelles formules pratiques de quadrature*, „C.R. Acad. Sci.” Paris, 259, 1964, 504—507.
7. Ionescu, D. V., Coțiu, A., *Une extension de la formule de quadrature de Lacroix*, „Mathematica”, 9(32), f. 1, 1967, 49—52.
8. Mineur, H., *Techniques de calcul numérique*, „Librairie Polytechnique Ch. Béranger”, Paris, 1952, pp. 244.
9. Nikolski, S. M., *Kvadrurniye formulı*, Moskva, 1958.

О НЕКОТОРЫХ ПРАКТИЧЕСКИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

(Резюме)

В работе ставится вопрос определения формул вида (1), соответственно (8), являющихся оптимальными в классе функций $W_{L_1}^{(2)}(M)$.

Доказывается, что в первом случае оптимальной квадратурной формулой является формула (2), совпадающая с формулой Дюрана [8], а во втором случае — формула (9), совпадающая с одной формулой, данной проф. Д. В. Ионеску [5].

ON SOME PRACTICAL QUADRATURE FORMULAE

(Summary)

The problem of establishing the formulae of type (1) respectively (8) optimal in the class of $V_{L_1}^{(2)}(M)$ functions is raised in the paper.

It is demonstrated that in the first case the optimal quadrature formula is formula (2), coinciding with Durand's formula [8], and formula (9), coinciding with a formula given by Prof. D. V. Ionescu [5] in the second case.

ASUPRA UNOR RELAȚII CONVOLUTIVE

GRIGOR MOLDOVAN

Studiul unor relații convolutive a prezentat și prezintă interes atât în sine cât și pentru alte capitole ale matematicii, cum este de exemplu calculul probabilităților, teoria aproximației [5], [6], [11] etc.

În această notă ne vom referi la așa numitele convoluții binome [7] și vom stabili anumite relații utile în teoria aproximării funcțiilor prin operatori liniari pozitivi.

Se știe [5], [8] că formula binomului și formula lui Vandermonde sînt cazuri particulare ale relației convolutive

$$P_n(u+v) = \sum_{k=0}^n P_k(u) P_{n-k}(v), \quad (1)$$

pentru

$$P_k(x) = \frac{x^k}{k!} \quad \text{și} \quad P_k(x) = \binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}. \quad (2)$$

Altfel spus, polinoamele (2) sînt soluții ale ecuației funcționale (1).

În această lucrare ne vom ocupa de stabilirea unor identități în care intervin expresii de forma

$$\sum_{k=0}^n k^i P_k(u) P_{n-k}(v), \quad i = 0, 1, 2, \quad (3)$$

unde $P_m(x)$ sînt polinoame de grad m . Identitățile pe care le vom stabili servesc la demonstrarea convergenței șirurilor de operatori convolutivi pozitivi definiți în [7].

§ 1. Identități ce se obțin din formula binomului. Formula binomului

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k} = (u+v)^n \quad (4)$$

după cum se știe din teoria aproximației, conduce la definirea polinoamelor lui Bernstein.

Este adevărată următoarea :

TEOREMA 1. *Oricare ar fi numerele reale u și v avem*

$$\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} u^k v^{n-k} = nu(u+v)^{n-1} \quad (5)$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} u^k v^{n-k} = nu(nu+v)(u+v)^{n-2}. \quad (6)$$

Demonstrația acestei teoreme este foarte simplă, de altfel cunoscută (a se vedea de exemplu [6]).

§ 2. Identități ce se obțin din formula lui Vandermonde. Vom stabili acum relații analoge cu (5) și (6) folosind formula lui Vandermonde

$$\sum_{k=0}^n \binom{u}{k} \binom{v}{n-k} = \binom{u+v}{n}. \quad (7)$$

Avem

TEOREMA 2. *Oricare ar fi numerele reale u și v sînt adevărate următoarele două identități*

$$\sum_{k=0}^n k \binom{u}{k} \binom{v}{n-k} = u \binom{u+v-1}{n-1} \quad (8)$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{u}{k} \binom{v}{n-k} = u(u-1) \binom{u+v-2}{n-2} + u \binom{u+v-1}{n-1} \quad (9)$$

Demonstrație. Pentru demonstrarea acestor identități observăm înti-că

$$k \binom{u}{k} = u \binom{u-1}{k-1}$$

și deci putem scrie

$$\sum_{k=0}^n k \binom{u}{k} \binom{v}{n-k} = u \sum_{k=1}^n \binom{u-1}{k-1} \binom{v}{n-1-(k-1)} = u \sum_{k=0}^{n-1} \binom{u-1}{k} \binom{v}{n-1-k}$$

de unde, folosindu-ne de formula lui Vandermonde (7), rezultă identitatea (8).

Să ne ocupăm acum de identitatea (9). Avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{u}{k} \binom{v}{n-k} &= \sum_{k=1}^n k^2 \binom{u}{k} \binom{v}{n-k} = \sum_{k=1}^n [k(k-1) + k] \binom{u}{k} \binom{v}{n-k} = \\ &= u(u-1) \sum_{k=2}^n \binom{u-2}{k-2} \binom{v}{n-2-(k-2)} + u \binom{u+v-1}{n-1}, \end{aligned}$$

de unde rezultă identitatea (9). Identitățile (8) și (9) sînt cunoscute [10], dar demonstrate pe o altă cale. Aici s-a dat o demonstrație directă.

§ 3. Generalizări ale identităților de tip Vandermonde. 1. În acest paragraf ne vom ocupa întîi de identități în legătură cu relația convolutivă

$$\sum_{k=0}^n \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k} \binom{v-yk}{n-k} = \binom{u+v}{n}, \quad (10)$$

unde u, v, y sînt numere reale oarecare. Această relație convolutivă a fost mult studiată de Gould [3], Carlitz [1], etc.

Vom avea nevoie în cele ce urmează de identitatea lui Jensen [4]:

$$\sum_{k=0}^n \binom{u+ky}{k} \binom{v-ky}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{u+v-k}{n-k} y^k, \quad (11)$$

care de asemenea este verificată pentru orice $u, v, y \in \mathbf{R}$.

Să notăm cu

$$S(a, b, m) = \sum_{k=0}^m k \binom{a-ky}{m-k} \binom{b+yk}{k}, \quad (12)$$

iar cu $A(v, u, n)$ membrul stîng al identității (11).

Atunci avem

LEMA. *Oricare ar fi $a, b, y \in \mathbf{R}$ are loc relația*

$$S(a, b, m) = \sum_{k=1}^m k \left[b + 1 + (y-1) \frac{k+1}{2} \right] \binom{a+b-k}{m-k} y^{k-1}. \quad (13)$$

Demonstrație. Putem scrie

$$\begin{aligned} S(a, b, m) &= \sum_{k=1}^m (b+yk) \binom{a-yk}{m-k} \binom{b-1+yk}{k-1} = \\ &= b \sum_{k=0}^{m-1} \binom{a-y-yk}{m-1-k} \binom{b+y-1+yk}{k} + y \sum_{k=0}^{m-1} (k+1) \binom{a-y-yk}{m-1-k} \binom{b+y-1+yk}{k} \end{aligned}$$

și deci avem următoarea relație de recurență

$$S(a, b, m) = (b+y) A(a-y, b+y-1, m-1) + y S(a-y, b+y-1, m-1).$$

Din această relație de recurență obținem

$$\begin{aligned} S(a, b, m) &= \sum_{k=0}^{m-1} y^k [b + (k+1)y - k] A(a - (k+1)y, b + (k+1)y - (k+1), m - (k+1)) = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=0}^{m-k} (b + yk - (k-1)) \binom{a+b-k-l}{m-k-l} y^{k+l-1}, \end{aligned}$$

iar de aici printr-un calcul simplu rezultă relația (13).

Folosind această leamnă vom putea demonstra următoarea :

TEOREMA 3. *Oricare ar fi $u, v, y \in \mathbf{R}$ au loc relațiile*

$$\sum_{k=0}^n k \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k} \binom{v-yk}{n-k} = u \sum_{k=1}^n \binom{u+v-k}{n-k} y^{k-1}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n k^2 \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k} \binom{v-yk}{n-k} = \\ & = u \sum_{k=1}^n \left[\frac{k(n-k)}{u+v-k} \left(u+2y-1 + \frac{(k-1)(y-1)}{2} \right) + 1 \right] \binom{u+v-k}{n-k} y^{k-1}. \end{aligned} \quad (16)$$

Demonstrație. Avem

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k} \binom{v-yk}{n-k} &= u \sum_{k=1}^n \binom{u+yk-1}{k-1} \binom{v-yk}{n-1-(k-1)} = \\ &= u \sum_{k=0}^{n-1} \binom{u+v-1-k}{n-1-k} y^k \end{aligned}$$

de unde, punând în loc de k pe $k-1$, obținem relația (15).

Apoi,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k^2 \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k} \binom{v-yk}{n-k} &= \sum_{k=0}^n [k(k-1) + k] \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k} \binom{v-yk}{n-k} = \\ &= u(u+2y-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{u+2y-2+yk}{k} \binom{v-2y-yk}{n-2-k} + \\ &+ uy \sum_{k=0}^{n-2} k \binom{u+2y-2+yk}{k} \binom{v-2y-yk}{n-2-k} + \sum_{k=0}^n k \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k} \binom{v-yk}{n-k}. \end{aligned}$$

Folosind identitatea lui Jensen (11), lema de mai sus și relația (15), obținem identitatea (16). Cu aceasta teorema este demonstrată.

2. Menționăm acum și următoarea relație convolutivă

$$\sum_{k=0}^n \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k} \binom{v-yn}{v-yk} \binom{v-yk}{n-k} = \frac{u+v-yn}{u+v} \binom{u+v}{n}. \quad (17)$$

Procedând analog cu cele de mai sus, avem :

TEOREMA 4. *Oricare ar fi $u, v, y \in \mathbf{R}$ avem*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n k \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k} \binom{v-yn}{v-yk} \binom{v-yk}{n-k} = \\ & = u \sum_{k=1}^{n-2} \left(\frac{u+v-1-k}{n-1-k} - y \right) \binom{u+v-2-k}{n-2-k} y^k + uy^{n-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\sum_{k=0}^n k^2 \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k} \frac{v-yn}{v-yk} \binom{v-yk}{n-k} = u \sum_{k=1}^{n-1} \left[k(u+2y-1 + \frac{(k-1)(y-1)}{2}) + \frac{u+v-k}{n-k} - y \left(\frac{k(n-1-k)}{u+v-1-k} (u+2y-1 + \frac{(k-1)(y-1)}{2}) + 1 \right) \right] \cdot \left(\frac{u+v-1-k}{n-1-k} \right) y^{k-1} + uy^{n-1}. \quad (19)$$

Observații. 1. Identitățile (10), (17) rezultă din relațiile convolutive

$$P_n(u+v; y) = \sum_{k=0}^n P_k(u; y) P_{n-k}(v; y) \quad (20)$$

$$Q_n(u+v; y) = \sum_{k=0}^n P_k(u; y) P_{n-k}(v; y) \quad (21)$$

unde

$$Q_k(u; y) = \frac{u+yk}{u} P_k(u; y),$$

pentru

$$P_k(u; y) = \frac{u}{u+yk} \binom{u+yk}{k}. \quad (22)$$

2. Dacă $y=0$ atunci relațiile convolutive (20), (21) se reduc la relația (1), iar relațiile (15), (16) respectiv (18), (19) se reduc la relațiile (8), (9).
3. Avem următoarea relație

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (-\alpha)^k \binom{-\frac{u}{\alpha}}{k} = \frac{u^k}{k!}. \quad (23)$$

Dacă în identitățile (8), (9) înlocuim pe u cu $-\frac{u}{\alpha}$ și pe v cu $-\frac{v}{\alpha}$, acestea, folosindu-ne de relația (23), se reduc la identitățile (5) și (6). Tot așa identitățile (15), (16) și (18), (19), dacă facem aceleași înlocuiri la care mai adăugăm înlocuirea lui y cu $-\frac{y}{\alpha}$, conduc la alte relații analoge, care au fost stabilite de E.W. Cheney și A. Sharma [2].

(Intrat în redacție la 7 decembrie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Carlitz, L., *Some formulas of Jensen and Gould*, „Duke Math. J.” 27 (1960), 319–321.
2. Cheney, E. W. Sharma, A., *On a generalization of Bernstein polynomials*, „Rev. Math. Univ. Parma”, ser. 2, 5 (1964), 77–84.
3. Gould, H. W., *Some generalizations of Vandermonde's convolution*, „Amer. Math. Monthly”, 63 (1956), 84–91.

4. Jensen, J. L. W. V., *Sur une identité d'Abel et sur d'autres formules analogues*, „Acta Math.”, **26** (1902), 307–318.
5. Lagrange, R., *Mémoire sur des suites de polynomes*, „Acta Math.”, **51** (1928), 201–309.
6. Lorentz, G. G., *Bernstein Polynomials*, Toronto, 1953.
7. Moldovan, Gr., *Discret convolutions and linears positive operators, I*, (sub tipar).
8. Popoviciu, T., *Asupra unor polinoame remarcabile cu o notă asupra formulei binomului*, Arad, 1927.
9. Popoviciu, T., *Rermarkes sur les polynomes binomiaux*, „Mathematica” **6** (1932), 8–10.
10. Stancu, D. D., *Approximation of functions by a new class of linear polynomials operators*, „Rev. Roum. Math. Pures et App.”, **13** (1968), **8**, 1173–1194.
11. Stancu, D. D., *Use of probabilistic methods in the theory of uniform approximation of continuous functions*, „Rev. Roum. Math. Pures et App.”, **14** (1969), **5**, 673–691.

О КОНВОЛЮТИВНЫХ СООТНОШЕНИЯХ

(Резюме)

Доказаны тождества (8), (9), происходящие из формулы Вандермонда и тождества (13), (15), (16), (18) и (19), происходящие из некоторых обобщений формулы Вандермонда. Все тождества, установленные в данной работе, применяются для доказательства некоторых теорем сходимости последовательностей конволютивных операторов.

SUR CERTAINES RELATIONS CONVOLUTIVES

(Résumé)

L'auteur démontre les identités (8), (9) provenant de la formule de Vandermonde, et les identités (13), (15), (16), (18) et (19) provenant de généralisations de la formule de Vandermonde. Toutes les identités qui sont établies dans le présent travail servent à la démonstration de théorèmes de convergence de suites d'opérateurs convolutifs.

UN CALCUL APROXIMATIV AL STRATULUI LIMITĂ
HIPERSONIC AXIAL-SIMETRIC PE CORPURI SUBȚIRI

PETRE BRĂDEANU

Se studiază mișcarea hipersonică axial-simetrică*, fiind seama de interacțiunea dintre stratul limită viscos și scurgerea exterioră ideală a unui gaz perfect în jurul unui corp de rotație subțire, presupunând că numărul lui Mach M_∞ al curentului neperturbat tinde la infinit iar raportul densităților (înainte și după unda de șoc) este mic.

Domeniul perturbat al mișcării, cuprins între suprafața corpului și unda de șoc, se consideră împărțit în două regiuni. În aceea din apropierea corpului fluidul este viscos și formează stratul limită, iar în cealaltă, din apropierea undei de șoc, fluidul este neviscos (ideal). Unda de șoc nu poate pătrunde în interiorul stratului limită și nici să coincidă cu frontiera superioară a acestui strat [1].

Se studiază, mai întâi, mișcarea în regiunea neviscoasă, fiind în considerare influența stratului limită și, pe urmă, se cercetează mișcarea în interiorul stratului limită.

*Notății:

x, y, ϕ , u, v, w , θ , θ_0, θ_1 , δ , δ_0 , δ_1 , μ , $\sigma = \mu c_p / \lambda$, R, R_f , a_∞, a_0 , $V_\infty = V / a_\infty$, $M_\infty = V_\infty / a_\infty$, $\gamma = c_p / c_v$, ϵ , $\infty, 2, 1, w$, p, ρ, T, i ,
 reprezintă coordonatele stratului limită axial-simetric;
 x, y și ϕ :
 direcția curentului neperturbat și a axei de simetrie a corpului de rotație;
 $\theta, \theta_0, \theta_1$:
 unghiurile de deviere a undei de șoc, corpului, limitei de curent de la direcția Oz ;
 $\delta, \delta_0, \delta_1$:
 distanța de la axa corpului la un punct curent al mișcării;
 μ ,
 coeficientul dinamic de viscozitate;
 $\sigma = \mu c_p / \lambda$,
 R, R_f ,
 raza de curbura a corpului și, respectiv, a corpului fictiv;
 a_∞, a_0 ,
 viteza curentului neperturbat, respectiv unda de șoc;
 $V_\infty = V / a_\infty$,
 numărul lui Mach al curentului neperturbat;
 $\gamma = c_p / c_v$,
 raportul caldurilor specifice;
 ϵ ,
 raportul $(\gamma - 1) / (\gamma + 1)$;
 $\infty, 2, 1, w$,
 indici, reprezentând valorile mărimilor la infinit (în fața undei de șoc), în spatele undei de șoc, pe frontiera stratului limită și, respectiv, pe corp;
 p, ρ, T, i ,
 sînt presiunea, densitatea, temperatura absolută, entalpia.

Studiul mișcării ideale. Expresiile vitezei, presiunii și densității. 1.
În problema de care ne ocupăm vom admite aproximațiile:

$$M_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty} \gg 1, \quad \beta \equiv \frac{r_w}{l} \ll 1, \quad \varepsilon = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \ll 1 \quad (1)$$

$$\operatorname{tg} \theta_c = \frac{dr_w}{d\xi} \sim \beta$$

și vom presupune că avem

$$K = M_\infty \beta \gg 1 \quad (1')$$

Potrivit și experienței, unghiul α de deviere al undei de șoc față de direcția $O\xi$ a curentului neperturbat, după cum este arătat și în [2] și [3], are ordinele de mărime

$$\alpha \sim \beta + \frac{1}{M_\infty} \text{ și } \alpha \sim \beta + \frac{\delta}{l} + \frac{1}{M_\infty}, \quad \left(\frac{\delta}{l} \ll 1 \right), \quad (2)$$

l fiind o lungime caracteristică (exp. lungimea corpului), dacă se ține seama de existența stratului limită de grosimea relativă δ/l și se admite ipoteza corpului fictiv.

În supozițiile (1) – (2), unghiul α este mic și vom putea considera că

$$\alpha \ll 1, \quad K_2 \equiv \varepsilon^{1/2} \alpha M_\infty \gg 1 \quad (2')$$

2. Din formulele undelor de șoc, aplicate în condițiile și aproximațiile de mai sus ($K_2 \gg 1, \varepsilon \ll 1, \alpha \ll 1$), deducem relațiile aproximative, valabile pe suprafața undei de șoc:

$$\frac{v_{2n}}{V_\infty} = \frac{\rho_\infty}{\rho_2} = \varepsilon \left[1 + \frac{1}{\varepsilon(1+\varepsilon)\alpha^2 M_\infty^2} \right] \approx \varepsilon \quad (3)$$

$$p_2 \approx (1-\varepsilon)\rho_\infty V_\infty^2 \alpha^2 = (1+\varepsilon)p_\infty M_\infty^2 \alpha^2, \quad i_2 \approx \frac{1}{2} V_\infty^2 \alpha^2 \quad (4)$$

Formulele (3) – (4) presupun că p_∞, i_∞ și a_∞ tind spre zero pentru a fi în acord cu aproximația la limită fundamentală $M_\infty \rightarrow \infty$. Presupunând neglijabile puterile superioare ale lui ε și excluzînd valoarea $\varepsilon = 0$ (cazul newtonian al mișcării hipersonice) relațiile (3)–(4) sînt valabile cu o eroare de ordinul $1/K_2^2$ față de unitate.

Influența stratului limită asupra devierii liniilor de curent din regiunea nevîscoasă se poate evalua cu ajutorul grosimii de eliminare δ^* care, pentru mișcarea axial-simetrică, se calculează cu formula

$$\int_0^{\delta^*} u_1 \rho_1 r dy = \int_0^{\delta} (u_1 \rho_1 - u \rho) r dy \quad (5)$$

dacă, în partea stîngă, se ia $r = r_\bullet(x) + y \cos \theta_c$ și se neglijează, în prima aproximație, δ^{*2} .

Dață se admite, conform concepției stratului limită, că repartiția presiunii din exteriorul și interiorul stratului este aceeași, dacă se presupune o abatere admisibilă de la integrala lui Crocco potrivit căreia $T/T_\infty \sim \epsilon M_\infty^2$ în interiorul stratului și dacă se ia $u \sim u_1$, după formula presiunii (4) considerată valabilă în toată regiunea neviscoasă, obținem

$$\frac{u\rho}{u_1\rho_1} = \frac{u}{u_1} \frac{\rho_\infty}{\rho_1} \frac{p}{p_\infty} \frac{T_\infty}{T} \approx \frac{u}{u_1} \epsilon(1 + \epsilon)M_\infty^2 \alpha^2 \frac{1}{\epsilon M_\infty^2} \sim \alpha^2$$

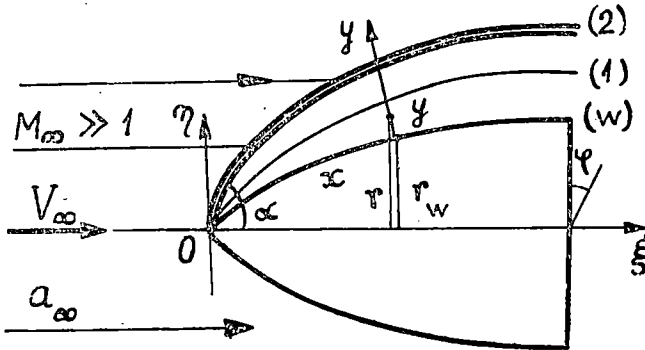


Fig. 1.

Neglijnd α^2 față de unitate, rezultă din (5) că $\delta^* = \delta$. Prin urmare, unghiul de deviere al liniilor de curent, sub influența stratului limită, în problema studiată, poate fi luat egal cu $d\delta/dx$ iar frontiera exterioară a stratului limită poate fi considerată linie de curent. De aceea se poate admite că mișcarea ideală are loc în jurul unui corp fictiv cu devierea

$$\theta_1 = \frac{dr_w}{dx} + \frac{d\delta}{dx}$$

față de axa $o\xi$. Formula unghiului α al undei de șoc devine

$$\alpha - \theta_1 = \epsilon\alpha \tag{6}$$

Diferența $\alpha - \theta_1$ este o mărime mică de ordinul doi așa că unda de șoc se apropie mult de frontiera exterioară a stratului limită.

Formulele undei de șoc oblice (curbilinie) ne dau următoarele evaluări ale ordinelor de mărime ale parametrilor aerodinamici din spatele undei (indicii t și n notează proiecțiile vitezei pe tangenta și normala la unda de șoc)

$$\alpha = \frac{\theta_1}{1 - \epsilon} = (1 + \epsilon) \frac{\bar{\epsilon}}{\epsilon} \tag{7}$$

$$\frac{\rho_\infty}{\rho_2} \sim \varepsilon, \quad \frac{v_{2n}}{V_\infty} \sim \bar{\varepsilon}, \quad \frac{v_{2t}}{V_\infty} \sim 1, \quad \frac{p_2}{\rho_\infty V_\infty^2} \sim (1 + \varepsilon) \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\varepsilon}\right)^2, \quad \frac{y_2 - \delta}{l} \sim \bar{\varepsilon} \quad (8)$$

$$\frac{x_2}{l} \sim 1, \quad \frac{a_2^2}{V_\infty^2} \sim \frac{1 + 3\varepsilon}{\varepsilon} \bar{\varepsilon}^2, \quad \frac{i_2}{V_\infty^2} \sim \frac{1 + 2\varepsilon}{2\varepsilon^2} \bar{\varepsilon}^2$$

unde

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \theta_l = \varepsilon \left(\frac{dr_w}{dx} + \frac{d\delta}{dx} \right) \quad (8')$$

Din (8) se deduce că în spatele undei de șoc viteza diferă puțin de viteza curentului neperturbat, densitatea crește mult, fiind, ambele, independente de numărul lui Mach, iar entalpia și viteza sunetului sînt mici. Aceste rezultate sînt în concordanță cu principiul independenței de numărul lui Mach, valabil și în cazul $K_2 \gg 1$. Scurgerea depinde de ρ_∞ și V_∞ și nu depinde de p_∞ , i_∞ , a_∞ . Presupunem că evaluările (8) sînt adevărate în toată regiunea nevîscoasă considerată. După (8), în acord și cu faptul că debitul $\rho_2 v_{2n}$ este finit iar $\delta^* = \delta$, fluidul care se află în regiunea nevîscoasă formează un strat de șoc. Grosimea stratului de șoc, după ordinul de mărime a diferenței $y_2 - \delta$ considerat în formula (8), este foarte subțire. Pe lîngă acest fapt, un rol important îl va juca, din punct de vedere matematic, parametrul mic $\bar{\varepsilon}$.

3. Ecuațiile mișcării axial-simetrice a fluidului ideal în jurul corpului fictiv, scrise în coordonatele curbilini $\bar{x}, \bar{y}, \varphi$ ($d\bar{x} = dx$) ale stratului limită (fig. 1) au forma

$$\rho \left[(\vec{v} \cdot \nabla) u + \frac{uv}{R_f + \bar{y}} \right] = - \frac{R_f}{R_f + \bar{y}} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \rho \left[(\vec{v} \cdot \nabla) v - \frac{u^2}{R_f + \bar{y}} \right] = - \frac{\partial p}{\partial \bar{y}} \quad (9)$$

$$(\vec{v} \cdot \nabla) S = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho r u) + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \left(\rho r \frac{R_f v}{R_f + \bar{y}} \right) = 0, \quad \left(\vec{v} \cdot \nabla = u \frac{R_f}{R_f + \bar{y}} \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \right)$$

unde S este entropia, \vec{v} este vectorul viteză iar $\bar{y} = y - \delta$, $R_f = R + \delta$.

Luînd în considerare (8), introducem mărimile adimensionale, de ordinul unității, $u_0, v_0, \rho_0, p_0, x_0$, și y_0 cu ajutorul formulelor:

$$\rho = \rho_0 \frac{\rho_\infty}{\varepsilon}, \quad x = x_0 l, \quad \bar{y} = y_0 l \varepsilon (r'_w + \delta'), \quad u = u_0 V_\infty$$

$$v = v_0 V_\infty \varepsilon (r'_w + \delta'), \quad p = p_0 p_\infty M_\infty^2 (1 + 3\varepsilon) (r'_w + \delta')^2 \quad (10)$$

în ecuațiile (9) ale mișcării axial-simetrice din jurul corpului fictiv.

Admitem că în ecuațiile (9) termenii a căror valoare este dată de mărimile de ordinul doi

$$\bar{\varepsilon} = \varepsilon \left(\frac{dr_w}{dx} + \frac{d\delta}{dx} \right), \quad \frac{\delta}{R} = \frac{\delta}{l} \cdot \frac{l}{R}$$

sînt neglijabili față de termenii de ordinul unității. Luînd, unde R_f este raza de curbură a corpului fictiv,

$$R_f + \bar{y} \approx R_f, \quad \frac{l}{R_f + \bar{y}} \approx \frac{l}{R_f} \quad (11)$$

și înlocuind, în ecuația mișcării în direcția Oy , variabila y_0 cu funcția de curent ψ , cu ajutorul transformării

$$\frac{1}{l\varepsilon \left(\frac{dr_w}{dx} + \frac{d\delta}{dx} \right)} \frac{\partial}{\partial y_0} = r \frac{\rho_\infty}{\varepsilon} \rho_0 u_0 V_\infty \frac{\partial}{\partial \Psi}, \quad (12)$$

ecuația continuității, ecuația mișcării în proiecție pe Ox și Oy , din (9), după efectuarea tuturor calculelor, devin

$$\frac{\partial}{\partial x_0} (\rho_0 r u_0) + \frac{\partial}{\partial y_0} (\rho_0 r v_0) = 0 \quad (13)$$

$$u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x_0} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial y_0} = 0 \quad (14)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial \Psi} = \frac{u_0}{\rho_\infty V_\infty r R_f (r'_w + \delta)} \quad (15)$$

$$u_0 = 1, \quad p_0 = 1 \quad \text{pe unda de șoc}$$

Din ecuația (14) rezultă că viteza u_0 este constantă pe o linie de curent și că, după condiția la limită pe unda de șoc, avem soluția $u_0 = 1$ în toată regiunea nevîscoasă.

Ținînd seama de principiul conservării masei prin traversarea undei de șoc, se poate deduce valoarea funcției de curent, pe unda de șoc, ψ_2 în următoarea formă

$$\psi_2 = \frac{1}{2} \rho_\infty V_\infty r_2^2(x) \quad (16)$$

$$(r_2 \rho_\infty V_\infty = \partial \Psi_2 / \partial r_2, \quad \partial \Psi / \partial \xi = 0)$$

Deoarece în cazul corpului subțire, după (6), se poate scrie

$$\alpha = \frac{dr_2}{d\xi} = \frac{dr_2}{dx} = (1 + \varepsilon) \frac{d}{dx} (r_w + \delta)$$

vom admite, în ecuația (15), eroarea dată de aproximația

$$r_2 = (1 + \varepsilon)(r_w + \delta) \approx r_w + \delta \approx r, \quad \frac{1}{R_f} \approx \left| \frac{d^2}{dx^2} (r_w + \delta) \right| = - \frac{d^2(r_w + \delta)}{dx^2}. \quad (17)$$

Pe baza aproximației $\delta^* = \delta$, justificată mai sus, se deduce că debitul de fluid prin frontiera stratului limită este neglijabil în comparație cu debitul de fluid prin unda de șoc și că în consecință se poate lua $\psi_1/\psi_2 \approx 0$. Respectiv aceste considerații, se integrează ecuația (15) pentru $x = \text{const.}$ în intervalul închis $[\psi_1, \psi_2]$ și după efectuarea unor calcule elementare, se obține repartitia presiunii pe frontiera exterioară a stratului limită, valabilă și în interiorul stratului, în forma

$$p(x) = (1 + 3\varepsilon) p_\infty M_\infty^2 \left\{ \left[\frac{d}{dx} r_w \left(1 + \frac{\delta}{r_w} \right) \right]^2 + \frac{1}{2} r_w \left(1 + \frac{\delta}{r_w} \right) \frac{d^2}{dx^2} r_w \left(1 + \frac{\delta}{r_w} \right) \right\}. \quad (18)$$

Din ecuația energiei (legea izentropicității), dată în (9), se deduce că raportul p/ρ , în cazul acestei probleme, este cunoscut (constant) pe o linie de curent și egal cu valoarea corespunzătoare p_2/ρ_2 de pe unda de șoc și atunci, folosind formula presiunii din (8) și formula (18), se obține distribuția densității pe frontiera stratului limită în forma

$$\rho_1 = \frac{p_\infty}{\varepsilon} \frac{(r_w + \delta)' + \frac{1}{2} (r_w + \delta)(r_w'' + \delta')}{(r_w + \delta)'_{x=\xi_0}} \quad (19)$$

unde ξ_0 este coordonata x a intersecției liniei de curent (frontiera stratului) cu unda de șoc. Pentru determinarea ei se va ține seama de (16).

Termenul ultim din (18) reprezintă influența forțelor centrifuge, care se datoresc curbării corpului, asupra distribuției presiunii. El este nul dacă $(r_w + \delta)'' = 0$. Se observă din (18) că pentru corpul cu generatoare rectilinie termenul centrifugal nu este nul dacă se ține seama de interacțiunea dintre stratul limită și scurgerea exterioară. Dacă se neglijează termenul care conține pe ε și se ia $\delta = 0$ se obține, din (18), formula lui Busemann. Se vede, de asemenea, din (18) că presiunea pe frontiera stratului limită depinde de $\delta(x)$ numai prin intermediul raportului $\delta(x)/r_w(x)$ numit parametru de influență sau interacțiune [3]. Dacă $\delta/r_w \ll 1$ și termenul care conține pe ε se neglijează din (18), se obține de asemenea formula lui Busemann. În acest caz, influența stratului limită asupra presiunii din scurgerea exterioară este neesențială în raport cu influența corpului. Dependența parametrului de interacțiune de numerele lui Mach și Reynolds este dată în [3] și [1]. Vom trece acum la studiul stratului limită presupunând că $\delta/l \ll 1$ și $\delta/R \ll 1$ și că parametrul de interacțiune este de ordinul unității sau mai mare. În aceste condiții, ecuațiile mișcării în stratul limită axial-simetric sînt deduse și date în [3].

Studiul mișcării în stratul limită cu ajutorul relației integrale. ($\delta/r_w \sim 1$).
4. Ecuațiile mișcării axial-simetrice în stratul limită de fluid viscos, care se formează pe corpul de rotație subțire, în cazul $\delta/r_w \sim 1$, sînt de forma

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho r u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho r v) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (20)$$

$$\rho w r \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v r \frac{\partial u}{\partial y} = -r \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(r \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (21)$$

$$\rho w r \frac{\partial i}{\partial x} + \rho v r \frac{\partial i}{\partial y} = r u \frac{dp}{dx} + r \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\mu}{\sigma} \frac{\partial i}{\partial y} \right) \quad (22)$$

($i = c_p T$)

Combinînd și integrînd în raport cu y ecuațiile (20) și (21) și admițînd aproximațiile

$$\int_0^\delta r dy \approx r_w \delta + \frac{1}{2} \delta^2 = r_w^2 \frac{\delta}{r_w} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\delta}{r_w} \right), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=\delta} = 0$$

se obține, știind că $u_1 = V_\infty$ după rezultatele paragrafului precedent, ecuația integrală a stratului limită dinamic în forma

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^\delta (r_w + y) \rho u (u - V_\infty) dy = - \left(r_w \delta + \frac{1}{2} \delta^2 \right) \frac{dp}{dx} - r_w \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \quad (23)$$

5. Considerînd, acum, ca valabile în stratul limită formulele

$$\sigma = 1, \quad \left(\frac{\partial i}{\partial y} \right)_w = 0, \quad \frac{\rho}{\rho_\infty} = \frac{p}{p_\infty} \frac{i_\infty}{i} \quad (24)$$

$$\frac{i}{i_\infty} \approx \frac{\gamma - 1}{2} M_\infty^2 \left(1 - \frac{u^2}{V_\infty^2} \right), \quad \frac{u}{V_\infty} = \frac{y}{\delta}$$

unde i/i_∞ este dată de integrala lui Busemann (valabilă pentru $\sigma = 1$, $(i_y)_w = 0$, mișcarea exterioară izoenergetică $i_1 + u_1^2/2 = V_\infty^2/2$) iar profilul de viteză u este în acord cu condiția la limită $u_1 = V_\infty$, se obține, după efectuarea unor calcule simple, următoarea ecuație diferențială ordinară

$$\frac{2}{\gamma - 1} \frac{d}{dx} \left\{ \left[\frac{1}{2} + (1 - \ln 2) \left(\frac{r_w}{\delta} - 1 \right) \right] \frac{p}{p_\infty} \delta^2 \right\} = \frac{1}{\gamma} \left(\frac{r_w}{\delta} + \frac{1}{2} \right) \delta^2 \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{p_\infty} \right) + \frac{M_\infty^2 \mu_w}{\rho_\infty V_\infty} \frac{r_w}{\delta} \quad (25)$$

Considerăm cazul, c fiind o constantă adimensională pozitivă,

$$\frac{r_w}{\delta} = \text{const} = \frac{1}{c}, \quad c > 0 \quad (26)$$

și introducem notațiile

$$A_o = \varepsilon(1 - \varepsilon) \frac{1 + \frac{2}{c}}{1 - s_o + \frac{s_o}{c}}, \quad B_o = 2\varepsilon(1 + \varepsilon) \frac{M_\infty^2 \mu_w}{\rho_\infty V_\infty} \frac{1}{1 - s_o + \frac{s_o}{c}},$$

$$s_o = 2(1 - \ln 2) = 0,614.$$

Ecuațiile (25) și (18) devin:

$$\frac{d\delta^2}{dx} + (1 - A_o) \delta^2 \frac{p_\infty}{p} \frac{d}{dx} \left(\frac{p}{p_\infty} \right) = B_o \frac{p_\infty}{p} \quad (27)$$

$$\frac{p}{p_\infty} = (1 + 3\varepsilon) M_\infty^2 (1 + c)^2 \left(r_w'^2 + \frac{1}{2} r_w r_w'' \right). \quad (28)$$

Integrala ecuației (27) care satisface condiția la limită $\delta(o) = 0$ este

$$\delta^2 = B_o \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{A_o - 1} \int_0^x \left(\frac{p}{p_\infty} \right)^{-A_o} dx. \quad (29)$$

Să presupunem acum că generatoarea corpului subțire, în jurul căruia are loc mișcarea, are ecuația (x este mic)

$$r_w(x) = ax^m$$

$$(a = \text{const.}) \quad (30)$$

Se obțin astfel, din (28) și (29), formulele

$$\frac{p}{p_\infty} = \lambda_o x^{2(m-1)}, \quad \delta = \sqrt{\frac{B_o}{\lambda_o [1 + 2(1-m)A_o]}} x^{\frac{3}{2}-m} \quad (31)$$

$$\left(\lambda_o \equiv (1 + 3\varepsilon) M_\infty^2 a^2 \frac{m(3m-1)}{2} (1+c)^2 \right) \quad (31')$$

Se observă ușor că condiția (26), impusă în această problemă, este îndeplinită dacă luăm (condiții de automodelare)

$$m = \frac{3}{4} \quad \text{și} \quad a^2 \lambda_o (2 + A_o) = \frac{2B_o}{c^2} \quad (32)$$

Să presupunem problema directă care constă în a considera dat corpul. În consecință, presupunem cunoscută ecuația (30) în care m este egal cu $3/4$ iar a este dat. Atunci, luând $m = 3/4$ și efectuând calculele algebrice

elementare (se neglijează și ε^2 față de unitate). condiția a doua din (32) se transformă în următoarea ecuație algebrică pentru determinarea constantei c

$$c^2(c + 1)^2(c + q_1) = \frac{q_1}{q_2} \tag{33}$$

$$q_1 \equiv 2 \frac{0,614 + \varepsilon}{0,772 + \varepsilon}, \quad q_2 = \frac{15 \cdot 0,614 + 2,842 \varepsilon}{64 \varepsilon(1 + \varepsilon)} \frac{\mu_\infty}{\mu_w} R_{e\infty}, \quad R_{e\infty} = \frac{\rho_\infty V_\infty a^4}{\mu_\infty}$$

unde $R_{e\infty}$ este numărul lui Reynolds relativ la curentul neperturbat și la lungimea $a^4 = L$. Problema directă este redusă la rezolvarea ecuației (33) ai cărei coeficienți depind, prin intermediul mărimilor adimensionale q_1 și q_2 , de parametrii ε , μ_∞ , μ_w și $R_{e\infty}(\rho_\infty, V_\infty, \mu_\infty, a)$. Cunoscînd rădăcina pozitivă c a ecuației (33) vom putea determina, apoi, parametrii mișcării fluidului în stratul limită (grosimea δ , viteza u , tensiunea de frecare τ_w , presiunea p și temperatura T) cu formulele

$$\delta = acx^{3/4}, \quad u = V_\infty \frac{y}{\delta} = \frac{V_\infty}{ac} x^{-3/4} y, \quad \tau_w = \mu_w \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_w = \frac{\mu_w V_\infty}{ac} x^{-3/4} \tag{34}$$

$$\frac{p}{p_\infty} = \lambda_0 x^{-1/2}, \quad \frac{T}{T_\infty} = \frac{i}{i_\infty} = \frac{\varepsilon M_\infty^2}{1 - \varepsilon} \left(1 - \frac{y^2 x^{-3/2}}{a^2 c^2} \right) \tag{35}$$

$(r_w = ax^{3/4})$

unde λ_0 este dat de formula (31') în care se va lua $m = 3/4$.

Deoarece în problema de față nu există schimb de căldură între corp și fluid, adică $(T_y)_w = 0$ sau $(i_y)_w = 0$, înseamnă că suprafața corpului se va încălzi pînă la temperatura adiabatică T_{aw} dată, după (35) în care se va face $y = 0$, de formula

$$T_{aw} = \frac{\varepsilon M_\infty^2}{1 - \varepsilon} T_\infty = \frac{\varepsilon \alpha^2 M_\infty^2}{1 - \varepsilon} \frac{T_\infty}{\alpha^2} = \frac{K_2^2}{1 - \varepsilon} \frac{T_\infty}{\alpha^2} \tag{36}$$

Observație. Se poate, desigur, considera și problema inversă, presupunînd dată constanta c . În acest caz, constantele necunoscute a și m (corpul de forma $r_w = ax^m$) se vor determina cu formulele de automodelare (32). Parametrii mișcării se vor determina cu formulele (34)–(35).

(Intrat în redacție la 24 noiembrie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Hayes, W. D., Probstein, R. F., *Hypersonic Flow Theory*, Acad. Press, New York, 1959.
2. Cernii, G. G., *Tecenie gaza s bol. sverhzvucovoi skorostiu*, Fizmatgiz, Moscova, 1959.
3. Lunev, V. V., *Asupra similitudinii scurgerilor cu viteze supersonice mari a unui gaz viscos în jurul corpurilor subțiri* (în l. rusă) „Priklad. Mat i Meh. (PMM)”, XXIII, 1959, 1.

4. Yasuhara, M., *On the hypersonic visc. flow past slender bod. of revol.*, „J. Phys. Soc Japan”, **8** (1956), 878—886.
5. Nagakura, T., Naruse, N., *An approximate solution of the hypers. laminar boundary-layer equations and its applic.*, „J. Phys. Soc. Japan”, **12** (1957), 1298.
6. Shen, S. F., *Oženka vlián. vias. v zadace ob obtekaní izol. klína pri bol. cislah M* , sb. „Mehanika”, **24**, (1954), 2, 72—86.
7. Shen, S. F., *Ob urav. pograničnogo sloia pri ocin bol. cisl. M* , sb. „Mehanika”, **17** (1953), 1 (trad. din JAS, **19** (1952), 7, 500—501).
8. Freeman, N. C., *On the theory of hyper. flow past plane and axially symmetric bluff bodies*, „J. Fluid Mech.”, **1** (1956), 366—387.

ПРИБЛИЖЁННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СВЕРХЗВУКОВОГО АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧЕСКОГО СЛОЯ НА ТОНКИХ ТЕЛАХ

(Резюме)

В работе изучается сверхзвуковое аксиально-симметрическое движение вокруг тонкого вращательного тела, учитывая взаимодействие между пограничным слоем и внешним невязким течением в предположении, что число Маха M_∞ стремится к бесконечности, что ударная волна имеет малый наклон и что отношение плотностей (до и после ударной волны) малое ($\epsilon \ll 1$). Определяется давление в пограничном слое в форме Буземанна.

Используется затем интегральное соотношение пограничного слоя, которое сводится, предполагая, что $r_w/\delta = 0(1) = \text{const.}$, к обыкновенному дифференциальному уравнению. В частных рассматриваемых случаях автомоделирования полное решение прямой задачи сведено к решению алгебраического уравнения пятой степени. Даются затем формулы для вычисления параметров движения в пограничном слое.

AN APPROXIMATE CALCULATION OF THE AXISYMMETRICAL, HYPERSONIC BOUNDARY LAYER ON THIN BODIES

(Summary)

The axisymmetrical hypersonic motion round a thin rotation body is investigated taking into consideration the interaction between the boundary layer and the non-viscous exterior flow and supposing that Mach's number M_∞ tends to infinite, that the shock wave has a small inclination and that the ratio of the densities (before and after shock wave) is small ($\epsilon \ll 1$). The pressure in the boundary layer is determined in Busemann's form.

The integral relation of the boundary layer is used. Then, supposing that $r_w/\delta = 0(1) = \text{const.}$, this is reduced to an ordinary differential equation. In the considered cases of similarity the full solution of the direct problem is reduced to the solution of a fifth degree algebraic equation.

Formulae are given for the calculation of motion parameters in boundary layer.

O SOLUȚIE NUMERICĂ A UNEI ECUAȚII ALGEBRICE ȘI FOLOSIREA EI ÎN AERODINAMICĂ

DOINA BRĂDEANU

Folosirea metodei ecuațiilor integrale reduce problema obținerii soluțiilor automodelate (similare), dependente de o singură variabilă $\eta(x, y)$, pentru mișcarea fluidului vâscos în stratul limită, la rezolvarea unor ecuații algebrice. Așa, de exemplu, în metoda lui Pohlhausen apare o ecuație algebrică de gradul trei [1], iar în studiul stratului limită hipersonic, după cum se arată în [2], apare o ecuație algebrică de gradul cinci $F(c) = 0$. Pentru a putea folosi rezultatele, simple, date în lucrarea [2] va trebui să se cunoască soluția acestei ecuații.

În această lucrare se arată că ecuația algebrică $F(c) = 0$ are o singură rădăcină reală pozitivă, se calculează, apoi, o valoare numerică aproximativă a acestei rădăcini și se folosește această valoare pentru calculul numeric al parametrilor stratului limită aerodinamic hipersonic de pe corpul de rotație subțire. Calculele numerice se efectuează pentru numărul Mach $M_\infty = 20$, raportul densităților (ρ_1/ρ_2) pentru unda de șoc $\epsilon = 8 \cdot 10^{-2}$ și numere Reynolds $R_{e\infty} = 6,31 \cdot 10^n$ ($n = 4, 3, 2$) care interesează, în special, regimul de zbor al rachetelor și proiectilelor balistice cu reacție la diferite înălțimi de zbor ($H = 0$ km, $H = 15$ km și $H = 30$ km) în atmosfera Pământului.

Rezolvarea ecuației $F(c) = 0$. 1. *Despre natura rădăcinilor ecuației $F(c) = 0$.* Se consideră ecuația algebrică de gradul cinci, cu coeficienți reali, în raport cu mărimea necunoscută c și parametrii q_1 și q_2

$$F(c) \equiv c^2(c + 1)^2(c + q_1) - \frac{q_1}{q_2} = 0 \quad (1)$$

$$(q_1 > 0, q_2 > 0)$$

Pentru a studia natura soluțiilor acestei ecuații se folosește teorema lui Rolle. Se deduce ușor, prin derivare, ecuația de gradul patru

$$\frac{dF}{dc} = c(c + 1)[5c^2 + (4q_1 + 3)c + 2q_1] = 0$$

ale cărei rădăcini sînt

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -1, \quad c_{3,4} = \frac{1}{10} [-(4q_1 + 3) \pm \sqrt{(4q_1 + 3)^2 - 40q_1}] \quad (2)$$

Se constată că rădăcinile $c_{3,4}$ sînt reale, negative și așezate în ordinea $c_4 < -1 < c_3 < 0$ (se presupune că $1 < q_1 < 3$). Considerînd șirul

$$F(-\infty) = -\infty, \quad F(c_4), \quad F(-1) = -\frac{q_1}{q_2}, \quad F(c_3), \quad F(0) = -\frac{q_1}{q_2}, \quad F(\infty) = +\infty$$

se deduce că ecuația (1) are întotdeauna o singură rădăcină reală pozitivă $c = c_0$ indiferent de semnul valorilor $F(c_3)$ și $F(c_4)$. Evident că dacă, de exemplu, $F(c_3) < 0$, atunci ecuația (1) are cel puțin trei rădăcini reale, o rădăcină pozitivă ($c = c_0$) și două rădăcini negative.

Așa după cum s-a menționat, ecuația (1) apare în problema determinării parametrilor aerodinamici din stratul limită hipersonic axial-simetric în care necunoscuta $c = \delta/r_w$, unde $\delta(x)$ este grosimea stratului limită iar $r_w(x)$ este distanța de la suprafața corpului, de formă dată (problema directă), la axa sa de simetrie. Rezultatul obținut mai sus, că ecuația (1) are o singură rădăcină reală pozitivă este în acord, deci, cu semnificația constantei c și cu existența unică a stratului limită și a soluțiilor sale pe corpul dat. De aceea, în continuare, ne vom ocupa numai cu determinarea rădăcinii pozitive a ecuației (1).

2. *Calculul numeric al rădăcinii $c = c_0 > 0$.* Potrivit cu lucrarea [2] raportul $\delta/r_w = 0(1)$ și, în consecință, valoarea rădăcinii c_0 nu poate fi foarte mică sau foarte mare. Pentru determinarea ei va trebui să cunoaștem coeficienții q_1 și q_1/q_2 . Vom calcula acești coeficienți în trei cazuri:

— Cazul I. Se admite, pentru dependența vîscozității μ de temperatura absolută T , legea liniară și atunci coeficienții q_1 și q_2 , dați în [2]

$$q_1 = 2 \frac{0,614 + \varepsilon}{0,772 + \varepsilon}, \quad q_2 = \frac{15}{64} \frac{0,614 + 2,842\varepsilon}{\varepsilon(1 + \varepsilon)} \frac{\mu_\infty}{\mu_w} R_{e\infty}, \quad (3)$$

devin

$$q_1 = 2 \frac{0,614 + \varepsilon}{0,772 + \varepsilon}, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{128}{15} \frac{0,614 + 2,228\varepsilon}{0,474 + 2,808\varepsilon} \frac{(\varepsilon M_\infty)^2}{R_{e\infty}} \quad (4)$$

$$\left(R_{e\infty} = \frac{\rho_\infty V_\infty a^4}{\mu_\infty}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \frac{\mu_w}{\mu_\infty} = \frac{T_w}{T_\infty} = \frac{\varepsilon M_\infty^2}{1 - \varepsilon} \right) \quad (5)$$

unde ε , mărime mică, este raportul densităților din fața și spatele unde de șoc, $R_{e\infty}$ este numărul lui Reynolds relativ la lungimea a^4 și mișcarea neperturbată, omogenă și uniformă, iar $M_\infty = V_\infty/a_\infty$ este numărul lui Mach (V_∞ și a_∞ sînt viteza curentului și, respectiv, a sunetului la infinit). În formula (5), pentru vîscozitatea μ_w , s-a folosit expresia dată în [2] a temperaturii adiabactice T_w a suprafeței corpului. Temperatura adiabatică T_w ,

fiind temperatura pe care o ciștigă suprafața izolată (termic) a corpului în urma încălzirii sale aerodinamice, nu poate fi dată sub forma unei condiții la limită.

Vom considera o mișcare hipersonică, a gazului vâcos, în care parametrii mișcării au valorile

$$M_\infty = 20, \quad T_\infty = 220^\circ\text{K} (= -53^\circ\text{C}), \quad p_\infty = 1 \text{ at} = 981 \cdot 10^2 \text{N/m}^2 \quad (6)$$

Parametrii aerodinamici din fața undei de șoc au valorile

$$a_\infty = \sqrt{\gamma RT} = 20,1 \sqrt{T_\infty} = 300 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad V_\infty = M_\infty a_\infty = 6 \cdot 10^3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \quad (7)$$

$$\mu_\infty = 1,45 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{sec}}$$

$$\rho_\infty = 1,535 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \quad \nu_\infty = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} = 9,50 \cdot 10^{-6} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} \quad (8)$$

$$\left(R = 287 \frac{\text{m}^2}{\text{sec}^2 \cdot \text{grad}}, \quad \varepsilon = 8 \cdot 10^{-2}, \quad a = 10^{-1} \right)$$

Cu aceste valori se găsesc, după (5) și (4), următoarele valori

$$R_{z,\infty} = 6,31 \cdot 10^4, \quad q_1 = 1,6290, \quad q_1/q_2 = 3,0977 \cdot 10^{-4} \quad (9)$$

$$(\mu_w = 5,0112 \cdot 10^{-4}, \quad \mu_w/\mu_\infty = 34,86)$$

— Cazul II. Vom admite, acum, o lege a vîscozității, valabilă pentru temperaturi înalte, dată de formula empirică a lui Sutherland [5]

$$\mu_w = 1,46 \cdot 10^{-6} \sqrt{T_w^\circ K} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{sec}} \text{ cu } T_w = T_\infty \frac{\varepsilon M_\infty^2}{1 - \varepsilon} \quad (10)$$

unde T_w este temperatura adiabatică a suprafeței corpului.

În acest caz, formulele (3) devin

$$q_1 = 2 \frac{0,614 + \varepsilon}{0,772 + \varepsilon}, \quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{128}{15} \frac{(0,614 + \varepsilon)(1 + \varepsilon) \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)}{0,474 + 2,808\varepsilon} \sqrt{T_\infty} \frac{M_\infty \sqrt{\varepsilon}}{10 R_{z,\infty}}. \quad (11)$$

Vom considera o mișcare hipersonică neperturbată în care

$$M_\infty = 20, \quad T_\infty = 220^\circ\text{K}, \quad p_\infty = 0,1 \text{ at} = 981 \cdot 10 \text{ N/m}^2, \quad (12)$$

și atunci formulele (7) se mențin, iar formulele (8) devin

$$\rho_\infty = 1,535 \cdot 10^{-1} \text{ Kg/m}^3, \quad \nu_\infty = \frac{\mu_\infty}{\rho_\infty} = 9,50 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{sec}. \quad (13)$$

Folosind aceste valori găsim, după (5) și (4), valorile

$$R_{e\infty} = 6,31 \cdot 10^3, \quad q_1 = 1,6290, \quad q_1/q_2 = 6,08391 \cdot 10^{-4} \quad (14)$$

$$\left(\varepsilon = 8 \cdot 10^{-2}, \quad a = 10^{-1}, \quad \mu_w = 1,27312 \cdot 10^{-4}, \quad \frac{\mu_w}{\mu_\infty} = 8,71 \right) \quad (14')$$

— Cazul III. Să considerăm cazul II relativ la o presiune p_∞ de 10 ori mai mică. Atunci, în mod corespunzător, avem valorile

$$M_\infty = 20; \quad T_\infty = 220^\circ\text{K}; \quad p_\infty = 0,01 \text{ at} = 981 \text{ N/m}^2 \quad (15)$$

$$\rho_\infty = 1,535 \cdot 10^{-2} \text{ kg/m}^3; \quad v_\infty = \frac{v_\infty}{\rho_\infty} = 9,50 \cdot 10^{-4}; \quad \varepsilon = 8 \cdot 10^{-2}$$

$$R_{e\infty} = 6,31 \cdot 10^2, \quad q_1 = 1,6290, \quad q_1/q_2 = 6,08391 \cdot 10^{-3} \quad (16)$$

(formulele (14'))

— Ecuația necunoscutei c , dată de (1), primește, în cazurile I, II și III, următoarele forme

$$F(c) \equiv c^2(c+1)^2(c+1,6290) - \begin{cases} 3,0977 \cdot 10^{-4} & \text{(I) (17)} \\ 6,0839 \cdot 10^{-4} & = 0 \text{(II) (18)} \\ 0,60839 \cdot 10^{-2} & \text{(III) (19)} \end{cases}$$

Ecuațiile (17)-(18)-(19) au câte o singură rădăcină reală pozitivă $c = c_0$. Soluțiile ecuațiilor (17) și (18) le căutăm în forma $c_0 = 10^{-2}k$ ($k > 0$) iar soluția ecuației (19) în forma $c_0 = 10^{-1}k$ ($k > 0$). Se vede că în toate cazurile trebuie să avem $k < 2$. De aceea, în primele două cazuri, pentru simplificare, se poate neglija termenul $10^{-6}k^3$ față de termenul de ordinul unității.

Pentru necunoscuta k avem, deci, ecuațiile algebrice

$$R(k) = k^2(3,6290 \cdot 10^{-4}k^2 + 4,2580 \cdot 10^{-2}k + 1,6290) - \begin{cases} 3,0977 & \text{(I) (17')} \\ = 0 & \\ 6,0839 & \text{(II) (18')} \end{cases}$$

$$R(k) = k^2(10^{-1}k + 1)^2(10^{-1}k + 1,6290) - 0,60839 = 0 \quad \text{(III) (19')}$$

Relativ la calculul rădăcinii pozitive k_0 , pentru aceste ecuații, s-a întocmit tabelul 1 unde sînt consemnate reziduurile ecuațiilor pentru diferite valori ale necunoscutei k . Procedeu, care constă în reducerea la zero a reziduuului R (metoda relaxării) se termină cu reziduurile $|R| = 0,0004$; $R = 0,0002$ și $|R| = 0,00002$ pentru cele trei ecuații.

Tabel 1

Cazul I, Ecuația (17')

k	1,3	1,35	1,355	1,356	1,36	1,4
$R(k)$	-0,24					0,21
		-0,02			0,02	
			-0,0004	0,0048		

Cazul II, Ecuația (18')

k	1,8	1,87	1,88	1,885	1,886	1,9	2,0
$R(k)$	-0,5						0,7
		-0,1				0,09	
			0,04	-0,005	0,0002		

Cazul III, Ecuația (19')

k	0,56	0,568	0,5684	0,5685	0,569	0,57
$R(k)$	-0,14					0,0036
		-0,0009			0,0034	
			-0,00002	0,00009		

Folosind tabelul 1 se deduce că soluțiile ecuațiilor algebrice $F(c) = 0$ sînt Ecuația (17): $c = c_0 = 0,01355$ cu o eroare mai mică decît 10^{-5} (prin lipsă) Ecuația (18): $c = c_0 = 0,01886$ cu o eroare mai mică decît 10^{-5} (prin adaos) Ecuația (19): $c = c_0 = 0,05684$ cu o eroare mai mică decît 10^{-5} (prin lipsă)

Observație. În cazul I avem $c_3 = -0,4844$; $c_4 = -1,456$ și $F(c_3) = 0,0705$; $F(c_4) = 0,0760$. Rezultă, atunci, că ecuația (17) are toate rădăcinile reale cuprinse între limite bine determinate cunoscute. Desigur, dintre aceste rădăcini numai $c = c_0$ corespunde problemei mecanice.

Determinarea caracteristicilor aerodinamice. 3. Parametrii locali ai mișcării. Pentru grosimea $\delta(x)$ a stratului limită, viteza longitudinală $u(x, y)$, presiunea $p(x)$, tensiunea de frecare locală $\tau_w(x)$ pe corp și temperatura adiabatică a suprafeței corpului T_{aw} , după [2], avem formulele (x este coordonata curbilinie pe generatoarea corpului iar y se măsoară pe normala la suprafața corpului)

$$\delta(x) = acx^{3/4}, u(x, y) = \frac{V_\infty}{ac} x^{-3/4} y, \frac{p}{p_\infty} = \lambda_0 x^{-1/4}$$

Tabelul 2

Expresiile funcțiilor $\delta(x)$, $u(x, y)$, p/p_∞ , $\tau_w(x)$ (sistem Si, (MKS))

	$x^{-3/4} \delta(x)$	$x^{3/4} y^{-1} u(x, y)$	$x^{1/2} p/p_\infty$	$x^{3/4} \tau_w(x)$	Presiunea p_∞ Nr. Reynolds $R_{e\infty}$	Parametrii comuni
Cazul I	$1,355 \cdot 10^{-3}$	$4,428 \cdot 10^6$	(λ_0) 2,389	$2,21456 \cdot 10^3$	$p_\infty = 1$ at. $R_{e\infty} = 6,31 \cdot 10^4$	$M_\infty = 20$ $T_\infty = 220$ °K
Cazul II	$1,886 \cdot 10^{-3}$	$3,1914 \cdot 10^6$	(λ_0) 2,4133	$4,0513 \cdot 10^2$	$p_\infty = 0,1$ at $R_{e\infty} = 6,31 \cdot 10^3$	$\epsilon = \rho_1/\rho_2 = 8 \cdot 10^{-2}$
Cazul III	$5,684 \cdot 10^{-3}$	$1,0563 \cdot 10^6$	(λ_0) 2,59656	$1,34477 \cdot 10^2$	$p_\infty = 0,01$ at $R_{e\infty} = 6,31 \cdot 10^2$	$\mu_\infty = 1,46 \cdot 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m sec}}$ $\nu_w = ax^{3/4}$, $a = 10^{-1}$

Tabelul 3

Valorile funcțiilor δ , u , p/p_∞ , τ_w pe generatoarea cu lungimea $l = 0,20$ m

x , m	Cazul I			Cazul II			Cazul III			$\nu_w = 10^{-1} x^{3/4}$
	τ_w , N/m ²	p/p_∞	$10^5 \delta$, m	τ_w , N/m ²	p/p_∞	$10^5 \delta$, m	τ_w , N/m ²	p/p_∞	$10^5 \delta$, m	$10^3 \nu_w$, m
0,01	70031	23,89	4,30	12810	24,13	5,99	4252,27	25,96	18,00	3,17
0,02	41647	19,94	7,19	7618	17,11	10,07	2528,41	18,41	30,27	5,33
0,04	24757	11,94	12,09	4528	12,06	16,89	1503,24	12,98	50,78	8,94
0,06	18265	9,79	16,37	3341	9,88	22,87	1134,92	10,59	68,90	12,13
0,08	14721	8,47	20,30	2700	8,55	28,35	893,88	9,17	85,43	15,04
0,10	12450	7,56	24,00	2278	7,63	33,64	756,17	8,21	100,99	17,78
0,20	7388	5,34	40,46	1351	5,39	56,70	448,61	5,81	170,22	29,97

$$\tau_w(x) = \mu_w \frac{V_\infty}{ac} x^{-3/4}, \quad T_{aw} = T_\infty \frac{\varepsilon M_\infty^2}{1 - \varepsilon}$$

$$\lambda_0 = \frac{m}{2} (3m - 1) (1 + 3\varepsilon) a^2 M_\infty^2 (1 + c)^2, \quad m = 3/4$$

Expresiile acestor funcții, în sistemul de unități *Si* (MKS), sînt date în tabelul 2. În tabelul 3 se dau valori numerice, în sistemul *Si*, pentru valori ale coordonatei *x* cuprinse în intervalul 0,01-0,20 m. Tabelele conțin toate cele trei cazuri considerate, care corespund la trei numere Reynolds: $R_{e_\infty} = 6,31 \cdot 10^n$ ($n = 4,3,2$), adică, la trei înălțimi de zbor în atmosfera Pămîntului. În mod aproximativ, cele trei înălțimi sînt: $H_I = 0$ Km (apropierea solului), $H_{II} = 15 \cdot 10^3$ m și $H_{III} = 30 \cdot 10^3$ m care, la rîndul lor, corespund valorilor parametrilor fizici ai atmosferei neperturbate considerate inițial. În fig. 1 este dată reprezentarea grafică a variației parametrilor aerodinamici în cele trei cazuri. Din aceste tabele și grafice se

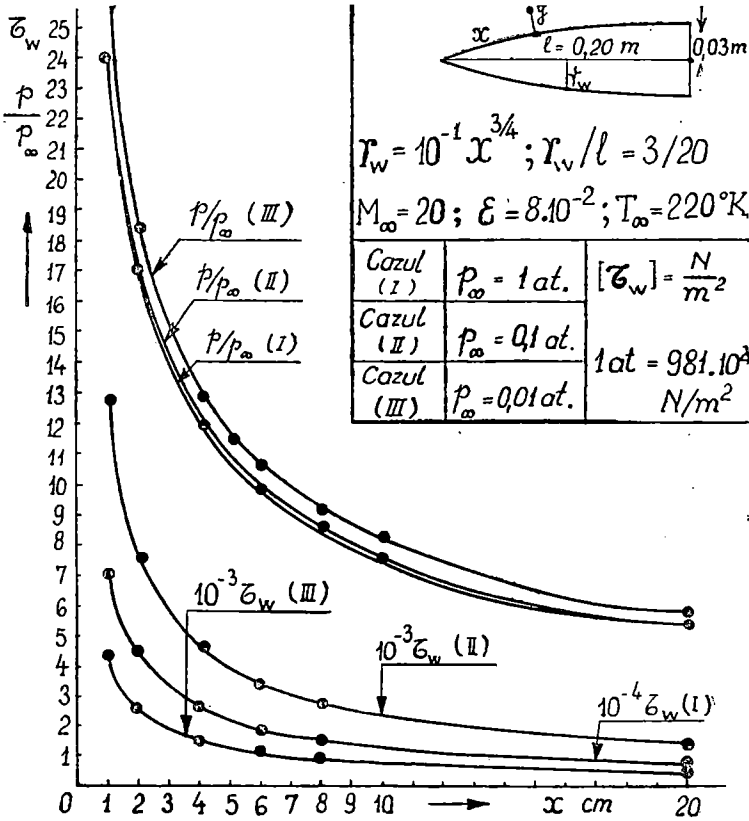


Fig. 1.

pot trage concluzii cu privire la modificarea parametrilor în raport cu variația numărului lui Reynolds și cu înălțimea de zbor.

4. *Forțe aerodinamice.* Vom calcula acum rezultanta forțelor aerodinamice elementare de presiune și de frecare care acționează pe suprafața corpului de rotație subțire, cu generatoarea de lungime l , așezat, sub unghi de atac nul, în curentul vâscos hipersonic considerat. În acest scop, vom folosi fig. 2 în care este reprezentat corpul și sistemul de referință fix în spațiu ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$). Versorii \vec{e}_1 și \vec{e}_2 se găsesc în planul axial al mișcării. Notăm cu \vec{n} versorul normalei exterioare la suprafața corpului și cu \vec{t} versorul tangentei la curba generatoare a corpului. Planul versorilor $\vec{n}, \vec{e}_2, \vec{t}$ și \vec{e}_1 (planul mișcării) se intersectează cu planul $\vec{e}_2, \vec{e}_2', \vec{e}_3'$ după versorul \vec{e}_2' . De aceea, avem formulele

$$\begin{aligned}\vec{n} &= -\sin \omega \vec{e}_1 + (\cos \varphi \vec{e}_2 + \sin \varphi \vec{e}_3) \cos \omega \\ \vec{t} &= \cos \omega \vec{e}_1 + (\cos \varphi \vec{e}_2 + \sin \varphi \vec{e}_3) \sin \omega \\ \left(\cos \omega \approx 1, \quad \sin \omega = \frac{dr_w}{dx} = r_w'(x) \right).\end{aligned}$$

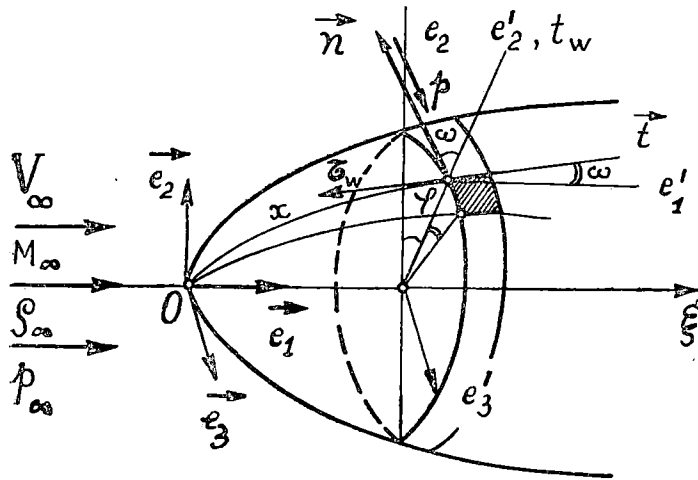


Fig. 2.

Forța de frecare totală \vec{F}_w pe suprafața S a corpului subțire se va calcula cu formulele

$$\begin{aligned}\vec{F}_w &= - \iint_S \tau_w \vec{t} r_w d\varphi dx (= F_{w1} \vec{e}_1 + F_{w2} \vec{e}_2 + F_{w3} \vec{e}_3) \\ F_{w1} = \vec{F}_w \cdot \vec{e}_1 &= - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l \tau_w \cos \omega \cdot r_w dx = - 2\pi \int_0^l \mu_w \frac{V_\infty}{c} dx, \quad F_{w2} = F_{w3} = 0\end{aligned}$$

Pentru forța de frecare \vec{F}_w și coeficientul adimensional C_{Fw} al forței de frecare avem, deci, formulele

$$\vec{F}_w = -\frac{2\pi}{c} \mu_w V_\infty l \vec{e}_1, \quad C_{Fw} = \frac{2|\vec{F}_w|}{\rho_\infty V_\infty A} = \frac{7}{2c} \frac{\mu_w}{\mu_\infty} \frac{1}{Re_L} \quad (20)$$

$$\left(L = al^{3/4}, \quad Re_L = \frac{\rho_\infty V_\infty L}{\mu_\infty}, \quad A = 2\pi \int_0^l r_w(x) dx = \frac{8\pi}{7} lL, \quad |\vec{e}_1| = 1 \right)$$

Portanța P și coeficientul de portanță C_P sînt nule, deoarece avem

$$P = - \iint_{(S)} p(\vec{n} \cdot \vec{e}_2) r_w d\varphi dx = - \iint_{(S)} p \cos \omega \cos \varphi r_w d\varphi dx =$$

$$= \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \int_0^l p r_w dx = 0$$

Acest rezultat se datorește simetriei corpului și a mișcării, unghiul de atac față de axa de simetrie fiind nul.

Rezistența la înaintare $\vec{R} = Re_1$ și coeficientul adimensional al rezistenței la înaintare C_R se calculează cu formulele

$$R = - \iint_S p(\vec{n} \cdot \vec{e}_1) r_w d\varphi dx = \iint_S p \sin \omega \cdot r_w d\varphi dx =$$

$$= 2\pi \int_0^l p r_w r'_w dx = \frac{3\pi}{2} \lambda_0 a^2 l p_\infty \quad (21)$$

$$C_R = \frac{2R}{\rho_\infty V_\infty^2 A} = \frac{21}{8} \frac{a^2 \lambda_0}{L} \frac{p_\infty}{\rho_\infty V_\infty^2} \quad (22)$$

În tabelul 4 sînt date valorile coeficienților aerodinamici C_{Fw} și C_R pentru $M_\infty = 20$, $T_\infty = 220^\circ\text{K}$, $\varepsilon = 0,08$, $a = 10^{-1}$, relativ la corpul $r_w = ax^{3/4}$ în cele trei cazuri numerice considerate. În problema stratului limită hipersonic fără interacțiune cu scurgerea exterioară, rezistența la înaintare R și coeficientul C_R nu vor depinde, odată cu presiunea p (prin intermediul lui λ_0), de soluția pozitivă c_0 a ecuației algebrice (I) ci se vor calcula cu ajutorul teoriei mișcării ideale hipersonice.

Tabelul 4

C	Cazul I 1,893·10 ⁷	Cazul II 1,893·10 ⁶	Cazul III 1,893·10 ⁵	$M_\infty = 20$ $T_\infty = 220^\circ\text{K}$ $\varepsilon = 0,08$ $r_w = 10^{-1}x^{3/4}$ $l = 2 \cdot 10^{-1} \text{ m}$ $L = 3 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
R_{eL}				
C_{Fw}	4,74·10 ⁻⁴	8,539·10 ⁻⁴	28,39·10 ⁻⁴	
C_R	3,7187·10 ⁻³	3,7537·10 ⁻³	4,0337·10 ⁻³	

(Intrat în redacție la 24 noiembrie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Moore, F. K., *Theory of Laminar Flows, High Speed Aerodynamics and Jet Propulsion*, IV, Princeton Univ. Press, 1964.
2. Brădeanu, P., *Un calcul aproximativ al stratului limită hipersonic axial-simetric pe corpuri subțiri*, „Studia Univ. Babeș-Bolyai Cluj ser. Math.-Mech.” fasc. 1, 1972.
3. Berezin, I. S., Jidkov, N. P., *Metodă vicislenii*, Gos. Izd: Fiz-Mat. Lit. II, Moskva, 1962.
4. Hayes, W. D., Probstein, R. F., *Hypersonic Flow Theory*, Acad. Press, New-York 1959.
5. Seifert, Howard, *Space Technology*, New-York, John Willey and Sons, Inc. 1959 (art. lui Lester Lees).

ЧИСЛОВОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И ЕГО
ПРИМЕНЕНИЕ В АЭРОДИНАМИКЕ

(Резюме)

В работе изучается алгебраическое уравнение, которое встречается в аэродинамике пограничного сверхзвукового слоя во взаимодействии с внешним течением на тонких вращательных телах. Для чисел Маха $M_\infty = 20$, $\varepsilon = \rho_1/\rho_2 = 8 \cdot 10^{-2}$ и для трёх чисел Рейнолдса ($R_\infty = 6,31 \cdot 10^n$, $n = 4, 3, 2$) вычисляется приближительный положительный корень этого уравнения (с погрешностью менее 10^{-5}), который применяется затем для числового вычисления некоторых аэродинамических характеристик в сверхзвуковом режиме на трёх высотах полёта.

A NUMERICAL SOLUTION OF AN ALGEBRAIC EQUATION AND ITS APPLICATION
IN AERODYNAMICS

(Summary)

An algebraic equation occurring in the aerodynamics of hypersonic boundary layer is studied in interaction with the exterior flow on thin rotation bodies. The approximate positive root of this equation is calculated for Mach numbers $M_\infty = 20$ $\varepsilon = \rho_1/\rho_2 = 8 \cdot 10^{-2}$ and for there Reynolds numbes ($R_\infty = 6,31 \cdot 10^n$, $n = 4, 3, 2$) with an error smaller than 10^{-5} . This is used afterwaras in the numeric calculation of some aerodynamic characteristics in hypersonic state at three flight heights.

RECENZII

Eduard Stiefel, *Einführung in die numerische Mathematik*, Vierte durchgesehene Auflage, Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik, Band 2. G.B. Teubner, Stuttgart, 1969, 257 pp.

This book, which provides an excellent introduction to numerical methods in mathematics, is based on a series of lectures delivered by the author at the Swiss Federal Institute of Technology. It is addressed not only to mathematicians but also to physicists, engineers and others engaged in applying numerical methods to the solution of problems of applied mathematics. This is the reason why the author, who is an eminent specialist in numerical analysis, has adopted an elementary form of presentation.

Although the book has an elementary character it contains some new results; e.g., the Chebyshev approximation, the digression into game theory, the rhombus algorithm and the numerical integration by repeated halving of the step.

A listing of the chapter headings and appendices will serve to outline the wide scope of the book:

1. Linear Algebra; 2. Linear Programming; 3. Least-Squares Approximation and Definite Problems; 4. Nonlinear Algebra; 5. Eigenvalue Problems; 6. Differential Equations; 7. Approximation; Appendix I: Computational Examples; Appendix II: Tables; Appendix III: Problems; Appendix IV: Hints for Solutions of Problems.

The present reissue of the book represents the fourth, revised edition. The first edition was published in 1961, the second in 1963 and the third in 1965. An English translation of the second edition was published by Academic Press, New York, 1963. A French translation of the third edition was published by Dunod, Paris, 1967.

This book constitutes a remarkable and careful introduction to numerical methods and may profitably be used.

D. D. STANCU

Boursin, Jean Louis et Caussat Pierre, *Autopsie du hasard*, Bordas, Coll. Etudes supérieures, 1970. 334 p.

La collaboration entre un mathématicien et un philosophe a produit ce livre attrayant de philosophie et histoire des sciences. Il est utile pour tous ceux qui sont intéressés au Calcul des probabilités, à la formation des notions, à la variabilité de leur contenu et à la fondation d'une branche moderne des mathématiques.

La table des matières est la suivante.

- I. Les disparités du hasard. L'analyse génétique. Les expériences. La théorie. Les problèmes. Les révisions. Essai de classification systématique des sens impliqués dans le terme de hasard. Le principe de la classification. L'analyse du contenu. Les turbulences. Esquisse d'un bilan d'ensemble.
- II. La synthèse impossible. La métaphysique et la recherche de l'ordre: Aristote, Descartes, Leibniz. La science et le chiffre de l'expérience. La résistance de la raison suffisante. Les révisions. La question de l'analyse. Information et instrumentation.
- III. Les stratégies de l'aléatoire. La perception. La raison. L'expérience.
- IV. La probabilité, mesure du hasard.

- V. Le calcul des probabilités.
- VI. L'espérance mathématique.
- VII. Épreuves répétées.
- VIII. Théorie moderne.
- IX. L'usage des lois du hasard. L'égalisation des températures. Le mélange de gaz. L'entropie. Le calcul des probabilités et l'astronomie. Les moyennes.
Tables numériques. Bibliographie.
Notices bibliographiques.

N. GHIRCOIAȘIU

Schwarz, H. R. Rutishauser, H. und Stiefel, E., *Numerik symmetrischer Matrizen. Leitfaden der angewandten Mathematik und Mechanik*, Bd. 11. B.G. Teubner, Stuttgart., 1968.

Le but de ce livre est de décrire les méthodes numériques de résolution des systèmes d'équations linéaires et diverses questions qui s'y rattachent, comme par exemple des problèmes de valeurs propres, de minimum des formes quadratiques, ou d'intégration numérique des équations aux dérivées partielles. La présentation vectorielle permet en même temps la simplification des démonstrations et la mise en évidence d'une unité pour diverses méthodes de calcul numérique.

Le livre contient un grand nombre d'exercices complètement résolus et des programmes Algol pour les procédés de calcul.

Les principaux problèmes traités sont les suivants :

1. Espaces vectoriels. Matrices et formes quadratiques.
2. Méthodes de relaxation, de Gauss-Seidel, de surrelaxation, du gradient, des gradients conjugués.
3. Méthode des moindres carrés. Équations normales de Gauss. Équations de liaison.
4. Problèmes symétriques à valeurs propres. Calcul des valeurs propres.
5. Problèmes aux limites.

Le livre des prof. Schwarz, Rutishauser et Stiefel est très utile pour tous ceux qui s'intéressent à la résolution numérique des problèmes d'algèbre linéaire, soit en vue des applications, soit pour des motifs théoriques. Pour cette dernière catégorie, il contient aussi une riche bibliographie.

N. GHIRCOIAȘIU

Jaeger, Armo und Wenke, Klaus, *Lineare Wirtschafts algebra. Eine Einführung. Leitfaden der angewandten Mathematik und Mechanik*, (LAMM, Nr. 13, B.G. Teubner, Stuttgart, 1969, 334 p. Teubner Studienbücher. Bd. 1,2, B.G. Teubner, Stuttgart, 1969, 334. p.

Le livre est écrit pour les étudiants en sciences économiques et contient les notions fondamentales d'algèbre linéaire, y compris la programmation linéaire, qui est présentée presque en même temps que la résolution des systèmes des équations linéaires. Parallèlement sont aussi introduites, outre les notions de matrice et de déterminant, des notions de la théorie des ensembles, de logique mathématique, d'algèbre abstraite et de la théorie des graphes, nécessaires aux cours ultérieurs économiques et de programmation aux calculateurs électroniques. Dans le dernier chapitre on étudie les systèmes des équations avec un grand nombre de coefficients nuls, la décomposition des systèmes optimaux, la programmation linéaire paramétrée, le problème de transport et des problèmes se réduisant à celui-ci.

Les auteurs ont eu un très grand soin pour vaincre graduellement les difficultés (par exemple pour la méthode simplex, chap. 2), en utilisant un grand nombre d'exercices résolus et un riche matériel illustratif ingénieusement présenté. Il faut aussi remarquer les exemples économiques donnés pour la justification des notions introduites.

Les chapitres de ce livre sont les suivants :

1. Introduction pour les non-mathématiciens
2. Algèbre linéaire élémentaire
3. Ensembles, structures et modèles
4. Familles, n-uples et matrices
5. Linéarité
6. Systèmes d'équations et inéquations linéaires
7. Méthodes spéciales et problèmes

Pour le riche matériel qu'il contient et pour le talent pédagogique avec lequel il est écrit, le livre peut être très utile aussi pour les étudiants, comme pour quiconque désire donner des leçons d'algèbre linéaire aux débutants, particulièrement des leçons de programmation linéaire.

N. GHIRCOIAȘIU

Hermes, H. **Einführung in die mathematische Logik**, B. G. Teubner, Stuttgart, 1969.

In diesem Buch wird dem Mathematikstudenten eine Einführung in die klassische zweiwertige Prädikatenlogik erster und zweiter Stufe geboten. Der Stoff ist mit viel didaktischem Verständnis und Sorgfalt übersichtlich aufgebaut, und durch schrittweises bedachtes Vorgehen, meistens durch Einführen zusätzlicher Hilfssätze, werden auch die schwierigsten Probleme mit Leichtigkeit gemeistert.

Das I. Kapitel enthält eine Einführung in die Problematik der mathematischen Logik. Anhand von geeigneten Beispielen werden dem Leser die Grundbegriffe der Prädikatenlogik nähergebracht, zur Vorbereitung der nachfolgenden exakten Definitionen.

Im II. Kapitel wird eine Sprache der Prädikatenlogik der ersten Stufe entwickelt. Es werden vorläufig nur der Negator, Konjunktork und Generalisator als logische Symbole zugelassen, um, gegenüber anderen Lehrbüchern, den oft unübersichtlichen Formelreichtum der Prädikatenlogik aufs Mindeste zu reduzieren.

Das III. Kapitel enthält die Definitionen und Grundeigenschaften der semantischen Begriffe der Prädikatenlogik. Die Begriffe des Folgerns, der Allgemeingültigkeit und Erfüllbarkeit werden auf den Begriffen der Interpretation und des Modells aufgebaut.

Das IV. Kapitel entwickelt einen Prädikatenkalkül in Gestalt eines Annahmekalküls. Es werden die Begriffe der Ableitbarkeit und Widerspruchsfreiheit definiert, und ihre wichtigsten Eigenschaften in einigen Sätzen festgehalten. Der letzte Paragraph ist der Aussagenlogik gewidmet und enthält den Vollständigkeitsbeweis von Kalmar.

Das V. Kapitel enthält eine klare Formulierung des Henkinschen Beweises für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls, sowie Endlichkeitssätze und den Satz von Skolem.

Im VI. Kapitel wird die Sprache der Logik der zweiten Stufe definiert und anhand der Kategorizität des Peanoschen Axiomensystems wird die Unvollständigkeit dieser Logik nachgewiesen.

Die Sprache der Prädikatenlogik erster Stufe wird im VII. Kapitel durch Einführen des Alternators, Implikators und Partikularisators erweitert. Weiterhin werden einige Sätze über Normalformen entwickelt.

Das letzte, und erst der zweiten Auflage dieses Buches hinzugefügte Kapitel enthält

den Erfüllbarkeitssatz von Robinson, den Interpolationssatz von Craig und den Definierbarkeitssatz von Beth.

STEIN HANNES

Toutes les mathématiques de base en „programmé” méthode Edouard Labin, Volume spécimen. Classes terminales Agro-H.E.C.-I.U.T.-C.N.A.M.-I.N.S.A.- P.C.B. Médecine — sciences économiques et sociales promotion et recyclage des cadres, collection Quantos, Bordas.

Recent a apărut o colecție de 11 volume de cite 150—250 pagini denumite *Quantos* plus un volum specimen. Realizatorul colecției este Eduard Labin (născut în 1910), un licențiat în științe fizice și inginer electronician.

Labin a publicat numeroase studii și lucrări mai vaste. Deține 28 de brevete mondiale. După studii făcute în diferite țări, își îndreaptă atenția către metodele didactice moderne: instruirea programată, mașinile de învățat, metodele audio-vizuale, calculatoare în învățământ.

În tentativa sa de a elabora manuale cât mai utile, Labin a adus și unele îmbunătățiri acestei noi metode. Astfel a apărut colecția amintită, care pe parcurs a primit dimensiuni superioare celei plănuită inițial.

Quantos este o nouă tentativă în învățământul matematic. Nouă atât în ce privește obiectul, cât și dimensiunile, dar nouă mai ales în ce privește metoda expunerii.

Quantos este un curs „fundamentalist” prin excelență. Ne dăm seama tot mai mult că în condițiile în care cunoștințele cresc neîncetat și devin din ce în ce mai complexe, fundamentalismul constituie unicul mijloc de la vârsta de 6 pînă la 60 de ani. În acest curs se insistă mai mult asupra genezei și rolului teoremelor, decît asupra demonstrării lor. Se face des apel la intuiție, la imboldul de a construi, la necesitatea expansiunii, adică la toate demersurile generale ale spiritului prin care caută să stabilească relații. *Quantos* stăruie ca întregul edificiu al matematicii să fie reconstruit de către elev. Aplică metoda nouă numită „instruire programată”. Una dintre caracteristicile esențiale ale acestei metode constă în formularea exactă a obiectivelor urmărite, înaintea fiecărui capitol. Și anume aceste obiective cuprinde și cerința ca elevul să vadă și ce are de făcut cu cunoștințele obținute. Aceste obiective, zise „de comportament”, au fost formulate detaliat pentru

fiecare capitol. Ele sînt întrupate în testele de revizuire („tests de revision”) cu care se termină fiecare capitol.

Quantos abordează și „matematica modernă”. Vorbind de matematica modernă, Labin distinge trei lucruri diferite. Primul constă într-un anumit stil abstract și o metodă axiomatică de introducere a noțiunilor. Al doilea: teoria mulțimilor și spațiile vectoriale. Al treilea: topologia și ansamblul noțiunilor care derivă din definirea distanței și vecinătății dintre două elemente ale unei mulțimi.

Pe scurt: Cursul *Quantos* nu este orientat în sensul și stilul școlii „axiomatică”. Teoria mulțimilor este tratată în primul și al doilea volum, împreună cu teoria grupurilor. Ele reapar și în volumele următoare, ori unde ele pot aduce o contribuție, o mai bună lămurire. Topologia și spațiile metrice nu sînt incluse în curs.

Quantos este conceput și redactat în întregime conform metodei instruirii programate. Această inovație importantă a apărut acum vreo 10 ani în Statele Unite și se răspindește tot mai mult și în Europa. Anume, fiecare segment de studiu, pentru a conduce la obiectivele anterior definite, este fragmentat în pași mici puși între ei în concordanță cu mîgală, pași numiți „item”-uri. Fiecare item tra-

tează de obicei un singur quantum de cunoștințe și pune o întrebare la care elevul trebuie să răspundă. Elevul astfel este mereu activ și deci nu-și pierde interesul față de cele studiate. Fiecare elev învață, singur și își adoptă ritmul care îi convine.

În volumul specimen, pe care-l recenzăm, este reprodus integral cîte un capitol din fiecare volum și deci ne dă o imagine corectă a întregii colecții.

În continuare redăm conținutul celor 11 volume: 1. Numerele naturale și teoria mulțimilor. 2. Alte feluri de numere: relativ întregi, numere raționale și iraționale. 3. Calculul algebric. 4. Coordonate, vectori, spații vectoriale. 5. Algebră liniară. 6. Conceptul de funcție. 7. Funcțiile uzuale. 8. Aprofundarea analizei. 9. Calcul integral, Teoria ecuațiilor. 10. Cîmpul complex și trigonometria. 11. Probabilități și statistici. Fiecare dintre cele 11 fascicule poate fi studiată independent, grație unei fascicule 0, care servește drept ghid și constituie un formular rezumat de un gen nou, foarte util.

Quantos oferă un învățămînt într-adevăr complet al întregii matematici de bază și asimilarea ei profundă și în spirit modern.

ALEXANDRU TOTH



În cel de al XVII-lea an de apariție (1972) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile :

matematică—mecanică (2 fascicule);
fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—mineralogie (2 fascicule);
geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
sociologie;
științe economice (2 fascicule);
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XVII году издания (1972) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* выходит следующими сериями :

математика—механика (2 выпуска);
физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—минералогия (2 выпуска);
география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
социология;
экономические науки (2 выпуска);
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XVII-me année de publication (1972) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes :

mathématiques—mécanique (2 fascicules);
physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—minéralogie (2 fascicules);
géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie;
sociologie;
sciences économiques (2 fascicules);
psychologie—pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).

43875