ANUL XVI 1971

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA
FASCICULUS 1

Redacţia: CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 ● Telefon: 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — CONTENTS

Recenzii — Рецензии — Livres parus — Books

SUR LES MODULES ORDONNÉS LIBRES

P. RIBENBOIM*

Soit R un anneau (commutatif avec unité) ordonné, P_R le cône de ses éléments positifs ; nous supposons que $1 \in P_R$.

Soit L un R-module ordonné, dont P_L désigne le cône des éléments positifs ; ainsi

$$P_L + P_L \subseteq P_L, \quad P_R \cdot P_L \subseteq P_L, \quad P_L \cap (-P_L) = \{0\}.$$

Nous disons que L est le *R-module ordonné libre sur l'ensemble ordonné S* lorsque :

1. il existe une application $u : S \to L$ telle que $u(S) \subseteq P_L$ et u préserve l'ordre.

2. pour tout $R-$module ordonné M (ayant un cône positif P_M) et pour toute application $v : S \to M$ telle que $v(S) \leqslant P_M$ et v préserve l'ordre, il existe un homomorphisme de R-module ordonné $v' : L \to M$ qui est l'unique tel que $v' \circ u = v$.

Remarquons que si L et u existent alors ils sont uniques, à un isomorphisme ordonné près.

En effet, supposons que (L, P_L), (M, P_M) soient des R-modules ordonnés libres sur S, et $u : S \to L$, $v : S \to M$ sont des applications ordonnées telles que $u(S) \subseteq P_L$, $v(S) \subseteq P_M$. Donc il existe des homomorphismes de R-modules ordonnés $v' : L \to M$, $u' : M \to L$ tels que $v' \circ u = v$, $u' \circ v = u$. Alors $v' \circ (u' \circ v) = (v' \circ u') \circ v = v$ et de même $(u' \circ v') \circ u = u$; par l'unicité, $v' \circ u' = id_M$, $u' \circ v' = id_L$. Ainsi u', v' sont des isomorphismes de R-modules tels que $v'(P_L) \subseteq P_M$, $u'(P_M) \subseteq P_L$, c.a.d., u', v' sont des isomorphismes ordonnés.

Nous allons discuter l'existence du R-module ordonné libre sur un ensemble ordonné S.

Dans le cas où S est trivialement ordonné, il est facile de voir que L est le R-module libre engendré par l'ensemble $S \cdot P_L = \left\{ x = \sum_{s \in S} x_s s \,\middle|\, x_s \in P_R \text{ pour tout } s \in S \right\}$ et $u : S \to L$ est l'injection canonique. Ces modules sont parmi ceux appelés „o-free modules" dans notre article [1] ; remarques néanmoins qu'un „o-free module" n'est pas nécessairement o-libre selon notre présente définition et n'a pas été introduit comme la solution d'un problème universel.

---

* Queen's University, Kingston, Ontario, Canada et Institut Henri Poincaré, Paris.

Plus généralement :

a) *Il existe le R-module ordonné libre sur l'ensemble ordonné S.*

Démonstration. Soit L le R-module libre engendré par l'ensemble S, donc chaque élément $x \in L$ s'écrit de façon unique sous la forme $x = \sum_{s \in S} x_s s$. Soit $\operatorname{supp}(x) = \{s \in S | x_s \neq 0\}$ le *support* de l'élément x ; de même, soit $\sigma(x) = \sum_{s \in S} x_s$ la *signature* de x. Nous pouvons identifier S à un sous-ensemble de L au moyen de l'immersion canonique $u : S \to L$.

Soit P_L l'ensemble de toutes les sommes finies d'éléments $x \in L$ du type suivant (appelés *éléments positifs réduits*) : $x = x_s s - x_{s'} s'$, où $x_s, x_{s'} \in R$, $s, s' \in S$, $0 \leqslant x_{s'} \leqslant x_s$, $s' \leqslant s$. Notons que si $x \in P_L$ alors $\sigma(x) \in P_R$.

Nous allons vérifier que P_L est le cône des éléments positifs pour un ordre de L qui le rend un R-module ordonné.

Il est évident que $P_L + P_L \subseteq P_L$. De même, $P_R \cdot P_L \subseteq P_L$, car si $r > 0$ dans R et $x = x_s s - x_{s'} s'$ est un élément positif réduit alors $rx = rx_s s - rx_{s'} s'$ est aussi un élément positif réduit.

Enfin, montrons que $P_L \cap (-P_L) = \{0\}$. Soit $x \in P_L$, $-x \in P_L$, donc $x = x_1 + \ldots + x_m$, $-x = x'_1 + \ldots + x'_n$, où les éléments x_i, x'_j, sont positifs réduits. Montrons que $x = 0$. Soit s_0 un élément maximal de $\operatorname{supp}(x)$, donc il existe un indice i_0 tel que $s_0 \in \operatorname{supp}(x_{i_0})$. Alors s_0 est le plus grand élément de $\operatorname{supp}(x_{i_0})$. Sinon, on aurait $x_{i_0} = r_1 s_1 - r_0 s_0$ avec $0 < r_0 \leqslant r_1$, $s_0 < s_1$; puisque $s_1 \notin \operatorname{supp}(x)$, il existe un indice $i_1 \neq i_0$ tel que $s_1 \in \operatorname{supp}(x_{i_1})$ et $x_{i_1} = r_2 s_2 - r'_1 s_1$, avec $0 < r'_1 \leqslant r_2$, $s_1 < s_2$; de même, puisque $s_2 \notin \operatorname{supp}(x)$ il existe un indice $i_2 \notin \{i_0, i_1\}$, tel que $s_2 \in \operatorname{supp}(x_{i_2})$ et $x_{i_2} = r_3 s_3 - r'_2 s_2$, avec $0 < r'_2 \leqslant r_3$, $s_2 < s_3$. En poursuivant ce raisonnement, on arrive à une contradiction. Ainsi $x_{i_0} = r_0 s_0 - r_1 s_1$, avec $0 < r_0$. Donc $x = \sum_{s \in S} x_s s$ avec $x_{s_0} \geqslant r_0 > 0$. D'autre part, s_0 est aussi un élément maximal de $\operatorname{supp}(-x) = \operatorname{supp}(x)$; puisque $-x \in P_L$ alors $-x_{s_0} > 0$ et ceci est impossible ; donc $\operatorname{supp}(x)$ est vide et $x = 0$.

Nous avons établi que (L, P_L) est un module ordonné. L'injection canonique $u : S \to L$ est telle que $u(S) \subseteq P_L$. En outre, si $s \leqslant s'$ dans S alors $s' - s \in P_L$.

Pour conclure la démonstration, soit donné le R-module ordonné (M, P_M) et l'application $v : S \to M$ telle que $v(S) \subseteq P_M$ et v préserve l'ordre. Puisque L est le R-module libre engendré par S, il existe un homomorphisme de R-modules $v' : L \to M$, unique avec la propriété que $v' \circ u = v$. Il nous reste à montrer que $v'(P_L) \subseteq P_M$. Il suffit de le faire pour les éléments positifs réduits, $x = x_s s - x_{s'} s'$, avec $x_s, x_{s'} \in R$, $s, s' \in S$, $0 \leqslant x_{s'} \leqslant x_s$, $s' \leqslant s$; dans ce cas on a $v(s') \leqslant v(s) \in P_M$ donc $x_{s'} v(s') \leqslant x_{s'} v(s) \leqslant x_s v(s)$ et ainsi $v'(x) = x_s v(s) - x_{s'} v(s') \in P_M$.

Pour un usage ultérieur notons que nous avons établi au cours de la démonstration le fait suivant :

b) *Si L est le R-module ordonné libre sur l'ensemble ordonné S si $x = \sum_{s \in S} x_s s \in P_L$, $x \neq 0$, et si s_0 est un élément maximal du support de x alors $x_{s_0} \in P_R$.*

Faisons les observations suivantes.

Si (R, P_R) est un anneau ordonné filtrant, c.à.d. $R = R_R - P_R$, si L est le R-module ordonné libre sur un ensemble ordonné S alors L est filtrant ($L = P_L - P_L$). En effet, si $x \in L$ on l'écrit $x = \Sigma x_s s$, avec $x_s \in R$, donc $x_s =$

$= x'_s - x''_s$ avec $x'_s, x''_s \in P_R$ et $x = x' - x''$, où $x' = \Sigma x'_s s \in P_L$, $x'' = \Sigma x''_s s \in P_L$, car chaque $x'_s s$, $x''_s s$ appartient à P_L.

Si M, N sont des R-modules ordonnés, si $f : M \to N$ est un o-homomorphisme et si M est filtrant, alors $f(M)$ (avec l'ordre induit $P_{f(M)} = f(M) \cap P_N$) est aussi filtrant.

Pour le résultat suivant, nous avons besoin de considérer une classe d'épimorphismes qui est plus restreinte que celle des o-épimorphismes.

Soient M, N des R-modules ordonnés et $f : M \to N$ un R-homomorphisme. Rappelons que f est appelé un *o-homomorphisme* lorsque $f(P_M) \subseteq P_N$; f est un o-*épimorphisme* lorsque $f(M) = N$ et $f(P_M) = P_N$; f est un o-*monomorphisme* lorsqu'il est injectif et $f^{-1}(P_N) = P_M$.

Nous disons que f est un o-*homomorphisme fort* lorsque $f(P_M) \subseteq P_N$ et il existe un sous-ensemble T de P_M tel que la restriction de f à T soit un isomorphisme ordonné de T sur $P_N \cap f(M)$.

Si f est un o-homomorphisme fort tel que $f(M) = N$ nous disons que f est un o-*épimorphisme fort*. Cette terminologie est justifiée, car tout o-épimorphisme fort est aussi un o-épimorphisme.

Cela étant, nous pouvons démontrer :

c) *Soit R un anneau ordonné (et $1 \in P_R$). Alors tout R-module ordonné filtrant M est l'image d'un R-module ordonné libre L par un* o-*épimorphisme fort.*

Démonstration. Etant donné que $M = P_M - P_M$ alors P_M est un ensemble de générateurs du R-*module* M. Soit S un ensemble ordonné tel qu'il existe un isomorphisme ordonné $v : S \to P_M$. Soit L le R-module ordonné libre sur S. Par définition, il existe un o-homomorphisme $p : L \to M$ unique tel que $p(s) = v(s)$ pour tout $s \in S \in L$. L'image de p est $p(L) = M$ (car M est engendré par P_M).

Enfin, p est un o-épimorphisme fort, car la restriction v de p à S est un isomorphisme ordonné de S sur P_M.

Une autre propriété intéressante est la suivante :

d) *Soit L le R-module ordonné libre sur l'ensemble ordonné S. Soient M, N des R-modules ordonnés, $f : M \to N$ un* o-*épimorphisme fort, $g : L \to N$ un* o-*homomorphisme. Alors il existe un* o-*homomorphisme $h : L \to M$ tel que $f \cdot h = g$.*

Démonstration. De $S \subseteq P_L$ vient $g(S) \subseteq g(P_L) \subseteq P_N$. Puisque f est un o-épimorphisme fort, il existe un sous-ensemble T de P_M tel que la restriction de f à T soit un isomorphisme ordonné sur P_N.

Pour chaque $s \in S$ soit $t(s) \in T$ l'unique élément tel que $f(t(s)) = g(s)$. Alors $t : S \to P_M$ est une application ordonnée car si $s \leqslant s'$ dans S, donc dans L, alors $g(s) \leqslant g(s')$ dans N et par conséquent $t(s) \leqslant t(s')$ dans M. Alors il existe un o-homomorphisme $h : L \to M$ unique tel que $h(s) = t(s)$ pour tout $s \in S$. Donc $f(h(s)) = f(t(s)) = g(s)$ pour tout $s \in S$ et alors $f \circ h = g$, car S engendre le R-module L.

Rappelons [1] qu'un R-module ordonné H est dit o-*projectif* lorsque la condition suivante est satisfaite :

1. Si M, N sont des R-modules ordonnés, si $f : M \to N$ est un o-épimorphisme et $g : H \to N$ est un o-homomorphisme, alors il existe un o-homomorphisme $h : H \to M$ tel que $f \circ h = g$.

Avec la notion de o-épimorphisme fort, nous pouvons introduire la définition suivante : le R-module ordonné H est dit *faiblement* o-*projectif* lorsque la condition suivante est satisfaite :

2. Si M, N sont des R-modules ordonnés, si $f : M \to N$ est un o-épimorphisme fort et $g : H \to N$ est un o-homomorphisme, alors il existe un o-homomorphisme $h : H \to M$ tel que $f \circ h = g$.

Evidemment, tout module ordonné o-projectif est faiblement o-projectif.

Remarquons aussi que *si R est un anneau ordonné (et $1 \in P$) et si H est un R-module ordonné filtrant faiblement o-projectif alors H est un module projectif.*

En effet, par c) il existe un R-module ordonné libre L et un o-épimorphisme fort $f : L \to H$.

Si $g = id_H$ il existe un o-homomorphisme $h : H \to L$ tel que $f \circ h = id_H$; donc H est un facteur direct du R-module libre L, et ainsi H est projectif.

Nous avons les classes suivantes de R-module ordonnés:

I. Modules ordonnés libres sur des ensembles trivialement ordonnés.

II. Modules ordonnés libres.

III. Modules ordonnés o-projectifs.

IV. Modules ordonnés faiblement o-projectifs.

On a les inclusions suivantes:

$$\mathrm{I} \subseteq \mathrm{II} \subseteq \mathrm{IV} \text{ et } \mathrm{I} \subseteq \mathrm{III} \subseteq \mathrm{IV}.$$

Rappelons que nous avons vu en [1] que tout module ordonné libre sur un ensemble trivialement ordonné est o-projectif.

Comme dans [1], nous avons:

e) *Le R-module totalement ordonné L est libre sur un ensemble ordonné S si et seulement si S consiste en un seul élément et si R est un anneau totalement ordonné.*

Démonstration. Si $S = \{s\}$ et R est totalement ordonné alors $L = Rs$ et $P_L = P_R s$ donc L est totalement ordonné, car si $x = rs \notin P_L$ alors $r \notin P_R$ donc $-r \in P_R$ et $-x = (-r)s \in P_L$.

Réciproquement, supposons que L soit totalement ordonné. Montrons d'abord que R est totalement ordonné. Soit $r \in R$, $r \notin P_R$ et prenons $x \in S$; alors $rs \notin P_L$, autrement $rs \in P_L$, $rs \neq 0$ (car $r \neq 0$ et L est un R-module libre), donc $r \in P_L$ en vertu de (b). Il s'en suit que $(-r)s \in P_L$ et par (b) nous concluons que $-r \in P_R$.

Montrons maintenant que S ne peut pas avoir deux éléments distincts s, s'. Car si $s' < s$ alors $s - 2s' \notin P_L$ puisque sa signature $\sigma(s - 2s') = -1 \notin P_R$, et d'autre part $-s + 2s' \notin P_L$ en vertu de (b); donc $s - 2s' \notin P_L \cup (-P_L)$. Dans le cas où s, s' ne sont pas comparables alors on déduit de (b) que $s - s' \notin P_L \cup (-P_L)$.

Si $R = Z$ anneau totalement ordonné des entiers et $S = \{s, s'\}$, considérons les groupes abéliens ordonnés libres L sur S.

Nous avons les cas suivants.

Si s, s' sont incomparables alors $L = Z \times Z$ avec

$$P_L^{(0)} = \{(a, b) | a \geqslant 0,\ b \geqslant 0\},\ s = (0,\ 1),\ s' = (1,\ 0).$$

Si $s < s'$ alors $L = Z \times Z$ avec

$$P_L^{(1)} = \{(a,b) | a \geqslant 0,\ a + b \geqslant 0\},\ s = (0,\ 1),\ s' = (1,\ 0).$$

Enfin, si $s' < s$ nous avons une situation analogue.

Notons que l'application $v : L \to L$ définie par $v(a, b) = (a, -a + b)$ est un isomorphisme tel que $v(P_L^{(0)}) = P_L^{(1)}$, donc un isomorphisme de $(L, P_L^{(0)})$ sur $(L, P_L^{(1)})$; toutefois, cet isomorphisme ne préserve pas S, car $v(1, 0) = (1, -1)$

De même, pour tout entier $n > 0$ soit

$P_L^{(n)} = \{(a, b) | a \geqslant 0, na + b \geqslant 0\}$; alors $(L, P_L^{(n)})$ est un groupe abélien ordonné isomorphe à $(L, P_L^{(0)})$ par l'application $v : L \to L$ définie par $v(a, b) = (a, -na + b)$.

Considérons maintenant l'ensemble

$$P_L = \left\{(a, b) \in L \mid a \geqslant 0,\ b \geqslant -\frac{a(a+1)}{2}\right\},$$

Il est facile de vérifier que (L, P_L) est un groupe abélien ordonné. Si $N^{(n)} = Z \times \times \ldots \times Z$ (n fois) et $P_{N^{(n)}} = \{(a_1 \ldots, a_n) | a_1 \geqslant 0, \ldots, a_n \geqslant 0\}$ alors pour tout o-homomorphisme $v : N^{(n)} \to L$ $v(P_{N^{(n)}})$ est proprement contenu dans P_L, car $v(P_{N^{(n)}})$ est l'ensemble des sommes finies des éléments $v(e_1), \ldots, v(e_n)$ (où $e_1, \ldots e_n$ forment la base canonique de $N^{(n)}$; ceci peut être aisément vérifié.

Il en résulte que si (N, P_N) est un groupe abélien ordonné libre et $v : N \to L$ est un o-épimorphisme alors N a une base infinie. Explicitement, on peut prendre $v(e_1) = (0, 1)$

$v(e_2) = (1, -1), \ldots, v(e_{n+1}) = \left(n, -\frac{n(n+1)}{2}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$. Le noyau de v est trivialement ordonné, car si $x = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \in P_N$ et $v\left(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right) = 0$ alors $a_2 + 2a_3 + 3a_4 + \ldots + (m-1)a_m = 0$, avec chaque $a_i \geqslant 0$; donc $a_2 = a_3 = \ldots . = a_m = 0$ ainsi $x = a_1 e_1$ et enfin, $v(x) = 0$ implique $a_1 = 0$, donc $x = 0$.

(Manuscrit reçu le 16 janvier 1970)

BIBLIOGRAPHIE

1. RIBENBOIM, P., *On ordered modules*, J.f.d.r.u. angew. Math., 225, (1967), 120–146.

ASUPRA MODULELOR ORDONATE LIBERE

(Rezumat)

Fie R un inel ordonat, $1 > 0$. Fie S o mulţime ordonată. Se demonstrează existenţa unui R-modul ordonat liber L peste S, care are proprietatea universală obişnuită. Cu ajutorul noţiunii de o-omomorfism tare se definesc modulele ordonate slab o-proiective. Se arată că dacă R este un inel ordonat, atunci orice R-modul ordonat filtrant este imaginea unui R-modul ordonat liber printr-un o-epimorfism tare.

Lucrarea se încheie cu exemple şi constatări destul de simple: un modul total ordonat este liber pe o mulţime S dacă şi numai dacă el este format dintr-un singur element şi inelul este total ordonat.

О СВОБОДНЫХ УПОРЯДОЧЕННЫХ МОДУЛЯХ

(Резюме)

Пусть R — упорядоченное кольцо, $1 > 0$. Пусть S — упорядоченное множество. Доказывается существование свободного упорядоченного R-модуля L над S, обладающего обыкновенным универсальным свойством. С помощью понятия сильного о-гомоморфизма определяются о-проективные слабо упорядоченные модули. Показывается, что если R — упорядоченное кольцо, тогда любой фильтрующий упорядоченный R-модуль является изображением свободного упорядоченного R-модуля через сильный о-эпиморфизм.

Работа заключается примерами и достаточно простыми констатациями: вполне упорядоченный модуль является свободным на множестве S если и только если он составлен из одного элемента и кольцо вполне упорядочено.

INVARIANTS DE CONTRACTION DANS LES GROUPES

GEORGES CALUGAREANU

Nous signalons, dans ce qui suit, l'existence de certains invariants attachés aux éléments d'un groupe présenté par un système de générateurs et de relations ; ces invariants sont susceptibles d'intervenir en connexion avec des problèmes tels que : problème des mots (Wordproblem), isomorphisme des présentations de groupes, équations dans un groupe, donc des problèmes qui, en général, sont indécidables. L'emploi des invariants de contraction pourra conduire (nous l'espérons) à des critères permettant de reconnaître les cas où ces problèmes sont décidables.

1. Cas d'un groupe libre. Soit G un groupe libre aux générateurs $\{g_i\}$, $i \in I$, où I est un ensemble de nombres réels différents de 0. m étant un mot formé avec les générateurs g_i.

$$m = g_{i_1}^{x_1} g_{i_2}^{x_2} \ \ldots \ g_{i_n}^{x_n} ; \ x_k \in Z \ ; \ i_k \in I ; \ k = 1, \ 2, \ \ldots, \ n$$

désignons par $\overline{m}$ le mot réduit qui résulte de m par application des contractions triviales : $g_i^x g_i^y = g_i^{x+y}$, $g_i^0 = 1$. Appelons „invariant de contraction" toute fonction

$$\varphi(m) = \varphi \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n & \cdots \end{pmatrix}$$

de la double suite entre parenthèses, telle que

$$\varphi(m) = \varphi(\overline{m})$$

pour n'importe quel mot m. Il est entendu que la suite double, formée par les „indices" et „exposants" du mot m, contient toujours un nombre fini (aussi grand que l'on veut) de colonnes $\begin{matrix} x_k \\ i_k \end{matrix}$ pour lesquelles $x_k \neq 0$. Une pareille fonction devra satisfaire aux deux conditions

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{k-1} & 0 & x_{k+1} & \cdots \\ i_1 & \cdots & i_{k-1} & i_k & i_{k+1} & \cdots \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_{k-1} & x_{k+1} & \cdots \\ i_1 & \cdots & i_{k-1} & i_{k+1} & \cdots \end{pmatrix} \tag{1}$$

qui résulte de $g_{i_k}^0 = 1$, et

$$\varphi \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k & x_{k+1} & \cdots \\ i_1 & \cdots & i_k & i_k & \cdots \end{pmatrix} = \varphi \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k + x_{k+1} & \cdots \\ i_1 & \cdots & i_k & \cdots \end{pmatrix} \tag{2}$$

condition imposée par $g_{i_k}^{x_k} g_{i_k}^{x_{k+1}} = g_{i_k}^{x_k + x_{k+1}}$.

Nous verrons qu'il existe une infinité de fonctions φ vérifiant les conditions (1) et (2) et nous indiquerons une méthode qui permet d'obtenir la solution générale de ce problème. Mais voici, dès maintenant, la suite infinie qui nous semble être la plus simple et qui a l'avantage de former un *système complet* d'invariants de contraction :

$$\varphi_1^0(m) = \sum_{1\leq k\leq n} x_k \qquad \varphi_1^1(m) = \sum_{1\leq k\leq n} i_k x_k$$

$$\varphi_2^0(m) = \sum_{1\leq k_1<k_2\leq n} (i_{k_1} - i_{k_2}) x_{k_1} x_{k_2} \qquad \varphi_2^1(m) = \sum_{1\leq k_1<k_2\leq n} (i_{k_1} - i_{k_2}) i_{k_2} x_{k_1} x_{k_2}$$

$$\varphi_3(m) = \sum_{1\leq k_1<k_2<k_3\leq n} (i_{k_1}-i_{k_2})(i_{k_2}-i_{k_3}) x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}, \qquad \varphi_3^1(m) = \sum_{1\leq k'<k_2<k_3\leq n} (i_{k_1}-i_{k_2})(i_{k_2}-i_{k_3}) i_{k_3} x_{k_1}x_{k_2}x_{k_3}$$

. . . .

$$\varphi_p^0(m) = \sum_{1\leq k_1<k_2<\ldots<k_p\leq n} (i_{k_1}-i_{k_2})(i_{k_2}-i_{k_3})\ldots(i_{k_{p-1}}-i_{k_p}) x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_p} \tag{3}$$

$$\varphi_p^1(m) = \sum_{1\leq k_1<k_2<\ldots<k_p\leq n} (i_{k_1}-i_{k_2})(i_{k_2}-i_{k_3})\ldots(i_{k_{p-1}}-i_{k_p}) i_{k_p} x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_p}$$

. . . .

On suppose ici que le mot m possède n „syllabes" $g_{i_k}^{x_k}$; nous dirons alors que la „longueur syllabique" de m est $l(m) = n$, sans exclure le cas où deux syllabes voisines portent le même indice inférieur, ni le cas d'un exposant nul, donc sans supposer que m est un mot réduit. On vérifie, par un calcul direct, que les polynômes (3) sont bien des invariants de contraction.

Remarquons que l'on a, si la longueur syllabique de m est égale à n

$$\varphi_n^0(m) = (i_1-i_2)(i_2-i_3)\ldots(i_{n-1}-i_n)x_1x_2\ldots x_n, \quad \varphi_n^1(m) = (i_1-i_2)(i_2-i_3)\ldots(i_{n-1}-i_n)i_n x_1x_2x_n$$

Si m est un mot réduit, $m = \overline{m}$, on a donc $\varphi_n^0(m) \neq 0$, $\varphi_n^1(m) \neq 0$ (on a $i_n \neq 0$ puisque I ne contient pas le nombre 0) ; dans le cas contraire, $\varphi_n^0(m) = \varphi_n^1(m) = 0$. Dans les deux cas, on a $\varphi_p^0(m) = \varphi_p^1(m) = 0$ pour $p > n$, puisque l'on peut écrire $m = g_{i_1}^{x_1} \ldots g_{i_n}^{x_n} g_{i_n}^0 \ldots g_{i_n}^0$ en ajoutant à la fin de m des syllabes $g_{i_n}^0$ en nombre $p-n$. Dans la double suite infinie (3), les polynômes φ_p^0 et φ_p^1 sont nuls à partir d'une valeur de p. Cette valeur représente la longueur syllabique du mot réduit m. Montrons maintenant que la suite $\{\varphi_p^0(m)\}$, $p \geqslant 1$ permet d'écrire les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mot $\overline{m}$ soit équivalent au mot vide, donc $\overline{m} = 1$.

Théorème 1. *On a* $\overline{m} = 1$ *si, et seulement si* $\varphi_p^0(m) = 0$, $p = 1, 2, \ldots.$

La nécessité est immédiate, puisque l'on peut écrire $1 = g_i^0$.

Admettons que les conditions $\varphi_p^0(m) = 0$ soient satisfaites pour un mot m. Nous pouvons admettre $m = \overline{m}$, puisque les $\varphi_p^0(m)$ sont des invariants de contraction. Si nous supposons alors $\overline{m} \neq 1$, il en résulte une contradiction, car alors $l(m) = n > 0$ et $\varphi_n(m) \neq 0$, m étant réduit. Ainsi, les conditions de l'énoncé sont aussi suffisantes. Comme application, considérons une équation à une inconnue X, dans le groupe G :

$$A_1 X^{\nu_1} A_2 X^{\nu_2} \ldots A_n X^{\nu_n} = 1; \quad \nu_k \in Z,\ k = 1, 2, \ldots, n.$$

où les A_k sont des mots donnés et X est un mot qu'il s'agit de déterminer. L'équation est équivalente au système

$$\varphi_p^0(A_1 X^{\nu_1} A_2 X^{\nu_2} \ldots A_n X^{\nu_n}) = 0, \qquad p = 1, 2, \ldots$$

Or, nous donnerons des formules qui permettent d'exprimer $\varphi_p^0(m_1 m_2 \ldots m_s)$ comme un polynôme par rapport aux $\varphi_q^0(m_k)$, $\varphi_q^1(m_k)$, $q \leqslant p$, $k = 1, 2, \ldots, s$. On obtient donc un système algébrique pour $\varphi_q^0(X)$, $\varphi_q^1(X)$, et ce système pourra avoir ou ne pas avoir des solutions. Admettons que l'on puisse obtenir des valeurs $\varphi_q^0(X)$, $\varphi_q^1(X)$, $q \geqslant 1$ qui vérifient notre système ; on pourra alors calculer X par un algorithme que nous indiquerons plus bas, algorithme qui n'exige que l'application d'opérations rationnelles. D'ailleurs, on a le

THÉORÈME 2. *La double suite* $\{\varphi_p^0(m), \varphi_p^1(m)\}$, $p \geqslant 1$, *donnée par les formules* (3), *forme un système complet d'invariants de contraction.*

Le système est complet en ce sens que si les valeurs de $\varphi_p^0(m)$, $\varphi_p^1(m)$ sont données pour $p \geqslant 1$, il existe (au plus) un seul mot réduit m qui y correspond. Il s'agit donc de montrer que

$$\varphi_p^0(A) = \varphi_p^0(B),\ \varphi_p^1(A) = \varphi_p^1(B),\ \forall p \geqslant 1 \Rightarrow \bar{A} = \bar{B}.$$

Posons

$$A = \prod_{k=1}^{u} g_{i_k}^{x_k}, \qquad B^{-1} = \prod_{k=1}^{v} g_{j_k}^{y_k}.$$

On vérifie sans peine, en revenant à (3), que $\varphi_p^0(m^{-1}) = -\varphi_p^0(m)$. Alors

$$\varphi_p^0(AB^{-1}) = \varphi_p^0(A) + \varphi_p^0(B^{-1}) + \varphi_p^0(A|B^{-1}) = \varphi_p^0(A|B^{-1})$$

en posant

$$\varphi_p^0(A|B^{-1}) = \sum_{q+s=p,\, q\geqslant 1,\, s\geqslant 1,\, 1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_q\leqslant u,\, 1\leqslant h_1<h_2<\cdots<h_s\leqslant v} (i_{k_1}-i_{k_2})\ldots(i_{k_{q-1}}-i_{k_q})(i_{k_q}-j_{h_1})(j_{h_1}-j_{h_2})\ldots(j_{h_{s-1}}-j_{h_s})x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_q}y_{h_1}y_{h_2}\ldots y_{h_s}.$$

On a $\sum_{1\leqslant h_1<h_2<\cdots<h_s\leqslant v} j_{h_1}(j_{h_1}-j_{h_2})\ldots(j_{h_{s-1}}-j_{h_s})y_{h_1}y_{h_2}\ldots y_{h_s} = -\varphi_0^1(B)$, donc, en ouvrant la parenthèse $(i_{k_q} - j_{h_1})$ dans l'expression précédente,

$$\varphi_p^0(A|B^{-1}) = \sum_{q+s=p,\, q\geqslant 1,\, s\geqslant 1} [\varphi_q^1(A)\varphi_s^0(B^{-1}) + \varphi_q^0(A)\varphi_s^1(B)] = \sum [\varphi_q^0(A)\varphi_s^1(B) - \varphi_q^1(A)\varphi_s^0(B)] = 0$$

les termes de la seconde somme se déteruisant deux-à-deux, car

$$\varphi_q^0(A)\varphi_s^1(B) - \varphi_q^1(A)\varphi_s^0(B) + \varphi_s^0(A)\varphi_q^1(B) - \varphi_s^1(A)\varphi_q^0(B) = 0$$

en vertu des égalités $\varphi_p^0(A) = \varphi_p^0(B)$, $\varphi_p^1(A) = \varphi_p^1(B)$. On a donc $\varphi_p^0(A|B^{-1}) = 0$, $\varphi_p^0(AB^{-1}) = 0$, $\forall p \geqslant 1$, En appliquant le Th. 1, on a $\overline{AB^{-1}} = 1$. Or, le mot réduit $\bar{m}$ de m étant unique, indépendent de l'ordre dans lequel les contractions sont effectuées [1], nous pouvons écrire

$$\overline{\bar{A}\bar{B}^{-1}} = 1,\ \overline{\bar{A}(\bar{B})^{-1}} = 1,\ \overline{\overline{\bar{A}(\bar{B})^{-1}}\bar{B}} = \bar{B},\ \overline{\bar{A}\overline{(\bar{B})^{-1}\bar{B}}} = \bar{B}, \qquad \bar{A} = \bar{B}$$

et le théorème est démontré.

Voici un algorithme qui permet de calculer, par des opérations rationnelles, le mot m, lorsque les valeurs $\{\varphi_p^0(m), \varphi_p^1(m)\}$, $p \geqslant 1$ sont données. Soit n la plus grande valeur de p telle que $\varphi_p^0(m)\varphi_p^1(m) \neq 0$. On a alors $l(\overline{m}) = n$ et

$$\varphi_n^0(m) = (i_1-i_2) \;..\; (i_{n-1}-i_n)x_1x_2 \;..\; x_n \neq 0$$

$$\varphi_n^1(m) = (i_1-i_2) \;..\; (i_{n-1}-i_n)i_nx_1x_2 \;..\; x_n$$

d'où

$$i_n = \frac{\varphi_n^1(m)}{\varphi_n^0(m)}.$$

Pour $n = 1$ on a $\varphi_1^0(m) = x_1$, $\varphi_1^1(m) = i_1x_1$, d'où x_1 et i_1. Pour $n > 1$, posons $m' = \overline{m}g_{i_n}^{-x_n}$; on obtient donc m' en supprimant la dernière syllabe dans $\overline{m}$, donc

$$l(\overline{m}') < n, \quad \varphi_n^0(m') = \varphi_n^0(\overline{m}') = 0. \quad \text{Mais}$$

$$\varphi_n^0(m') = \varphi_n^0(\overline{m}g_{i_n}^{-x_n}) = \varphi_n^0(\overline{m}) + \varphi_n^0(g_{i_n}^{-x_n}) + \varphi_n^0(\overline{m}|g_{i_n}^{-x_n}) = 0$$

$$\varphi_n^0(\overline{m}|g_{i_n}^{-x_n}) = \varphi_{n-1}^1(m)(-x_n) - i_n(-x_n)\varphi_{n-1}^0(m) = x_n[i_n\varphi_{n-1}^1(m) - \varphi_{n-1}^1(m)]$$

On a $\varphi_n^0(g_{i_n}^{-x_n}) = 0$ pour $n > 1$, et l'on obtient

$$x_n = \frac{[\varphi_n^0(m)]^2}{\varphi_n^0(m)\varphi_{n-1}^1(m) - \varphi_n^1(m)\varphi_{n-1}^0(m)}.$$

La dernière syllabe $g_{i_n}^{x_n}$ de $\overline{m}$ est donc calculée, et il reste à calculer m', ce que nous ferons par récurrence. Calculons donc $\{\varphi_p^0(m'), \varphi_p^1(m')\}$, $p \geqslant 1$, afin de pouvoir reprendre sur m' le calcul effectué sur m. On a

$$\varphi_p^0(m) = \varphi_p^0(m'g_{i_n}^{x_n}) = \varphi_p^0(m') + \varphi_p^0(g_{i_n}^{x_n}) + \varphi_p(m'|g_{i_n}^{x_n})$$

$$\varphi_p^0(m'|g_{i_n}^{x_n}) = \sum_{1<k_1<k_2\cdots<k_{p-1}<n-1}(i_{k_1}-i_{k_2})\;..\;(i_{k_{p-2}}-i_{k_{p-1}})(i_{k_{p-1}}-i_n)x_{k_1}x_{k_2}\;..\;x_{k_{p-1}}x_n =$$

$$= x_n[\varphi_{p-1}^1(m') - i_n\varphi_{p-1}^0(m')], \quad \varphi_p^0(g_{i_n}^{x_n}) = 0, \; p > 1$$

$$\varphi_p^0(m') + x_n[\varphi_{p-1}^1(m') - i_n\varphi_{p-1}^0(m')] = \varphi_p^0(m). \tag{4}$$

Ensuite

$$\varphi_p^1(m) = \varphi_p^1(m') + \varphi_p^1(m'|g_{i_n}^{x_n})$$

$$\varphi_p^1(m'|g_{i_n}^{x_n}) = \sum_{1<k_1<k_2<\cdots<k_{p-1}<n-1}(i_{k_1}-i_{k_2})\;..\;(i_{k_{p-2}}-i_{k_{p-1}})(i_{k_{p-1}}-i_n)i_nx_{k_1}x_{k_2}\;..\;x_{k_{p-1}}x_n =$$

$$= i_nx_n[\varphi_{p-1}^1(m') - i_n\varphi_{p-1}^0(m')]$$

$$\varphi_p^1(m') + i_nx_n[\varphi_{p-1}^1(m') - i_n\varphi_{p-1}^0(m')] = \varphi_p^1(m). \tag{5}$$

Or, (4) et (5) permettent le calcul récurrent des $\varphi_p^0(m')$, $\varphi_p^1(m')$, en partant de $\varphi_1^0(m') = x_1+x_2+\ldots + x_{n-1}= \varphi_1^0(m) - x_n$, $\varphi_1^1(m') = i_1x_1 + \ldots i_{n-1}x_{n-1} = \varphi_1^1(m) - i_nx_n$. Remarquons la combinaison de (4) et (5)

$$\varphi_p^1(m') - i_n\varphi_p^0(m') = \varphi_p^1(m) - i_n\varphi_p^0(m), \forall p \geqslant 1.$$

En remplaçant p par $p-1$ et en introduisant dans (4) et (5)

$$\varphi_p^0(m') = \varphi_p^0(m) - x_n[\varphi_{p-1}^1(m) - i_n\varphi_{p-1}^0(m)]$$

$$\varphi_p^1(m') = \varphi_p^1(m) - i_nx_n[\varphi_{n-1}^1(m) - i_n\varphi_{p-1}^0(m)].$$

Posons, pour simplifier l'écriture, $\varphi_p{}^{\iota} = \varphi_p^0(m)$, $\varphi_p{}^1 = \varphi_p^1(m)$. On trouve

$$\left.\begin{aligned}\varphi_n^0(m') &= \frac{\varphi_p^0(\varphi_n^0\varphi_{n-1}^1 - \varphi_n^1\varphi_{n-1}^0) - \varphi_n^0(\varphi_n^0\varphi_{p-1}^1 - \varphi_n^1\varphi_{p-1}^0)}{\varphi_n^0\varphi_{n-1}^1 - \varphi_n^1\varphi_{n-1}^0}\\ \varphi_p^1(m') &= \frac{\varphi^1(\varphi_n^0\varphi_{n-1}^1 - \varphi_n^1\varphi_{n-1}^0) - \varphi_n^1(\varphi_n^0\varphi_{p-1}^1 - \varphi_n^1\varphi_{p-1}^0)}{\varphi_n^0\varphi_{n1-}^1 - \varphi_n^1\varphi_{n-1}^0}\end{aligned}\right\} p \geqslant 2 \qquad (6)$$

$$\varphi_1^0(m') = \varphi_1^0 - \frac{(\varphi_n^0)^2}{\varphi_n^0\varphi_{n-1} - \varphi_n^1\varphi_{n-1}^0}, \quad \varphi_1^1(m') = \varphi_1^1 - \frac{\varphi_n^0\varphi_n^1}{\varphi_n^0\varphi_{n-1}^1 - \varphi_n^1\varphi_{n-1}^0}.$$

En posant $m'' = m'g_{i_{n-1}}^{-x_{n-1}}$, on pourra reprendre le calcul sur m'', m' et déterminer i_{n-1} et x_{n-1}, etc. On a les formules de récurrence, avec $m^{(0)} = m$,

$$i_n = \frac{\varphi_n^1(m)}{\varphi_n^0(m)}, \quad x_n = \frac{[\varphi_n^0(m)]^2}{\varphi_n^0(m)\varphi_{n-1}^1(m) - \varphi_n^1(m)\varphi_{n-1}^0(m)}$$

$$\varphi_p^0(m^{(q+1)}) = \varphi_p{}^0(m^{(q)}) - x_{n-q}[\varphi_{p-1}^1(m^{(q)}) - i_{n-q}\varphi_{p-q}^0(m^{(q)})]$$

$$\varphi_p^1(m^{(q+1)}) = \varphi_p^1(m^{(q)}) - i_{n-q}x_{n-q}[\varphi_{p-1}^1(m^{(q)}) - i_{n-q}\varphi_{p-1}^0(m^{(q)})] \qquad q \geqslant 0.$$

$$i_{n-q-1} = \frac{\varphi_{n-q-1}^1(m^{(q+1)})}{\varphi_{n-q-1}^0(m^{(q+1)})},$$

$$x_{n-q-1} = \frac{[\varphi_{n-q-1}^0(m^{(q+1)})]^2}{\varphi_{n-q-1}^0(m^{(q+1)})\varphi_{n-q-2}^1(m^{(q+1)}) - \varphi_{n-q-1}^1(m^{(q+1)})\varphi_{n-q-2}^0(m^{(q+1)})}. \qquad (7)$$

On pourra donc, par ces calculs, déterminer successivement les i_k, x_k et finalement le mot réduit $\overline{m}$.

2. Formation des invariants de contraction dans un groupe libre. Pour obtenir la solution générale du système (1), (2), nous admettrons que φ est une fonction analytique, holomorphe en chaque x_k dans un voisinage de l'ensemble Z des entiers réels, et en chaque i_k dans un voisinage de l'ensemble I. D'ailleurs, les solutions polynomiales seront les plus intéressantes, par raison de simplicité.

Pour $n = 1$, le problème est sans objet, le mot g_i^x étant réduit ; nous prendrons $\varphi\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix} = 0$, donc $\varphi\begin{pmatrix}x\\ i\end{pmatrix} = x\omega_1\begin{pmatrix}x\\ i\end{pmatrix}$, ω_1 étant une fonction arbitraire de x et i (avec les conditions d'holomorphie déjà précisées). Simplifions l'écriture en posant

$$\begin{pmatrix}a & b & .. & l\\ \alpha & \beta & .. & \lambda\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}x_a & x_b & .. & x_l\\ i_\alpha & i_\beta & .. & i_\lambda\end{pmatrix}, \text{ donc} \begin{pmatrix}1 & 2 & .. & n\\ 1 & 2 & .. & n\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}x_1 x_2 & .. & x_n\\ i_1 i_2 & .. & i_n\end{pmatrix}$$

lorsque $x_k = 0$ pour $k > n$. On trouve la solution générale de ce problème en formant une relation de récurrence qui ramène le calcul de $\varphi(m)$ pour un mot de longueur syllabique n au calcul de φ pour les mots de longueur syllabique $<n$. On y arrive par le procédé suivant, que nous indiquons sur l'exemple $n=4$. Il s'agit donc de calculer

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ i_1 & i_2 & i_3 & i_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Considérons l'expression

$$E\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

qui s'annule évidemment pour $i_2 = i_1$. De même

$$E'\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} - E\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 4\end{pmatrix}$$

s'annule pour $i_3 = i_2$ et pour $i_2 = i_1$. Enfin

$$E''\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = E'\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} - E'\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 3\\ 1 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

s'annule pour $i_4 = i_3$, pour $i_3 = i_2$ et pour $i_2 = i_1$. On a

$$E'' = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

On voit facilement que E'' s'annulle pour $x_2 = 0$, ou $x_3 = 0$, ou $x_4 = 0$. On obtient une expression qui s'annulle également pour $x_1 = 0$ en retranchant de E' sa valeur pour $x_1 = 0$. On a donc

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 3 & 3\end{pmatrix} +$$
$$+ \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 3\end{pmatrix} -$$
$$- \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 3 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} =$$
$$= x_1 x_2 x_3 x_4 (i_1 - i_2)(i_2 - i_3)(i_3 - i_4)\, \omega_4\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}$$

ω_4 étant une fonction arbitraire. Or, cette égalité s'écrit

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&2&4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&3&3\end{pmatrix} - \\
&- \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&2&3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&1&2&3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&3&4\\2&3&4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&3&4\\1&3&4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&3&4\\2&2&4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&3&4\\2&3&3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&4\end{pmatrix} + \\
&+ \begin{pmatrix}2&3&4\\1&3&3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2&3&4\\2&2&3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2&3&4\\1&2&3\end{pmatrix} + x_1x_2x_3x_4(i_1-i_2)(i_2-i_3)(i_3-i_4)\omega_4\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&2&3&4\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{8}
$$

et constitue une relation de récurrence, car, en appliquant (2), toutes les parenthèses à 4 colonnes au second membre se réduisent à des parenthèses à 3 ou 2 colonnes. Le procédé est général, et l'on est ainsi conduit à la relation de récurrence

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix}12&..&n\\12&..&n\end{pmatrix} &= \sum_{2<k<n}\begin{pmatrix}1&..&k&..&n\\1&..&k-1&..&n\end{pmatrix} - \sum_{2<k<l<n}\begin{pmatrix}1&..&k&..&l&..&n\\1&..&k-1&..&l-1&..&n\end{pmatrix} + \,..\\
&+(-1)^S\sum_{2<k_1<k_2<\cdots<k_S<n}\begin{pmatrix}1&..&k_1&..&k_2&..&k_S&..&n\\1&..&k_1-1&..&k_2-1&..&k_S-1&..&n\end{pmatrix} + \,..\, + (-1)^n\begin{pmatrix}123&..&n\\112&..&n-1\end{pmatrix} + \\
&+\begin{pmatrix}2&..&n\\2&..&n\end{pmatrix} - \sum_{2<k<n}\begin{pmatrix}2&..&k&..&n\\2&..&k-1&..&n\end{pmatrix} + \cdots + \\
&+(-1)^{S+1}\sum_{2<k_1<k_2<\cdots<k_S<n}\begin{pmatrix}2&..&k_1&..&k_2&..&k_S&..&n\\2&..&k_1-1&..&k_2-1&..&k_S-1&..&n\end{pmatrix} + \\
&+(-1)^{n-1}\begin{pmatrix}23&..&n\\12&..&n-1\end{pmatrix} + x_1x_2\,..\,x_n(i_1-i_2)(i_2-i_3)\,..\,(i_{n-1}-i_n)\omega_n\begin{pmatrix}12&..&n\\12&..&n\end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ω_n étant une fonction arbitraire. La formule (8) permet le calcul successif de ces invariants. Ainsi

$$
\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = x_1x_2\;(i_1-i_2)\,\omega_2\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}
$$

qui devient, avec les notations initiales,

$$
\varphi\begin{pmatrix}x_1&x_2\\i_1&i_2\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}x_1+x_2\\i_1\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}x_2\\i_2\end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix}x_2\\i_1\end{pmatrix} + x_1x_2\,(i_1-i_2)\,\omega_2\begin{pmatrix}x_1&x_2\\i_1&i_2\end{pmatrix}
$$

donc, avec $\varphi\begin{pmatrix}x\\i\end{pmatrix} = x\omega_1\begin{pmatrix}x\\i\end{pmatrix}$,

$$
\varphi\begin{pmatrix}x_1&x_2\\i_1&i_2\end{pmatrix} = (x_1+x_2)\;\omega_2\begin{pmatrix}x_1+x_2\\i_1\end{pmatrix} + x_2\left[\omega_1\begin{pmatrix}x_2\\i_1\end{pmatrix} - \omega_1\begin{pmatrix}x_2\\i_1\end{pmatrix}\right] + x_1x_2\,(i_1-i_2)\omega_2\begin{pmatrix}x_1&x_2\\i_1&i_2\end{pmatrix}
$$

ω_1 et ω_2 étant des fonctions arbitraires. Ensuite, on trouve

$$\varphi\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ i_1 & i_2 & i_3\end{pmatrix} = \varphi\begin{pmatrix}x_1, & x_2 + x_3\\ i_1 & i_2\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}x_1 + x_2, & x_3\\ i_1 & i_3\end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix}x_1 + x_2, & x_3\\ i_1 & i_2\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}x_2 & x_3\\ i_2 & i_3\end{pmatrix} -$$
$$- \varphi\begin{pmatrix}x_2 + x_3\\ i_2\end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix}x_2 & x_3\\ i_1 & i_3\end{pmatrix} + \varphi\begin{pmatrix}x_2 & x_3\\ i_1 & i_2\end{pmatrix} + x_1x_2x_3(i_1 - i_2)(i_2 - i_3)\,\omega_3\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ i_1 & i_2 & i_3\end{pmatrix}$$

et en appliquant la formule précédente

$$\phi\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ i_1 & i_2 & i_3\end{pmatrix} = (x_1 + x_2 + x_3)\,\omega_1\begin{pmatrix}x_1 + x_2 + x_3\\ i_1\end{pmatrix} + (x_2 + x_3)\left[\omega_1\begin{pmatrix}x_2 + x_3\\ i_2\end{pmatrix} -\right.$$
$$\left.- \omega_1\begin{pmatrix}x_2 + x_3\\ i_1\end{pmatrix}\right] + x_3\left]{}_1\omega\begin{pmatrix}x_3\\ i_3\end{pmatrix} - \omega_1\begin{pmatrix}x_3\\ i_2\end{pmatrix}\right] + (i_1 - i_2)\left[x_1(x_2 + x_3)\,\omega_2\begin{pmatrix}x_1, & x_2 + x_3\\ i_1 & i_2\end{pmatrix} -\right.$$
$$\left.- (x_1 + x_2)\,x_3\,\omega_2\begin{pmatrix}x_1 + x_2, & x_3\\ i_1 & i_2\end{pmatrix} + x_2x_3\omega_2\begin{pmatrix}x_2, & x_3\\ i_1, & i_2\end{pmatrix}\right] + (i_2 - i_3)\,x_2x_3\,\omega_2\begin{pmatrix}x_2, & x_3\\ i_2 & i_3\end{pmatrix} +$$
$$+ (i_1 - i_3)\left[(x_1 + x_2)\,x_3\,\omega_2\begin{pmatrix}x_1 + x_2, & x_3\\ i_1 & i_3\end{pmatrix} - x_2\,x_3\,\omega_2\begin{pmatrix}x_2, & x_3\\ i_1, & i_3\end{pmatrix}\right] +$$
$$+ x_1x_2x_3\,(i_1 - i_1)(i_2 - i_3)\,\omega_3\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ i_1 & i_2 & i_3\end{pmatrix}$$

ω_1, ω_2, ω_3 étant des fonctions arbitraires. On voit de proche en proche que $\begin{pmatrix}1 & 2 & .. & n\\ 1 & 2 & .. & n\end{pmatrix}$ dépend de n fonctions arbitraires $\omega_1, \omega_2, \ldots \omega_n$, avec $\omega_k = \omega_k\begin{pmatrix}1 & 2 & .. & k\\ 1 & 2 & .. & k\end{pmatrix}$. En identifiant à zéro toutes ces fonctions, sauf l'une d'entre elles, on obtient, pour chaque valeur de n, une suite de n invariants φ_n^s, $s = 1, 2, .., n$, dépendant chacun d'une seule fonction arbitraire ω_s. Ainsi

$$\varphi_n^1 = (x_1 + .. + x_n)\,\omega_1\begin{pmatrix}x_1 + .. + x_n\\ i_1\end{pmatrix} + \sum_{2<k<n}(x_k + .. + x_n)\left[\omega_1\begin{pmatrix}x_k + .. + x_n\\ i_k\end{pmatrix} -\right.$$
$$\left.- \omega_1\begin{pmatrix}x_k + .. + x_n\\ i_{k-1}\end{pmatrix}\right].$$

L'expression générale de φ_n^s à l'aide de la fonction arbitraire ω_s est compliquée ; on remarque, toutefois, que si l'on admet pour ω_s un polynôme arbitraire par rapport aux $2s$ variables dont dépend cette fonction, φ_n^s est une combinaison linéaire, à coefficients arbitraires, des expressions

$$\varphi_n^p(m\,;\,\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_p) = \sum_{1<k_1<k_2<\,..\,<k_p<n}(i_{k_1} - i_{k_2})\,(i_{k_2} - i_{k_3})\,..\,(i_{k_{p-1}} - i_{k_p})\,i_{k_1}^{\alpha_1}\,i_{k_2}^{\alpha_2}\,..\,i_{k_p}^{\alpha_p} \times$$
$$\times P_{k_1k_2..k_p}(x_1, x_2, .., x_n)$$

où $P_{k_1k_2..k_p}$ est un polynôme à déterminer.

L'expression de φ_n^p se simplifie dans les deux cas :

$$\varphi_n^p\,(m\,;\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_p) = \sum_{1<k_1<\ldots<k_{p-1}<n-1} (i_{k_1}-i_{k_1+1})\,(i_{k_2}-i_{k_2+1})\,\ldots\,(i_{k_{p-1}}-i_{k_{p-1}+1})\times$$

$$\times\,(x_1+\ldots+x_{k_1})^{\lambda_1}\,(x_{k_1+1}+\ldots+x_{k_2})^{\lambda_2}\ldots(x_{k_{p-1}}+\ldots+x_n)^{\lambda_p}\,] \tag{10}$$

$$\varphi_n^p(m\,;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p) = \sum_{1<k_1<k_2<\cdots<k_p<n} (i_{k_1}-i_{k_2})(i_{k_2}-i_{k_3})\ldots(i_{k_{p-1}}-i_{k_p})\,i_{k_1}^{\alpha_1}i_{k_2}^{\alpha_2}\ldots i_{k_p}^{\alpha_p}x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_p} \tag{11}$$

Nous avons vu que le second système est complet même en se bornant à $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{p-1} = 0$, $\alpha_p = 0, 1$. Mais ce système (11), avec $\alpha_\nu \geqslant 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, p$, quoique surabondant, est nécessaire pour obtenir des formules de calcul effectif, comme nous le verrons par la suite. Dans ce qui suit, nous nous contenterons d'employer les invariants (11), qui semblent suffire pour les applications.

3. Invariants d'un produit. Pour le calcul effectif avec des invariants (3) il est nécessaire d'avoir des formules qui donnent les invariant du produit de plusieurs mots en fonction des invariants de ces mots. Considér. la suite d'invariants de contraction

$$\varphi_p(m\,;\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_p) = \sum_{1<k_1<k_2<\cdots<k_p<n} (i_{k_1}-i_{k_2})\ldots(i_{k_{p-1}}-i_{k_p})\,i_{k_1}^{\alpha_1}i_{k_2}^{\alpha_2}\ldots i_{k_p}^{\alpha_p}x_{k_1}x_{k_2}\ldots x_{k_p}.$$

On a

$$\varphi_p(m^{-1}\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) = -\,\varphi_p(m\,;\alpha_p,\alpha_{p-1},\ldots,\alpha_1)$$

et, pour un produit de deux mots, $m_1 = \prod_k g_{i_k}^{x_k}$, $m_2 = \prod_k g_{i_k}^{y_k}$, $\varphi_p(m_1|m_2\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) = \varphi_p(m_1\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) + \varphi_p(m_2\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) + \varphi_p(m_1|m_2\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ avec

$$\varphi_p(m_1|m_2\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) = \sum_{r+s=p,\,r\geq1,\,s\geq1} \varphi_{r,s}(m_1|m_2\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$$

$$\varphi_{r,s}(m_1|m_2\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) = \sum_{r<k_1<k_2<\cdots<k_r,\;1<h_1<h_2<\cdots<h_s} (i_{k_1}-i_{k_2})\ldots(i_{k_{r-1}}-i_{k_r})(i_{k_r}-j_{h_1})(j_{h_1}-j_{h_2})\ldots$$

$$\ldots(j_{h_{s-1}}-j_{h_s})\,i_{k_1}^{\alpha_1}\ldots i_{k_r}^{\alpha_r}j_{h_1}^{\alpha_{r+1}}\ldots j_{h_s}^{\alpha_p}x_{k_1}\ldots y_{h_s}.$$

En ouvrant la parenthèse $(i_{k_r}-j_{h_1})$ on trouve

$$\varphi_{r,s}(m_1|m_2\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) = \varphi_r(m_1\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_1+1)\,\varphi_s(m_2\,;\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_p) -$$

$$-\,\varphi_r(m_1\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\,\varphi_s(m_2\,;\alpha_{r+1}+1,\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_p).$$

Ainsi

$$\varphi_p(m_1\,m_2\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) = \varphi_p(m_1\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) + \varphi_p(m_2\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) +$$

$$+\sum\,[\varphi_r(m_1\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r+1)\,\varphi_s(m_2\,;\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_p) -$$

$$-\,\varphi_r(m_1\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\,\varphi_s(m_2\,;\alpha_{r+1}+1,\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_p)]. \tag{12}$$

Si $p = 1$, $\varphi_1^\alpha(m) = \sum_{k \geqslant 1} i_k^\alpha x_k$, on trouve $\varphi_1^\alpha(m_1\ m_2) = \varphi_1^\alpha(m_1) + \varphi_1^\alpha(m_2)$. Pour un produit $m_1\ m_2 \ldots m_\nu$ on a donc $\varphi_1^\alpha(m_1\ m_2 \ldots m_\nu) = \varphi_1^\alpha(m_1) + \varphi_1^\alpha(m_2) + \ldots + \varphi_1^\alpha(m_\nu)$ et, si $p > 1$, on a la formule de récurrence, qui résulte de (12),

$$\begin{aligned}\varphi_p(m_1 m_2 \ldots m_\nu\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) &= \varphi_p(m_1 m_2 \ldots m_{\nu-1}\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) + \varphi_p(m_\nu\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) + \\ &+ \sum_{r+s=p,\, r\geqslant 1,\, s\geqslant 1} [\varphi_r(m_1 \ldots m_{\nu-1}\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r+1)\,\varphi_s(m_\nu\,;\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_p) - \\ &- \varphi_r(m_1 \ldots m_{\nu-1}\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_r)\,\varphi_s(m_\nu\,;\alpha_{r+1}+1,\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_p)]\end{aligned} \tag{13}$$

Ainsi, pour $p = 3$, on trouve

$$\begin{aligned}\varphi_p(m_1 m_2 m_3\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) &= \sum_1^3 \varphi_p(m_i\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) + \\ &+ \sum_{\substack{i=1,\,j=2\\ i=1,\,j=3\\ i=2,\,j=3}} \sum_{r+s=p} \begin{vmatrix} \varphi_r(m_i\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_r+1), & \varphi_s(m_j\,;\alpha_{r+1}+1,\alpha_{r+2},\ldots,\alpha_p) \\ \varphi_r(m_i\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_r), & \varphi_s(m_j\,;\alpha_{r+1},\ldots,\alpha_p)\end{vmatrix} + \\ &+ \sum_{u+v+s=p} \begin{vmatrix} \varphi_u(m_1;\alpha_1,\ldots,\alpha_{u-1},\alpha_u+1), & \varphi_u(m_1;\alpha_1,\ldots,\alpha_u), & 0 \\ \varphi_v(m_2;\alpha_{u+1}+1,\alpha_{u+2},\ldots,\alpha_{u+v}+1), & \varphi_v(m_2;\alpha_{u+1},\ldots,\alpha_{u+v}+1), & \varphi_s(m_3;\alpha_{u+v+1}+1,\alpha_{u+v+2},\ldots,\alpha_p) \\ \varphi_v(m_2;\alpha_{u+1}+1,\alpha_{u+2},\ldots,\alpha_{u+v}), & \varphi_v(m_2;\alpha_{u+1},\ldots,\alpha_{u+v}), & \varphi_s(m_3;\alpha_{u+v+1},\ldots\alpha_p)\end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{14}$$

Posons, dans (12), $m_1 = m$, $m_2 = m^{-1}$. On a l'identité

$$\begin{aligned}0 &= \varphi_p(m\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) - \varphi_p(m\,;\alpha_p,\ldots,\alpha_1) - \\ &- \sum_{\substack{r+s=p\\ r\geqslant 1,\ s\geqslant 1}} \begin{vmatrix} \varphi_r(m\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_{r-1},\alpha_r+1), & \varphi_s(m\,;\alpha_p,\ldots,\alpha_{r+1}+1) \\ \varphi_r(m\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_r), & \varphi_s(m\,;\alpha_p,\ldots,\alpha_{r+1})\end{vmatrix},\end{aligned} \tag{15}$$

qui permet d'exprimer la différence $\varphi_p(m\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p) - \varphi_p(m\,;\alpha_p,\ldots,\alpha_1)$ à l'aide des $\varphi_k(m)$, $k < p$.

4. Invariants de contraction dans les groupes à relations. Soit G un groupe dont les générateurs g_i, $i \in I$, sont liés par une relation $R = 1$. Le relateur R est donc un mot $R = g_{\rho_1}^{y_1} g_{\rho_2}^{y_2} \ldots g_{\rho_t}^{y_t}$, les ρ_ν appartenant à l'ensemble de indices I, et les exposants y_ν étant des entiers. On se demande s'il existe des *invariants de contraction par rapport à* R, permettant de caractériser les éléments du groupe G; c'est l'extension à un groupe G de la propriété suivante, établie plus haut pour un groupe libre: la double suite $\{\varphi_p^0(m), \varphi_p^1(m)\}$, $p \geqslant 1$, définit l'élément du groupe libre $\{g_i\,; i \in I\}$ dont le mot m est un représentant. Une fonction $\psi(m\,;R)$ sera un invariant de contraction par rapport à R si, pour toute décomposition $m = \mu\nu$, on a

$$\psi(\mu R \nu\,;R) = \psi\,(\mu\nu\,;R) = \psi(m\,;R).$$

On peut donc insérer le mot R n'importe où dans m sans que $\psi\,(m\,;\,R)$ change de valeur. Nous verrons que l'on peut construire une infinité de tels invariants. Il se pose alors le problème de savoir si une telle suite permet de caractériser l'élément du groupe G dont m est un représentant. Pour plus de précision, voici quelques définitions :

Insertion du mot R dans le mot m : formation du mot $\mu R\nu$ pour une décomposition quelconque $m = \mu\nu$. L'opération inverse revient à l'insertion de R^{-1} dans $\mu R\nu$, et redonne $\mu RR^{-1}\nu = \mu\nu = m$.

Invariant de contraction par rapport à R: combinasion linéaire finie $\psi_p(m\,;\,R)$ des $\varphi_p^{\alpha_1,\dots,\alpha_p}(m)$, pour p fixe, qui garde sa valeur après toute insertion de R ou R^{-1} dans m, et ceci pour n'importe quel mot m. On a donc $\psi_p(\mu R\nu\,;\,R) = \psi_p(\mu\nu\,;\,R)$ quels que soient les mots μ et ν. D'ailleurs, $\psi_p(m\,;\,R)$ est invariant par rapport aux contractions triviales, puisque les $\varphi_p(m)$ sont des invariants de contraction du groupe libre.

Remarque. Si $\psi_p(m\,;\,R)$ est un invariant de contraction par rapport à R, il est aussi un invariant de contraction par rapport à $R_1 = \sigma^{-1}R\sigma$, quel que soit σ, et réciproquement. En effet, on a

$$\psi_p(\mu R_1\nu\,;\,R) = \psi_p(\mu\sigma^{-1}R\sigma\nu\,;\,R) = \psi_p(\mu\sigma^{-1}\sigma\nu\,;\,R) = \psi_p(\mu\nu\,;\,R) = \psi_p(m\,;\,R).$$

L'insertion de R_1 dans m transforme donc $\psi_p(m;R)$ en lui-même; on a $\psi_p(m\,;R_1) = \psi_p(m\,;\,R)$.

D'une manière générale, si G est un groupe aux relations $R_1 = R_2 = \dots = R_q = 1$, $\psi(m\,;\,R_1,\,R_2,\,\dots,\,R_q)$ sera un invariant relatif aux relateurs $R_1, R_2, \dots, R_q$ si, pour toute décomposition $m = \mu\nu$, on a

$$\psi(\mu R_i\nu\,;\;R_1,\,\dots,\,R_q) = \psi(\mu\nu\,;\,R_1,\,\dots,\,R_q),\;\; i = 1, 2, \dots, q.$$

Bien entendu, un tel invariant doit d'abord être un invariant par rapport aux contractions triviales $g_i^x g_i^y = g_i^{x+y}$, $g_i^0 = 1$, donc un invariant de contraction dans le groupe libre $\{g_i\,;\; i \in I\}$. Nous chercherons alors des combinaisons lineaires des $\varphi_p(m\,;\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_p)$, (à coefficients qui peuvent dépendre des relateurs) donnant de tels invariants.

La formation de ces invariants est facilitée par l'emploi d'expressions que nous appelons „préinvariants" :

Un *préinvariant* est une combinaison linéaire et homogène $\Phi_p\,(m\,;\,R_1,\,\dots,\,R_q)$ des $\varphi_p(m\,;\alpha_1,\dots,\,\alpha_p)$, pour p fixe, telle que, pour toute décomposition $m = \mu\nu$, on ait

$$\Phi_p(\mu R_i\nu\,;\;R_1\,,\dots,\;R_q) = \Phi_p(\mu\nu;\;R_1,\dots,R_q) + \omega_i\;(R_1,\dots R_q),\;\; i = 1,2,\dots,q. \tag{17}$$

Le terme additif ω_i doit être indépendant de m. En posant $\mu = \nu^{-1}$, et en se rappelant $\varphi_p\,(1\,;\,\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_p) = 0$, on voit que l'on doit avoir, quel que soit le mot ν,

$$\omega_i(R_1,\,\dots,\,R_q) = \Phi_p(\nu^{-1}R_i\nu\,;\;R_1,\,\dots,\,R_q) = \Phi_p(R_i\,;\,R_1,\,\dots,\,R_q).$$

Donc (17) devient

$$\Phi_p(\mu R_i\nu\,;\;R_1,\,\dots,\,R_q) = \Phi_p(\mu\nu\,;\,R_1,\,\dots,\,R_q) + \Phi_p(R_i\,;\,R_1,\,\dots,\,R_q),\, i = 1, 2, \dots, q. \tag{18}$$

Pour $q = 1$, un préinvariant doit vérifier $\Phi(\mu R\nu\,;R) = \Phi(\mu\nu\,;R) + \Phi(R\,;R)$, quels que soient les mots μ et ν. Prenons $\Phi(m) = \varphi_1^s(m)$; alors $\varphi_1^s(\mu R\nu) = \varphi_1^s(\mu\nu) + \varphi_1^s(R)$, s étant un entier non-négatif, donc $\varphi_1^s(m)$ est un préinvariant pour n'importe quel relateur R. On forme alors immédiatement l'invariant.

$$\psi_1^{st}(m\,;R) = \varphi_1^s(m)\varphi_1^t(R) - \varphi_1^t(m)\varphi_1^s(R),\quad s \neq t.$$

Pour $t = s + 1$ on obtient la suite infinie d'invariants par rapport à R

$$\psi_1^s(m\,;R) = \sum_{k,h} (i_k - \rho_h)(i_k\rho_h)^s x_k y_h$$

où i_k parcourt la suite des indices et x_k la suite des exposants de m, tandis que ρ_h parcourt la suite des indices et y_h la suite des exposants de R. Dans le cas de q relateurs, on obtient l'invariant

$$\psi_1^s(m\,;R_1,\ldots,R_q) = \begin{vmatrix} \varphi_1^s(m), & \varphi_1^{s+1}(m), & \ldots, & \varphi_1^{s+q}(m) \\ \varphi_1^s(R_1), & \varphi_1^{s+1}(R_1), & \ldots, & \varphi_2^{s+q}(R_1) \\ \varphi_1^s(R_q), & \varphi_1^{s+1}(R_q), & \ldots, & \varphi_1^{s+q}(R_q) \end{vmatrix} \tag{19}$$

Avec des combinaisons linéaires et homogènes des $\varphi_p(m\,;\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ pour $p > 1$, la formation des préinvariants par l'emploi de (18) conduit au calcul de certains déterminants d'ordre élevé, ce qui n'est pas avantageux du point de vue des applications. Mais nous pourrons éviter ce procédé en tenant compte d'autres remarques.

Indiquons toutefois la première méthode sur le cas $p = 2$. Changeons de notation en posant $\varphi_2(m\,;\alpha_1,\alpha_2) = \varphi_2^{\alpha_1\alpha_2}(m)$; puis, R étant l'unique relateur, posons $R_1^s = \varphi_1^s(R)$, $R_2^{st} = \varphi_2^{st}(R)$. La formule (14), dans laquelle les déterminants d'ordre 3 ne figurent pas pour $p = 2$, nous donne

$$\varphi_2^{ss}(\mu R\nu) = \varphi_2^{ss}(\mu\nu) + R_2^{ss} + R_1^s[\varphi_1^{s+1}(\mu) - \varphi_1^{s+1}(\nu)] - R_1^{s+1}[\varphi_1^s(\mu) - \varphi_1^s(\nu)]$$

$$\varphi_2^{s,s+1}(\mu R\nu) + \varphi_2^{s+1,s}(\mu R\nu) = \varphi_2^{s,s+1}(\mu\nu) + \varphi_2^{s+1,s}(\mu\nu) + R_2^{s,s+1} + R_2^{s+1,s} +$$
$$+ R_1^s[\varphi_1^{s+2}(\mu) - \varphi_1^{s+2}(\nu)] - R_1^{s+2}[\varphi_1^s(\mu) - \varphi_1^s(\nu)]$$

$$\varphi_2^{s+1,s+1}(\mu R\nu) = \varphi_2^{s+1,s+1}(\mu\nu) + R_2^{s+1,s+1} + R_1^{s+1}[\varphi_1^{s+2}(\mu) - \varphi_1^{s+2}(\nu)] -$$
$$R_1^{s+2}[\varphi_1^{s+1}(\mu) - \varphi_1^{s+1}(\nu)].$$

L'élimination des différences entre crochets conduit à

$$R_1^{s+2}\varphi_2^{ss}(\mu R\nu) - R_1^{s+1}[\varphi_2^{s,s+1}(\mu R\nu) + \varphi_2^{s+1,s}(\mu R\nu)] + R_1^s\,\varphi_2^{s+1,s+1}(\mu R\nu) =$$
$$= R_1^{s+2}\varphi_2^{ss}(\mu\nu) - R_1^{s+1}[\varphi_2^{s,s+1}(\mu\nu) + \varphi_2^{s+1,s}(\mu\nu)] + R_1^s\,\varphi_2^{s+1,s+1}(\mu\nu) + R_1^{s+2}R_2^{ss} -$$
$$- R_1^{s+1}(R_2^{s,s+1} + R_2^{s+1,s}) + R_1^s R_2^{s+1,s+1}.$$

On a donc le préinvariant

$$\Phi_2^s(m\,;R) = R_1^{s+2}\varphi_2^{ss}(m) - R_1^{s+1}[\varphi_2^{s,s+1}(m) + \varphi_2^{s+1,s}(m)] + R_1^s\,\varphi_2^{s+1,s+1}(m). \tag{20}$$

On en déduit de suite l'invariant

$$\psi_2^{st}(m\,;R) = \Phi_2^s(m\,;R)\Phi_2^t(R\,;R) - \Phi_2^t(m\,;R)\Phi_2^s(R\,;R), \qquad s \neq t, \tag{21}$$

ainsi que l'invariant mixte

$$\omega_2^{st}(m\,;R) = R_1^t\Phi_2^s(m\,;R) - \Phi_2^s(R\,;R)\varphi_1^t(m).$$

Dans le cas de deux relateurs R et T, on trouve par une élimination analogue le préinvariant

$$\begin{aligned}\Phi_2^s(m\,;R,T) = {} & (R^{s+3}T^{s+2} - T^{s+3}R^{s+2})\,\varphi_2^{ss}(m) + (R^{s+1}T^{s+3} - T^{s+1}R^{s+3})[\varphi_2^{s,s+1}(m) + \\ & + \varphi_2^{s+1,s}(m)] + (R^{s+2}T^{s+1} - T^{s+2}R^{s+1})[\varphi_2^{s,s+2}(m) + \varphi_2^{s+2,s}(m)] + (R^{s+3}T^{s} - T^{s+3}R^{s} + \\ & + R^{s+2}T^{s+1} - T^{s+2}R^{s+1})\varphi_2^{s+1,s+}(m) + (R^{s}T^{s+2} - T^{s}R^{s+2})[\varphi_2^{s+1,s+2}(m) + \\ & \varphi_2^{s+2,s+1}(m)] + (R^{s+1}T^{s} - T^{s+1}R^{s})\varphi_2^{s+2,s+2}(m).\end{aligned}$$

On a donc

$$\Phi_2^s(\mu R\nu\,;R,T) = \Phi_2^s(\mu\nu\,;R,T) + \Phi_2^s(R\,;R,T),$$
$$\Phi_2^s(\mu T\nu\,;R,T) = \Phi_2^s(\mu\nu\,;R,T) + \Phi_2^s(T\,;R,T),$$

et ceci permet la formation des invariants, par rapport à R et T,

$$\psi^s(m\,;R,T) = \begin{vmatrix} \Phi_2^s(m\,;R,T), & \Phi_2^{s+1}(m\,;R,T), & \Phi_2^{s+2}(m\,;R,T) \\ \Phi_2^s(R\,;R,T), & \Phi_2^{s+1}(R\,;R,T), & \Phi_2^{s+2}(R\,;R,T) \\ \Phi_2^s(T\,;R,T), & \Phi_2^{s+1}(T\,;R,T), & \Phi_2^{s+2}(T\,;R,T) \end{vmatrix}$$

$$\chi_2^s(m\,;R,T) = \begin{vmatrix} \Phi_2^s(m\,;R,T), & \varphi_1^s(m), & \varphi_1^{s+1}(m) \\ \Phi_2^s(R\,;R,T), & R_1^s\,, & R_1^{s+1} \\ {}_2^s(T\,;R,T), & T_1^s\,, & T_1^{s+1} \end{vmatrix} \tag{22}$$

Mais, déjà pour $p = 3$, la formation des préinvariants avec les $\varphi_3(m\,;\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ par cette méthode d'élimination est bien plus laborieuse, nécessitant le calcul de déterminants d'ordre élevé.

Abordons le problème par une autre méthode ; remarquons que l'invariant (19) s'écrit, en y substituant $\varphi_1^t(m) = \sum_k i_k^t x_k$ pour $t = s,\ s+1, \ldots, s+q$ et en développant le déterminant de Vandermonde ainsi obtenu

$$\begin{aligned}\psi_1^s(m\,;R_1,\ldots,R_q) &= \sum_{k,k_1,\ldots,k_q} V(i_k,\rho_{k_1},\ldots\rho_{k_q})(i_k\rho_{k_1}\ldots\rho_{k_q})^s x_k y_{k_1}\ldots y_{k_q} = \\ &= \sum_{k,k_1,\ldots,k_q} (i_k-\rho_{k_1})(i_k-\rho_{k_2})\ldots(i_k-\rho_{k_q})(i_k\rho_k\ldots\rho_{k_q})^s x_k y_{k_1}\ldots y_{k_q}\cdot \\ &\qquad (\rho_{k_1}-\rho_{k_2})\ldots(\rho_{k_1}-\rho_{k_q}) \\ &\qquad \ldots\ldots\ldots \\ &\qquad (\rho_{k_{q-1}}-\rho_{k_q})\end{aligned} \tag{23}$$

Dans cette somme, i_k varie dans $m = g_{i_1}^{x_1} \ldots g_{i_n}^{x_n}$, ce que nous écrirons, par un abus de notation, $i_k \in m$, ou même $k \in m$. De même, chaque ρ_{h_j} varie indépendamment dans R_j, ce que nous écrirons $\rho_{h_j} \in R$, ou $h_j \in R$. On vérifie alors facilement l'invariance de ψ_1^s. Pour $m = \mu\nu$, la somme $\psi_1^s(\mu R_j \nu\,; R_1, \ldots, R_q)$ se décompose en trois sommes, suivant que $i_k \in \mu$, ou $i_k \in \nu$ ou $i_k \in R_j$. Les deux premières sommes redonnent $\psi_1^s(\mu\nu\,; R_1, \ldots, R_q)$, tandis que la dernière s'écrit, en posant $i_k = \rho_k \in R_j$

$$\sum_{k, h_1, \ldots, h_q} V(\rho_k, \rho_{h_1}, \ldots, \rho_{h_q})(\rho_k \rho_{h_1} \ldots \rho_{h_q})^s y_k y_{h_1} \ldots y_{h_q} =$$

$$= \sum_{k, h_1, \ldots, h_q} \begin{matrix} (\rho_k - \rho_{h_1})(\rho_k - \rho_{h_2}) \ldots (\rho_k - \rho_{h_q})(\rho_k \rho_{h_1} \ldots \rho_{h_q})^s y_k y_{h_1} \ldots y_{h_q} \\ (\rho_{h_1} - \rho_{h_2}) \ldots (\rho_{h_1} - \rho_{h_q}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\rho_{h_{q-1}} - \rho_{h_q}) \end{matrix}$$

Or, cette somme est nulle, car à chaque paire $\rho_k, \rho_{h_j} \in R_j$ il correspond la paire transposée ρ_{h_j}, ρ_k, et les termes qui y correspondent dans la somme ci-dessus sont égaux, de signes contraires. Donc on a bien

$$\psi_1^s(\mu R_j \nu\,; R_1, \ldots, R_q) = \psi_1^s(\mu\nu\,; R_1, \ldots, R_q).$$

Cet exemple nous suggère la recherche directe des sommes qui fournissent des invariants ou des préinvariants. Reprenons le préinvariant (20), qui s'écrit

$$\Phi_2^s(m\,; R) = \sum_{h \in R;\, 1 < k_1 < k_2 \in m} V(i_{k_1}, i_{k_2}, \rho_h)(i_{k_1} i_{k_2} \rho_h)^s x_{k_1} x_{k_2} y_h =$$

$$= \sum_{h \in R, 1 < k_1 < k_2 \in m} (i_{k_1} - i_{k_2})(i_{k_1} - \rho_h)(i_{k_2} - \rho_h)(i_{k_1} i_{k_2} \rho_h)^s x_{k_1} x_{k_2} y_h \tag{24}$$

Pour $m = \mu R \nu$, la somme se décompose suivant que :

1. $i_{k_1}, i_{k_2} \in \mu$; ou $i_{k_1} \in \mu$, $i_{k_2} \in \nu$; ou $i_{k_1}, i_{k_2} \in \nu$. Ces termes donnent $\Phi_2^s(\mu\nu\,; R)$.

2. $i_{k_1} = \rho_{k_1} \in R$, $i_{k_2} = \rho_{k_2} \in R$. Ces termes donnent $\Phi_2^s(R\,; R)$.

3. $i_{k_1} \in \mu$, $i_{k_2} = \rho_{k_2} \in R$. Pour chaque i_{k_1} fixe, on peut grouper les termes

$$\sum_{h, k_2 \in R} (i_{k_1} - \rho_{k_2})(i_{k_1} - \rho_h)(\rho_{k_2} - \rho_h)(i_{k_1} \rho_{k_2} \rho_h)^s x_{k_1} y_{k_2} y_h +$$

$$+ \sum_{h k_2 \in R} (i_{k_1} - \rho_h)(i_{k_1} - \rho_{k_2})(\rho_h - \rho_{k_2})(i_1 \rho_h \rho_{k_2})^s x_{k_1} y_{k_2} y_h = 0$$

correspondant aux paires ρ_{k_2}, ρ_h et ρ_h, ρ_{k_2}. La somme correspondante à ce cas est donc nulle.

4. $i_{k_1} = \rho_{k_1} \in R$, $i_{k_2} \in \nu$. Un calcul analogue montre que la somme correspondante est nulle. On vérifie donc directement sur (24) la propriété de cette somme d'être un préinvariant.

Des calculs analogues permettent d'établir la préinvariance de

$$\Phi_2^s(m\,;R,T) = \sum_{h\in R;\,l\in T;\,k_1<k_2\in m} V(i_{k_1}, i_{k_2}, \rho_h, \tau_l)(i_{k_1}i_{k_2}\rho_h\tau_l)^s\, x_{k_1}\, x_{k_2}\, y_h\, y_l = \tag{25}$$

$$= \sum_{h\in R;\,l\in T;\,k_1<k_2\in m} (i_{k_1} - i_{k_2})(i_{k_1} - \rho_h)(i_{k_2} - \rho_h)(i_{k_1} - \tau_l)(i_{k_2} - \tau_l)(\rho_h - \tau_l)(i_{k_1}\,..)^s\, x_{k_1}\,..\,y_l$$

et en général

$$\Phi_2^s(m\,;R_1,\ldots,R_q) = \sum_{h_j\in R_j;\,k_1<k_2\in m} V(i_{k_1}, i_{k_2}, \rho_{h_1},\ldots,\rho_{h_q})(i_{k_1}i_{k_2}\rho_{h_1}\ldots\rho_{h_q})^s\, x_{k_1}\ldots y_{h_q} \tag{26}$$

où $V(\,\cdot\,)$ représente toujours le déterminant de Vandermonde. On a l'invariant

$$\psi_2^s(m\,;R) = \Phi_2^s\,(m\,;R)\,\Phi_2^{s+1}(R\,;R) - \Phi_2^{s+1}(m\,;R)\,\Phi_2^s\,(R\,;R) =$$

$$= \sum_{1<k_1<k_2\in m;\,1<l_1<l_2\in R;\,h,h'\in R} (i_{i_1} - i_{k_2})(i_{k_1} - \rho_h)(i_{k_2} - \rho_h)(\rho_{l_1} - \rho_{l_2})(\rho_{l_1} - \rho_{h'})(\rho_{l_2} - \rho_{h'})(\rho_{l_1}\rho_{l_2}\rho_{h'} - i_{k_1}\,i_{k_2}\,\rho_{h'})\,\cdot$$

$$\cdot\,(i_{k_1}\,i_{k_2}\,\rho_{l_1}\,\rho_{l_2}\,\rho_h\,\rho_{h'})^s\,x_{k_1}\,..\,y_{h'} = [R_1^{s+2}R_2^{ss} - R_1^{s+1}(R_2^{s,s+1} + R_2^{s+1,s}) +$$

$$+\,R_1^sR_2^{s+1,s+1}\,][R_1^{s+2}\,(\varphi_2^{s+1,s+2} + \varphi_2^{s+2,s+1}) - R_1^{s+1}\varphi_2^{s+2,s+2}\,] +$$

$$+\,[R_1^{s+3}\,R_2^{s+1,s+1} - R_1^{s+2}\,(R_2^{s+1,s+2} + R_2^{s+2,s+1}) +$$

$$+R_1^{s+1}\,R_2^{s+2,s+2}\,][R_1^{s+2}\varphi_2^{ss} - R_1^{s+1}\,(\varphi_2^{s,s+1} + \varphi_2^{s+1,s})] + [R_1^s\,\Phi_2^{s+1}\,(R) - R_1^{s+3}\,\Phi_2^s(R)]\varphi_2^{s+1,s+1} \tag{27}$$

avec l'abbreviation $\varphi_2^{st} = \varphi_2^{st}\,(m)$. Pour le produit de deux mots on a les formules

$$\psi_1^{st}\,(m_1m_2) = \psi_1^{st}\,(m_1) + \psi_1^{st}\,(m_2)\,;\ \Phi_2^s(m_1m_2) = \Phi_2^s\,(m_1) + \Phi_2^s(m_2) +$$

$$+\,\frac{1}{R_1^s}\,[\psi_1^{s+1,s}(m_1)\psi_1^{s+1,s+2}\,(m_2) - \psi_1^{s+2,s}(m_1)\psi_1^{s,s+1}(m_2)\,]$$

$$\psi_2^{st}(m_1m_2) = \psi_2^{st}(m_1) + \psi_2^{st}\,(m_2) + \frac{R_1^s}{R_1^t}\,[\psi_1^{t+1,t}(m_1)\,\psi_1^{t,t+2}(m_2) - \psi_1^{t+2,t}(m_1)\psi_1^{t,t+1}\,(m_2)] -$$

$$-\,\frac{R_1^t}{R_1^s}\,[\psi_1^{s+1,s}(m_1)\,\psi_1^{s,s+2}(m_2) - \psi_1^{s+2,s}\,(m_1)\,\psi_1^{s,s+1}\,(m_2)]$$

Dans le cas $p = 3$, la formation des invariants devient plus laborieuse. Considérons l'expression

$$\Omega_3(m\,;R) = \sum_{h\in R;\,k_1<k_2<k_3\in m} V(i_{k_1}, i_{k_2}, i_{k_3}\,;\rho_h)S(i_{k_1}, i_{k_2}, i_{k_3}, \rho_h)x_{k_1}\,x_{k_2}\,x_{k_3}\,y_h$$

où S est un polynôme symétrique de ses quatre arguments. Cette expression est une combinaison linéaire des $\varphi_3^{rst}\,(m)$, car $V(i_{k_1}, i_{k_2}, i_{k_3}\,;\rho_h)$ est divisible par $(i_{k_1} - i_{k_2})(i_{k_2} - i_{k_3})$. On a

$$\Omega_3(R\,;R) = \sum_{h<k_1<k_2<k_3\in R} V(\rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \rho_{k_3}, \rho_h)\,S(\rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \rho_{k_3}\,;\rho_h)\,y_{k_1}\,y_{k_2}y_{k_3}\,y_h + \sum_{k_1<h<k_2<k_3\in R}(\text{idem}) +$$

$$+\sum_{k_1<k_2<h<k_3\in R} + \sum_{k_1<k_2<k_3<h\in R} = 0.$$

(On a remplacé i_{k_ν} par ρ_{k_ν} pour indiquer ainsi que i_{k_ν} parcourt la suite des indices du mot R). Or, on voit que les deux premières sommes plus haut sont égales de signes contraires (à chaque paire ρ_h, ρ_{k_1} il correspond la paire transposée ρ_{k_1}, ρ_h); il en est de même des deux dernières sommes, d'où $\Omega_3(R\,;R) = 0$. Or

$$\Omega_3(\mu R\nu\,; R) = \Omega_3(\mu\nu\,; R) + \sum_{k_1\in\mu;\, h\in R;\, k_2<k_3\in R} (i_{k_1} - \rho_{k_2})(i_{k_1} - \rho_{k_3})(i_{k_1} - \rho_h)\, V(\rho_{k_2}\rho_{k_3}, \rho_h)\cdot$$

$$\cdot S(i_{k_1}, \rho_{k_2}, \rho_{k_3}, \rho_h)x_{k_1}\, y_{k_2}\, y_{k_3}\, y_h - \sum_{k_3\in\nu;\, h\in R;\, k_1<k_2\in R} (i_{k_3} - \rho_{k_1})(i_{k_3} - \rho_{k_2})(i_{k_3} - \rho_h) V(\rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \rho_h)\cdot$$

$$\cdot S(i_{k_3}, \rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \rho_h)x_{k_3}\, y_{k_1}\, y_{k_2}\, y_h + \sum_{k_1<k_2\in\mu;\, k_3, h\in R} V(i_{k_1}, i_{k_2}, \rho_{k_3}\,; \rho_h) S(i_{k_1}, i_{k_2}, \rho_{k_3}, \rho_h) x_{k_1} \ldots y_h +$$

$$+ \sum_{k_2<k_3\in\nu;\, k_1, h\in R} V(\rho_{k_1}, i_{k_2}, i_{k_3}\,; \rho_h) S(.) \ldots + \Omega_3(R\,; R)$$

Les deux avant-dernières sommes sont nulles, car, ρ_{k_3} et ρ_h devant parcourir indépendamment la suite des indices de R, leur permutation est permise, et ceci entraîne un changement de signe de V; il en est de même pour ρ_{k_1} et ρ_h. Il reste donc

$$\Omega_3(\mu R\nu\,; R) - \Omega_3(\mu\nu\,; R) = \sum_{k_1\in\mu;\, h\in R;\, k_2<k_3\in R} [i_{k_1}^3 - (\rho_{k_2} + \rho_{k_3} + \rho_h) i_{k_1}^2 + (\rho_{k_2}\rho_{k_3} + \rho_{k_2}\rho_h + \rho_{k_3}\rho_h) i_{k_1} -$$

$$- \rho_{k_2}\rho_{k_3}\rho_h] V(\rho_{k_2}, \rho_{k_3}, \rho_h) S(.) \ldots - \sum_{k_3\in\nu;\, h\in R;\, k_1<k_2\in R} [i_{k_3}^3 - (\rho_{k_1} + \rho_{k_2} + \rho_h) i_{k_3}^2 + (\rho_{k_1}\rho_{k_2} + \rho_{k_1}\rho_h +$$

$$+ \rho_{k_2}\rho_h) i_{k_3} - \rho_{k_1}\rho_{k_2}\rho_h] V(\rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \rho_h) S(i_{k_3}, \rho_{k_1}, \rho_{k_2}, \rho_h) x_{k_3} \ldots y_h \tag{28}$$

En choisissant d'une manière particulière le polynôme symétrique S, posons

$$\begin{aligned}
A_3^s(m\,; R) &= \Sigma V(i_{k_1}, i_{k_2}, i_{k_3}\,; \rho_h)(i_{k_1} i_{k_2} i_{k_3} \rho_h)^s x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} y_h \\
B_3^s(m\,; R) &= -\Sigma V(i_{k_1}, i_{k_2}, i_{k_3}\,; \rho_h)(i_{k_1} + i_{k_2} + i_{k_3} + \rho_h)(i_{k_1} i_{k_2} i_{k_3} \rho_h)^s x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} y_h \\
C_3^s(m\,; R) &= \Sigma V(i_{k_1}, i_{k_2}, i_{k_3}\,; \rho_h)(i_{k_1} i_{k_2} + i_{k_1} i_{k_3} + i_{k_1}\rho_h + i_{k_2} i_{k_3} + i_{k_2}\rho_h + i_{k_3}\rho_h) \\
&\quad (i_{k_1} i_{k_2} i_{k_3} \rho_h)^s x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} y_h \\
D_3^s(m\,; R) &= -\Sigma V(i_{k_1}, i_{k_2}, i_{k_3}\,; \rho_h)(i_{k_1} i_{k_2} i_{k_3} + i_{k_1} i_{k_2}\rho_h + i_{k_1} i_{k_3}\rho_h + i_{k_2} i_{k_3}\rho_h) \\
&\quad (i_{k_1} i_{k_2} i_{k_3} \rho_h)^s x_{k_1} x_{k_2} x_{k_3} y_h
\end{aligned} \tag{29}$$

les sommes étant prises pour $k_1 < k_2 < k_3 \in m$, $h \in R$. En tenant compte de (28) on trouve

$$\begin{aligned}
A_3^s(\mu R\nu\,; R) - A_3^s(\mu\nu\,; R) &= [\varphi_1^{s+3}(\mu) - \varphi_1^{s+3}(\nu)]\Phi_2(R\,; R) - [\varphi_1^{s+2}(\mu) - \\
&\quad - \varphi_1^{s+2}(\nu)]P(R) + [\varphi_1^{s+1}(\mu) - \varphi_1^{s+1}(\nu)]Q(R) - [\varphi_1^s(\mu) - \varphi_1^s(\nu)]\Phi_2^{s+1}(R\,; R) \\
B_3^s(\mu R\nu\,; R) - B_3^s(\mu\nu\,; R) &= -[\varphi_1^{s+4}(\mu) - \varphi_1^{s+4}(\nu)]\Phi_2^s(R\,; R) - [\varphi_1^{s+2}(\mu) - \\
&\quad - \varphi_1^{s+2}(\nu)]U(R) + [\varphi_1^{s+1}(\mu) - \varphi_1^{s+1}(\nu)]X(R) - [\varphi_1(\mu) - \varphi_1^s(\nu)]Y(R) \\
C_3^s(\mu R\nu\,; R) - C_2^s(\mu\nu\,; R) &= [\varphi_1^{s+4}(\mu) - \varphi_1^{s+4}(\mu)]P(R) + [\varphi_1^{s+3}(\mu) - \varphi_1^{s+3}(\nu)] \times \\
&\quad \times U(R) + [\varphi_1^{s+1}(\mu) - \varphi_1^{s+1}(\nu)]Z(R) - [\varphi_1^s(\mu) - \varphi_1^s(\nu)]T(R) \\
D_3^s(\mu R\nu\,; R] - D_3^s(\mu\nu\,; R) &= -[\varphi_1^{s+4}(\mu) - \varphi_1^{s+4}(\nu)]Q(R) - [\varphi_1^{s+3}(\mu) - \varphi_1^{s+3}(\nu)] \times \\
&\quad \times X(R) - [\varphi_1^{s+2}(\mu) - \varphi_1^{s+2}(\nu)]Z(R) + [\varphi_1^s(\mu) - \varphi_1^s(\nu)]F(R)
\end{aligned} \tag{30}$$

avec

$$\Phi_2^s(R\,;R) = R_3^{ss,s+1} - R_3^{s+1,ss}\,; \quad P(R) = R_3^{s+2,ss} - R_3^{ss,s+2} + R_3^{s+1,s+1,s} - R_3^{s,s+1,s+1}\,;$$

$$Q(R) = R_3^{s+2,s+1,s} - R_3^{s,s+1,s+2} + R_3^{s+2,s,s+1} - R_3^{s+1,s,s+2}\,;$$

$$U(R) = R_3^{s+3,ss} - R_3^{ss,s+3} + R_3^{s+1,s+2,s} - R_3^{s,s+2,s+1} + R_3^{s+2,s+1,s} - R_3^{s,s+1,s+2}\,;$$

$$X(R) = R_3^{s+3,s+1,s} - R_3^{s,s+1,s+3} + R_3^{s+3,s,s+1} - R_3^{s+1,s,s+3} + R_3^{s+2,s+1,s+1} - R_3^{s+1,s+1,s+2} - \\ - R_3^{s+2,s,s+2}\,;$$

$$Y(R) = R_3^{s+3,s+1,s+1} - R_3^{s+1,s+1,s+3} + R_3^{s+2,s+2,s+1} - R_3^{s+1,s+2,s+2}\,;$$

$$Z(R) = R_3^{s+3,s+2,s} - R_3^{s,s+2,s+3} + R_3^{s+3,s,s+2} - R_3^{s+2,s,s+3} + R_3^{s+3,s+1,s+1} - R_3^{s+1,s+1,s+3}\,;$$

$$T(R) = R_3^{s+1,s+2,s+3} - R_3^{s+3,s+2,s+1} + R_3^{s+2,s+1,s+3} - R_3^{s+3,s+1,s+2}\,;$$

$$F(R) = R_3^{s+1,s+1,s+2} - R_3^{s+2,s+1,s+1}.$$

Afin d'éliminer les différences entre crochets qui apparaîssent dans (30), nous écrirons encore ces équations en remplaçant s par $s + 1$. L'équation $A_3^{s+1}(\mu R\nu\,; R) - A_1^{s+1}(\mu\nu\,; R) = \ldots$ est à rejeter, car on a identiquement

$$R_1^{s+4}A_3^s(m\,; R) - R_1^{s+3}B_3^s(m\,; R) + R_1^{s+2}C_3^s(m\,; R) - R_1^{s+1}D_3^s(m\,; R) + \\ + R_1^sA_1^{s+1}(m\,; R) = 0,$$

ce que l'on voit en multipliant les équations (29) par des puissances de ρ_l et en sommant pour $\rho_l \in R$. On aura donc en tout sept équations permettant l'élimination de $\varphi_1^{s+5}(\mu) - \varphi_1^{s+5}(\nu), \ldots \ldots, \varphi_1^s(\mu) - \varphi_1^s(\nu)$, d'où une relation de la forme

$$\alpha A_3^s(\mu R\nu) + \beta B_3^s(\mu R\nu) + \gamma C_3^s(\mu R\nu) + \delta D_4^s(\mu R\nu) + \varepsilon B_3^{s+1}(\mu R\nu) + \eta C_3^{s+1}(\mu R\nu) + \\ + \zeta D_3^s(\mu R\nu) = \alpha A_3^s(\mu\nu) + \beta B_3^s(\mu\nu) + \ldots + \zeta D_3^{s+1}(\mu\nu),$$

les coefficients $\alpha, \beta, \ldots, \zeta$ dépendant de R seulement. On a donc les invariants

$$\psi_3^s(m\,; R) = \alpha A_3^s(m\,; R) + \beta B_3^s(m\,; R) + \gamma C_3^s(m\,; R) + \delta D_3^s(m\,; R) + \varepsilon B_3^{s+1}(m\,; R) + \\ + \eta C_2^{s+1}(m\,; R) + \zeta D_3^{s+1}(m\,; R).$$

Le même procédé, avec des complications inhérentes aux cas $p > 3$, est applicable en partant de

$$\Omega_p(m\,; R) = \sum_{h\in R;\, k_1 < k_2 < \cdots < k_p \in m} V(i_{k_1}, i_{k_2}, \ldots, i_{k_p}\,; \rho_h)S(i_{k_1}, i_{k_2}, \ldots, i_{k_p}, \rho_h)x_{k_1} \ldots y_k.$$

5. Quelques applications et problèmes. *1. Problème des mots* : G étant le groupe présenté par les générateurs $\{g_i\}$, $i \in I$ et les relateurs $R_1, \ldots, R_q$, et m étant un mot formé avec les g_i, on cherche les conditions dans lesquelles $m \sim 1$ dans G. Par un nombre fini d'insertions des R_ν^ε dans m, on doit alors obtenir le mot vide 1 ; donc, si $\psi(m\,; R_1, \ldots, R_q)$ est un invariant de contraction par rapport aux relateurs R_ν, on doit avoir nécessairement $\psi(m\,; R_1, \ldots, R_q) = 0$. La *suffi-*

sance de ces conditions dépend de la possibilité d'obtenir un *système complet* d'invariants de contraction par rapport aux relateurs R_ν.

2. *Problème d'isomorphisme*: G étant défini comme précédemment, et $\bar{R}_1, \bar{R}_2, .., \bar{R}_q$ étant des mots formés avec les g_i, dans quelles conditions a lieu l'isomorphisme des groupes $\{g_i ; R_1, .., R_q\}$ et $\{g_i ; \bar{R}_1, .., \bar{R}_q\}$? On sait ([1], p. 39; [2]) qu'il est nécessaire et suffisant d'avoir, pour chaque i, une relation de la forme

$$\bar{R}_i = u_{11}^{-1} R_1^{\varepsilon_1^1} u_{11} \cdot u_{12}^{-1} R_2^{\varepsilon_2^1} u_{12} \,..\, u_{1q}^{-1} R_q^{\varepsilon_q^1} u_{1q} \cdot u_{21}^{-1} R_1^{\varepsilon_1^2} u_{21} \cdot u_{22}^{-1} R_2^{\varepsilon_2^2} u_{22} \,..\, u_{s1}^{-1} R_1^{\varepsilon_1^s} u_{s1} \cdot$$

$$\cdot\, u_{s2}^{-1} R_2^{\varepsilon_2^s} u_{s2} \,..\, u_{qs}^{-1} R_q^{\varepsilon_q^s} u_{sq}$$

les ε pouvant prendre les valeurs -1, 0, $+1$. Mais l'application effective de ce critère exige la détermination des mots inconnus u_{ij}, et le problème revient à la résolution d'un système d'équations dans le groupe G. Or, $\psi(m ; R_1, \ldots, R_q)$ étant un invariant de contraction par rapport à $R_1, \ldots, R_q$, on devra avoir nécessairement

$$\psi(\bar{R}_i ; R_1, \ldots, R_q) = 0, \qquad \psi(R_i ; \bar{R}_1, \ldots, \bar{R}_q) = 0$$

car $\bar{R}_i$ peut être transformé en 1 par un nombre fini d'insertions des R_j. Ces conditions n'exigent pas la connaîssance des mots u_{ij}. Leur suffisance dépend aussi du problème posé plus haut: peut-on obtenir un système complet d'invariants de contraction par rapport à un système donné de relateurs? Pour attaquer ce problème, il sera nécessaire d'obtenir l'expression générale, pour $p \geqslant 3$, des invariants de contraction, sous une forme aussi simple que possible.

(Manuscrit reçu le 16 août 1970)

BIBLIOGRAPHIE

1. Fox, R., Crowell, R., *Introduction to Knot Theory*, Ginn and Comp., New York, 1963.
2. Magnus, W., *Über diskontinuierlichen Gruppen mit einer definierenden Relation*, „Journ. für reine u. angew. Math.", *163*, 141–165, 1930.

INVARIANŢI DE CONTRACŢIE ÎN GRUPURI

(Rezumat)

În lucrare se stabileşte existenţa unor invarianţi ataşaţi elementelor unui grup prezentat printr-un sistem de generatori şi relaţii. Aceşti invarianţi intervin în probleme ca: problema cuvintelor (Wordproblem), izomorfismul prezentărilor de grupuri, ecuaţii în grupuri, deci probleme care sînt indecidabile în general. Aplicarea invarianţilor de contracţie este susceptibilă de a oferi criterii pentru a recunoaşte cazurile cînd aceste probleme sînt decidabile, dacă este posibilă formarea unui sistem complet de invarianţi de contracţie. În lucrare se dă un astfel de sistem în cazul grupurilor libere, şi se indică procedee de formare a invarianţilor de contracţie în cazul cînd generatorii grupului sînt legaţi prin relaţii.

ИНВАРИАНТЫ КОНТРАКЦИИ В ГРУППАХ

(Резюме)

В статье устанавливается существование некоторых инвариантов, присоединённых к элементам одной группы, представленной системой генераторов и соотношений. Эти инварианты встречаются в таких задачах, как: задача слов (Wordproblem), изоморфизм представлений групп, уравнения в группах, следовательно задачи, являющиеся вообще неразрешимыми. Применение инвариантов контракции может предоставить критерии для опознавания случаев, когда эти задачи являются разрешимыми, если возможно образование полной системы инвариантов контракции. В статье даётся подобная система в случае свободных групп и указываются способы образования инвариантов контракции в случае, когда генераторы группы связаны соотношениями.

TOPOLOGII LIMITĂ

V. CÎMPIAN

1. Limite de mulţimi. Limitele unui şir de mulţimi. Fie şirul de mulţimi:

$$M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots \tag{1}$$

DEFINIŢIA 1. Limita superioară a unui şir de mulţimi este mulţimea ale cărei elemente aparţin la o infinitate de termeni ai şirului.

Vom nota limita superioară a şirului (1) prin:

$$M^* = \overline{\lim_{n\to\infty}} M_n$$

DEFINIŢIA 2. Limita inferioară a unui şir de mulţimi este mulţimea ale cărei elemente aparţin tuturor termenilor şirului cu excepţia unui număr finit de termeni.

Vom nota limita inferioară a şirului (1) prin

$$M_* = \underline{\lim_{x\to\infty}} M_n$$

DEFINIŢIA 3. Un şir de mulţimi este convergent dacă limita superioară a şirului coincide cu limita inferioară.

Dacă şirul (1) e convergent vom nota limita lui prin:

$$M = \lim_{n\to\infty} M_p$$

Cele două limite ale unui şir de mulţimi se pot exprima, [1], prin relaţiile:

$$M^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} M_k; \quad M_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} M_k$$

În continuare, vom da un criteriu de convergenţă pentru un şir de mulţimi.

LEMĂ. *Un şir de mulţimi are ca limită mulţimea vidă, dacă şi numai dacă orice element aparţine la un număr finit de termeni ai şirului.*

Demonstraţie. Fie $M^* = M_* = \emptyset$. Pentru orice x, avem $x \notin \emptyset$, deci $x \notin M^*$, adică x aparţine unui număr finit de termeni ai şirului. Invers, presupunem că orice element x aparţine unui număr finit de termeni ai şirului, atunci $x \notin M^*$, deci $M^* = \emptyset$. Dar totdeauna $\emptyset \subset M_* \subset M^*$, deci $M_* = M^* = \emptyset$ adică şirul e convergent.

TEOREMĂ. *Un şir de mulţimi* $\{M_n; n = 1, 2, \ldots\}$ *are ca limită mulţimea* M *dacă şi numai dacă şirul diferenţelor simetrice* $\Delta(M_n, M) = (M_n - M) \subset (M - M_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, *e convergent la mulţimea vidă.*

Demonstraţie. Fie $M^* = M_* = M$ şi presupunem că şirul $\{\Delta(M_n, M); n = 1, 2, \ldots\}$ nu converge la mulţimea vidă. Atunci există un element x încît $x \in (M_{n_k} - M) \cup (M - M_{n_k})$ pentru $k = 1, 2, \ldots,$. Dacă x aparţine la o infinitate de termeni de forma $M_{n_k} - M$, rezultă că $x \in M^*$ şi $x \notin M$ ceea ce e absurd, căci $M^* = M$. Dacă x aparţine la o infinitate de termeni de forma $M - M_{n_k}$, rezultă că $x \in M$ şi $x \notin M_*$ ceea ce contrazice din nou ipoteza. Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(M_n, M) = \emptyset$. Invers, presupunem că $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta(M_n, M) = \emptyset$, deci şirurile: $\{M_n - M; n = 1, 2, \ldots\}$ şi $\{M - M_n; n = 1, 2, \ldots\}$ converg şi ele la mulţimea vidă. Să arătăm că $M^* = M_* = M$. Dacă $x \in M_{n_k}$; $k = 1, 2, \ldots$ şi cum $\lim\limits_{n\to\infty} (M_n - M) = \emptyset$, rezultă că $x \in M$ deci $M^* \subset M$. Dacă $x \in M$, din $\lim\limits_{n\to\infty} (M - M_n) = \emptyset$, rezultă că există un indice m încît $x \in M_k$ pentru $k \geqslant m$, deci $x \in M_*$. Avem astfel şi incluziunea $M \subset M_*$. Deci $M^* \subset M \subset M_*$, şi cum totdeauna $M_* \subset M^*$ rezultă că $M^* = M_* = M$.

O generalizare imediată a noţiunii de limită a unui şir de mulţimi se poate da, şi probabil s-a dat, folosind noţiunea de mulţime dirijată [2]. O altă generalizare, corespunzînd numerelor cardinale a fost dată de Gr. C. Moisil [3].

Pentru a defini limita superioară sau limita inferioară a unui şir generalizat, vom preciza unele noţiuni.

Fie $\{M_\alpha, \alpha \in D\}$ un şir generalizat de mulţimi unde $(D, \geqslant)$ e o mulţime dirijată. Vom spune că un element x aparţine frecvent şirului generalizat de mulţimi $\{M\alpha; \alpha \in D\}$, dacă oricare ar fi un element $\alpha \in D$, există un element $\beta \in D$, $\beta \geqslant \alpha$ încît $x \in M_\beta$. Un element x aparţine uniform şirului generalizat de mulţimi $\{M_\alpha; \alpha \in D\}$ dacă există un indice $\beta \in D$ încît $x \in M_\alpha$ pentru orice $\alpha \geqslant \beta$.

DEFINIŢIE. Limita superioară (inferioară) a şirului generalizat $\{M_\alpha; \alpha \in D\}$ este mulţimea ale cărei elemente aparţin în mod frecvent (uniform) şirului generalizat.

TEOREMĂ. *Limita superioară şi limita inferioară a unui şir generalizat de mulţimi* $\{M_\alpha; \alpha \in D\}$ *sînt date de relaţiile:*

$$M^* = \bigcap_{\alpha \in D} \bigcup_{\beta \geqslant \varphi} M_\beta; \quad M_* = \bigcup_{\alpha \in D} \bigcap_{\beta \geqslant \alpha} M_\beta$$

Demonstraţie. Notînd cu:

$$N_\alpha = \bigcup \{M_\beta; \beta \geqslant \alpha, \beta \in D\}$$

va trebui demonstrat că $M^* = \bigcap \{N_\alpha; \alpha \in D\}$. Fie $x \in \bigcap \{M_\alpha; \alpha \in D\}$; dacă există un element $m \in D$ încît $x \notin M_\alpha$ pentru orice $\alpha \geqslant m$, atunci $x \notin N_\alpha$ pentru $\alpha \geqslant m$, ceea ce contrazice ipoteza. Deci $x \in M^*$. Invers, dacă $x \notin \bigcap \{N_\alpha; \alpha \in D\}$ atunci fie $\alpha_0 \in D$ încît $x \notin N_{\alpha_0}$, deci $x \notin \bigcup \{M_\beta, \beta \geqslant \alpha_0\}$, adică $x \notin M_\beta$ pentru $\beta \geqslant \alpha_0$, deci $x \notin M^*$. Ambele incluziuni fiind demonstrate, rezultă că prima relaţie are loc. Relaţia a doua se demonstrează analog. Întotdeauna $M_* \subset M^*$.

Fie $\mathcal{A}$ o familie de mulțimi și α un număr cardinal încît $\alpha \leqslant \text{card}\, \mathcal{A}$. În [3] Gr. C. Moisil definește mulțimea limită completă de ordin α a familiei $\mathcal{A}$ ca mulțimea tuturor elementelor ce aparțin unei familii $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, unde card $B = \alpha$.

Mulțimea limită restrînsă de ordin α a familiei $\mathcal{A}$ este formată din elementele ce aparțin tuturor mulțimilor familiei $\mathcal{A}$ cu excepția unei subfamilii $\mathcal{B}$ unde card $\mathcal{B} < \alpha$.

Aceste mulțimi limită sînt notate, respectiv, prin

$$\overline{\lim}_\alpha \mathcal{A} \text{ și } \underline{\lim}\, \mathcal{B}$$

Dacă $\alpha = \aleph_0$ regăsim, respectiv, definițiile limitei superioare și limitei inferioare pentru un șir de mulțimi. Dacă α e considerat ca număr cardinal, nu vom regăsi, în general, definițiile limitelor șirului generalizat.

2. Topologii limită. Limitele unui șir de familii de mulțimi. Fie

$$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \ldots, \mathcal{A}_n, \ldots$$

un șir de familii de mulțimi. Spunem că familia de mulțimi $\mathcal{A}^*$, $(\mathcal{A}_*)$ e limita superioară (inferioară) a șirului $\{\mathcal{A}\,;\ n = 1, 2, \ldots\}$ dacă elementele ei sînt exact limitele superioare (inferioare) ale șirurilor $\{A_n\,;\ A_n \in \mathcal{A}_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$. Pentru simplificarea expunerii ne vom limita la cazul șirurilor de familii de mulțimi fără a generaliza această definiție.

Vom nota, prin $C_e\, \mathcal{A}_k$ familia elementelor complementare celor din $\mathcal{A}_k$ în raport cu o aceeași mulțime X, pentru $k = 1, 2, \ldots$.

TEOREMĂ. *Fie $\{\mathcal{A}_k\,;\ k = 1, 2, \ldots\}$ un șir de familii de mulțimi încît:*

1. *Elementele oricărei familii $\mathcal{A}_k\,;\ k = 1, 2, \ldots$ sînt părți ale aceleiași mulțimi X.*

2. *Mulțimea vidă $\emptyset$ și mulțimea X aparțin oricărei familii $\mathcal{A}_k$, $k = 1, 2, \ldots$, atunci, dacă fiecare familie $\mathcal{A}_k$, $k = 1, 2, \ldots$ e închisă în raport cu intersecția finită, limita inferioară (superioară) a șirului $\{\mathcal{A}_k\,;\ k = 1, 2, \ldots\}$, (respectiv $\{C_e\, \mathcal{A}_k\,;\ k = 1, 2, \ldots\}$) formează o bază pentru familia mulțimilor deschise (închise) ale unei topologii pe X.*

Demonstrație. Fie $\mathcal{A}_* = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{A}_n$ și $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ două elemente din $\mathcal{A}_*$. Aceste elemente se pot scrie sub forma: $A^{(i)} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} A_k^{(i)}$, iar $A_k^{(i)} \in \mathcal{A}_k$ pentru $k = 1, 2, \ldots$ și $i = 1, 2$, pe baza definiției familiei $\mathcal{A}_*$. Dacă familiile de mulțimi $\mathcal{A}_{k;\,k=1,2,\ldots}$ sînt închise în raport cu intersecția finită, atunci din egalitatea $A^{(1)} \cap A^{(2)} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} (A_k^{(1)} \cap \cap A_k^{(2)})$ rezultă că și familia $\mathcal{A}_*$ e închisă în raport cu intersecția finită, deci formează o bază pentru familia mulțimilor deschise ale unei topologii τ_* pe X, [2]. Egalitatea are loc, căci dacă $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} (A_k^{(1)} \cap A_k^{(2)})$ atunci există un indice n_0 încît $x \in A_k^{(1)} \cap A_k^{(2)}$ pentru $k \geqslant n_0$, deci $x \in A_k^{(1)}$ și $x \in A_k^{(2)}$ pentru $k \geqslant n_0$, adică $x \in A_k^{(1)} \cap A_k^{(2)}$. Invers, dacă $x \in A^{(1)} \cap A^{(2)}$ atunci există un indice n_0, începînd de la care sînt îndeplinite simultan relațiile: $x \in A_k^{(1)}$ și $x \in A_k^{(2)}$ pentru $k \geqslant m_0$, deci $x \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcap\limits_{k=n}^{\infty} (A_k^{(1)} \cap \cap A_k^{(2)})$. Cu aceasta, prima parte a teoremei e demonstrată. Dacă familia $\mathcal{A}_k$; $k = 1, 2, \ldots$ e închisă în raport cu intersecția finită, atunci familia $C_e A\,;\ k_k =$

$= 1, 2, \ldots$ e închisă în raport cu reuniunea finită. Fie $A^{(1)}$ şi $A^{(2)}$ două elemente din $\mathfrak{B}^* = \overline{\lim_{k\to\infty}}\, C_e\mathfrak{A}_k$, atunci acestea se vor putea scrie sub forma $A^{(i)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^{(i)}$, unde $A_k^{(i)} \in C_e\mathfrak{A}_k$, pentru $k = 1, 2, \ldots$ şi $i = 1; 2$. Pe baza egalităţii $A^{(1)} \cup A^{(2)} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k^{(1)} \cup A_k^{(2)})$ rezultă că şi familia $\mathfrak{B}^*$ este închisă în raport cu reuniunea finită, deci formează o bază pentru familia mulţimilor închise ale unei topologii τ^* pe X. Egalitatea are loc, căci dacă $x \in A^{(1)} \cup A^{(2)}$, presupunem pentru fixarea ideilor că $x \in A^{(1)}$, deci există un subşir $\{A_{n_k}^{(1)};\ k = 1, 3 \ldots\}$ încît $x \in A_{n_k}^{(1)}$; $k = 1, 2, \ldots$ deci cu atît mai mult $x \in A_{n_k}^{(1)} \cup A_{n_k}^{(2)}$ $k = 1, 2, \ldots$, adică $r \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} (A_k^{(1)} \cup A_k^{(2)})$. Invers, dacă $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=n}^{\infty} (A_k^{(1)} \cup A_k^{(2)})$ atunci x aparţine la o infinitate de termeni de forma $A_{n_k}^{(i)} \cup A_{n_k}^{(2)}$ pentru $k = 1, 2, \ldots$ deci x va aparţine cel puţin unui subşir infinit $A_{n_{k_i}}^{(i)}$; $i = 1, 2, \ldots$ sau $A_{n_{k_j}}^{(2)}$; $j = 1, 2, \ldots$ deci $x \in A^{(1)} \cup A^{(2)}$. Cu aceasta teorema e demonstrată.

Fie

$$\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_n, \ldots \tag{1}$$

un şir de topologii definite pe o aceeaşi mulţime X şi

$$\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_n, \ldots \tag{2}$$

şirul familiilor mulţimilor închise din spaţiile topologice $(X, \mathcal{G}_n)$ $n = 1, 2, \ldots$.

Consecinţa 1. Limita inferioară a şirului de topologii (1) definite pe aceeaş mu ţime X formează o bază pentru familia mulţimilor deschise ale unei topologi pe X.

Consecinţa 2. Limita inferioară a şirului familiilor de mulţimi închise (2) formează o bază pentru familia mulţimilor deschise ale unei topologii pe X.

Într-adevăr, cele două şiruri verifică ipotezele teoremei anterioare, căci intersecţia a două mulţimi deschise (închise) e o mulţime deschisă (închisă). Vom nota cu $\mathcal{G}_*$ şi $\mathcal{F}_*$ topologiile a căror baze sînt respectiv $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathcal{G}_n$ şi $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathcal{F}_n$. În mod analog rezultă şi valabilitatea consecinţelor următoare:

Consecinţa 3. Limita superioară a şirului de topologii (1) definite pe o aceeaşi mulţime X formează o bază pentru familia mulţimilor închise ale unui spaţiu topologic $(X, \mathcal{G}^*)$.

Consecinţa 4. Limita superioară a şirului familiilor de mulţimi închise (2 formează o bază pentru familia mulţimilor închise ale unui spaţiu topologic $(X, \mathcal{F}^*$

Am notat cu $\mathcal{G}^*$ şi $\mathcal{F}^*$ topologiile ale căror baze pentru familia mulţimilor deschise sînt respectiv $C_e \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathcal{G}_n$ şi $C_e \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathcal{F}_n$. Cele patru consecinţe nu sînt independente şi se arată uşor că $\mathcal{G}_* = \mathcal{F}^*$ şi $\mathcal{F}_* = \mathcal{G}^*$ de aceea vom considera numa limitele şirului (1). Topologiile $\mathcal{G}_*$ şi $\mathcal{F}^*$ sînt identice, deoarece au aceeaşi bază. Într-adevăr $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathcal{G}_n = C_e \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathcal{F}_n$ căci dacă $G \in \underline{\lim}_{x\to\infty} \mathcal{G}_n$ atunci $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} G_k$; $G_k \in \mathcal{G}_k$ pentru $k = 1, 2, \ldots$ iar complementara lui $G, \complement G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \complement G_k \in \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathcal{F}_n$ deci $G \in C_e \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathcal{F}_n$ şi reciproc. Analog se arată că şi topologiile $\mathcal{F}_*$ şi $\mathcal{G}^*$ au aceeaşi bază, adică $\underline{\lim}_{n\to\infty} \mathcal{F}_n = C_e \overline{\lim}_{n\to\infty} \mathcal{G}_n$.

DEFINIŢIE. Topologia a cărei bază e limita inferioară a şirului mulţimilor deschise (1) o numim topologia limită inferioară.

DEFINIŢIE. Topologia a cărei bază e complementara limitei superioare a şirului mulţimilor deschise (1) o numim topologie limită superioară.

Vom spune că un şir de topologii, definite pe o aceeaşi mulţime, are limită, dacă topologia limită inferioară şi topologia limită superioară coincid.

3. Proprietăţi ale topologiei limită. P$_1$. Limita inferioară a unui şir de topologii T_1

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$$

definite pe o mulţime X este o T_1 — topologie limită inferioară.

Demonstraţie. Pentru orice punct $x \in X$ avem $X - \{x\} \in \tau_k$, $k = 1, 2, \ldots$ căci fiecare topologie τ_k este o T_1 — topologie. Dar cum limita inferioară a unui şir constant de mulţimi e acea mulţime, rezultă că $X - \{x\} \in \tau_*$ pentru orice $x \in X$. Deci τ_* e o T_1 — topologie.

P$_2$. Topologia limită superioară a unui şir de topologii T_1, definite pe o mulţime X este topologia discretă pe X.

Demonstraţie. Analog primei proprietăţi, pentru orice $x \in X$ avem $X - \{x\} \in \tau_k$; $k = 1, 2, \ldots$. Deci $X - \{x\} \in \underline{\lim}_{n\to\infty} \tau_n$ adică $\{x\} \in \tau^* = C_e \overline{\lim}_{n\to\infty} \tau_n$ ceea ce dovedeşte că topologia e discretă.

P$_3$. Dacă şirul de topologii

$$\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$$

definite pe mulţimea X are o mulţime deschisă propriu comună, atunci topologia limită $\tau = \tau^* = \tau_*$ este disconexă.

Demonstraţie. Fie G mulţimea proprie comună tuturor topologiilor τ_k; $k = = 1, 2, \ldots$ atunci $G \in \tau_*$ şi $\complement G \in \tau^*$, dar $\tau_* = \tau^* = \tau$ deci G este o mulţime proprie închisă şi deschisă în spaţiul (X, τ)

P$_4$. Limita inferioară a unui şir de spaţii Hausdorff

$$(X, \tau_1), \ (X, \tau_2), \ \ldots, (X, \tau_n), \ \ldots$$

este un spaţiu Hausdorff (X, τ_*).

Demonstraţie. Fie x şi y două puncte diferite din X. Spaţiile (X, τ_k), $k = 1, 2, \ldots$, fiind Hausdorff, rezultă că există o pereche de mulţimi deschise, disjuncte, $G_k^{(1)}$ şi $G_k^{(2)}$ încît $x \in G_k^{(1)}$ şi $y \in G_k^{(2)}$ $k = 1, 2, \ldots$, Atunci mulţimile $G^{(1)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} G_k^{(1)}$

şi $G^{(2)}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}G_k^{(2)}$ sînt mulţimi deschise şi disjuncte în (X,τ_*) conţinînd pe x şi respectiv pe y. Într-adevăr $x\in G^{(1)}$ căci $x\in G_k^{(1)}$, $k=1,2,\ldots$ şi analog $y\in G^{(2)}$; iar $G^{(1)}\cap G^{(2)}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}(G_k^{(1)}\cap G_k^{(2)})=\emptyset$ căci $G_k^{(1)}\cap G_k^{(2)}=\emptyset$ $k=1,2,\ldots$

P[5]. Dacă funcţia

$$f\colon (X,\mathcal{U}_k)\to(Y,\mathcal{V}_k);\quad k=1,2,\ldots$$

este continuă, atunci

$$f\colon(X,\mathcal{U}_*)\to(Y,\mathcal{V}_*)\quad\text{şi}\quad f\colon(X,\mathcal{U}^*)\to(Y,\mathcal{V}^*)$$

sînt continue.

Demonstraţie. Vom folosi următorul criteriu de continuitate [2] : o aplicaţie este continuă dacă contraimaginea oricărei mulţimi deschise (închise) din baza topologiei codomeniului este deschisă (închisă). Fie $V=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}V_k$, $V_k\in\mathcal{V}_k$; $k=1,2,\ldots$, o mulţime deschisă din baza topologiei $\mathcal{V}_*$. Atunci, $f^{-1}(V)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}f^{-1}(V_k)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}U_k\in\mathcal{U}_*$ căci $U_k=f^{-1}(V_k)\in\mathcal{U}_k$; $k=1,2,\ldots$ pe baza continuităţii aplicaţiei f. Analog se demonstrează continuitatea aplicaţiei între limitele superioare ale celor două şiruri de spaţii topologice. Fie $V=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}V_k$, $V_k\in\mathcal{V}_k$; $k=1,2,\ldots$ o mulţime închisă din baza spaţiului topologic $(Y,\mathcal{V}^*)$. Atunci $f^{-1}(V)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}f^{-1}(V_k)=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}U_k$ e o mulţime închisă în $(X,\mathcal{U}^*)$ căci $U_k=f^{-1}(V_k)\in\mathcal{U}_k$; $k=1,2,\ldots$, iar limita superioară a unui şir de spaţii topologice formează o bază pentru familia mulţimilor închise.

CONSECINŢĂ. Dacă funcţia

$$f\colon(X,\mathcal{U}_k)\to(Y,\mathcal{V})\quad k=1,2,\ldots$$

este continuă atunci şi funcţiile:

$$f\colon(X,\mathcal{U}_*)\to(Y,\mathcal{V})\ \text{şi}\ f\colon(X,\mathcal{U}^*)\to(Y,\mathcal{V})$$

sînt continue.

Demonstraţie. Într-adevăr conform relaţiilor $\tau\subset\underline{\lim}_{n\to\infty}\tau$ şi $\tau\subset\overline{\lim}_{n\infty\infty}\tau$ şi proprietăţii P_5 consecinţa este demonstrată.

Este evident că aceste rezultate se pot extinde uşor la cazul şirurilor generalizate de topologii.

(Intrat în redacţie la 12 ianuarie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Abian, A., *The Theory of Sets and Transfinite Aritmetic*, Philadelphia and London, 1965.
2. Kelley, J., *General Topology*, New York, 1965.
3. Moisil, Gr. C., *Sur la topologie des familles d'ensembles*, Comptes rendus des séances de l'In stitut des Sciences de Roumanie, III 2, 1939, p. 135–138.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТОПОЛОГИИ

(Резюме)

Используя понятие предела для последовательности множеств, автор определяет предельные топологии для последовательности топологических пространств и изучает их свойства в зависимости от свойств последовательности топологических пространств.

TOPOLOGIES–LIMITE

(Résumé)

Employant la notion de limite pour une suite d'ensembles, l'auteur définit des topologies-limite pour une suite d'espaces topologiques et étudie les propriétés de ces espaces en fonction des propriétés de la suite d'espaces topologiques.

ASUPRA COORDONATIZĂRII ŞI SCUFUNDĂRII STRUCTURILOR DE INCIDENŢĂ

VICTORIA GROZE

În lucrarea de faţă ne propunem să extindem metoda de coordonatizare a planului proiectiv, dată de Marshall Hall [1] pentru anumite structuri de incidenţă, care generalizează planul proiectiv. Însăşi noţiunea de structură de incidenţă va fi generalizată.

În acest scop, reamintim definiţia structurii de incidenţă, respectiv a „n-ţesutului" (G. Pickert [2]).

DEFINIŢIA 1. O structură de incidenţă este un triplet $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, \mathrm{I})$ unde $\mathfrak{P}$ şi $\mathfrak{D}$ sînt mulţimi, iar I o relaţie definită pe $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{D}$ şi care are proprietăţile:

1. $x \,\mathrm{I}\, y \Rightarrow x \in \mathfrak{P}, \quad y \in \mathfrak{D}$;

2. $x_i \mathrm{I} y_k, \ (i, k = 1, 2) \Rightarrow x_1 = x_2$ sau $y_1 = y_2$.

Elementele mulţimii $\mathfrak{P}$ se vor numi puncte, cele ale mulţimii $\mathfrak{D}$ drepte, iar I relaţia de incidenţă. Notaţia $x \,\mathrm{I}\, y$ se citeşte „x incident cu y".

DEFINIŢIA 2. Se numeşte n-ţesut o structură de incidenţă $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, \mathrm{I})$, pentru care există în mulţimea $\mathfrak{P}$ punctele distincte $P_1, P_2, \ldots P_n$ $(n \geqslant 3)$, numite puncte fundamentale, care satisface următoarele proprietăţi:

1. Două drepte distincte au un singur punct comun;

2. Pe orice dreaptă $d \in \mathfrak{D}$ este situat cel puţin unul din punctele P_i $(i = \overline{1, n})$;

3. Printr-un punct P_i $(i = 1, n)$ şi orice alt punct trece exact o dreaptă.

4. Există un punct diferit de punctele fundamentale necoliniar cu două puncte fundamentale distincte.

Generalizînd noţiunea de structură de incidenţă, introducem noţiunile de prestructură de incidenţă slabă, respectiv de prestructură de incidenţă.

DEFINIŢIA 3. O prestructură de incidenţă slabă $\mathfrak{s}$ este un triplet $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, \mathrm{I})$, unde $\mathfrak{P}$ şi $\mathfrak{D}$ sînt mulţimi (de puncte, respectiv de drepte), iar I o relaţie definită pe $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{D}$, care satisface proprietăţile:

1. $x \,\mathrm{I}\, y \Rightarrow x \in \mathfrak{P}, y \in \mathfrak{D}$.

2. Există în $\mathfrak{P}$ patru puncte în poziţie generală O_1, O_2, O_3, E, numite puncte fundamentale, astfel ca mulţimea $\mathfrak{P}$ împreună cu dreptele trecînd prin $O_1, O_2,$

O_3 să formeze un trițesut numit țesut de înmulțire; de asemenea mulțimea $\mathfrak{P}$ împreună cu dreptele trecînd prin O_1, O_2, E', unde $E' = O_1O_2 \cap O_3E$, să formeze un trițesut, numit țesut de adunare.

3. Orice dreaptă este intersectată de dreptele incidente cu O_3 exact într-un punct.

4. Dacă AIO_2O_3 și BIO_2O_1, $A \neq B$, atunci A și B sînt incidente cel mult cu o dreaptă.

Observație. Mulțimea $\mathfrak{P}$ împreună cu dreptele trecînd prin O_1, O_2, O_3, E' nu formează neapărat un 4-țesut, întrucît existența și unicitatea punctului de intersecție dintre o dreaptă prin O_3 și una prin E' nu este asigurată.

Această structură o vom numi 4-țesut slab.

DEFINIȚIA 4. Prestructura de incidență slabă S se numește *prestructură de incidență*, dacă condiția 4. din definiția 3. este verificată sub următoarea formă mai tare:

4'. Dacă AIO_2O_3 și BIO_2O_1, $A \neq B$, atunci A și B sînt incidente exact cu o dreaptă.

DEFINIȚIA 5. Două prestructuri de incidență slabe $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, I)$ și $(\mathfrak{P}', \mathfrak{D}', I')$ se numesc *izomorfe* dacă există o bijecție $\sigma : \mathfrak{P} \cup \mathfrak{D} \to \mathfrak{P}' \cup \mathfrak{D}'$ astfel ca $\mathfrak{P}I\mathfrak{D} \Leftrightarrow \sigma(\mathfrak{P})I\sigma(\mathfrak{D})$.

În cele ce urmează se consideră o prestructură de incidență slabă S și se coordonatizează în felul următor:

Fie $\mathcal{M}$ mulțimea punctelor incidente cu dreapta O_3E, diferite de punctul E', $\mathcal{A}$ o mulțime echivalentă cu $\mathcal{M}$, iar $\varphi : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$ o aplicație bijectivă (fig. 1).

Se notează $\varphi(O_3) = 0$, $\varphi(E) = 1$. Fie acum $N \in \mathfrak{P}$ astfel ca $N \not I O_1O_2$ (fig. 1). Dreptele O_2N și O_1N intersectează dreapta O_3E în punctul A, respectiv B. Perechea ordonată (x, y), unde $x = \varphi(A)$ și $y = \varphi(B)$, se numesc coordonatele punctului N. Se vede imediat că punctele incidente cu O_3E au coordonate egale, astfel $O_3(O, O)$, E (1,1). $\mathfrak{P}'$ fiind mulțimea punctelor din $\mathfrak{P}$ neincidente cu dreapta O_1O_2, punctelor din $\mathfrak{P}'$ le-am atribuit coordonate, adică $\mathfrak{P}' \Leftrightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. Pentru a coordonatiza punctele AIO_1O_2 se presupune întîi $A \neq O_2$ și se consideră dreptele O_3A și O_2E și se notează cu B punctul lor de intersecție. Conform coordonatizării punctelor din $\mathfrak{P}'$, avem $B(1, m)$ Atribuim punctului A ca și coordonată, a doua coordonată a punctului B și notăm $A(m)$ (fig. 2). Punctului O_2 îi atribuim coordonata ∞.

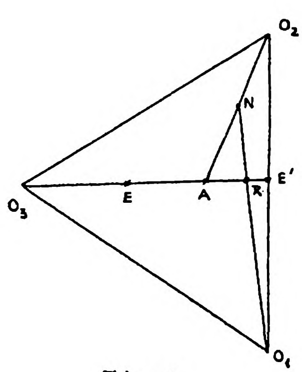

Fig. 1.

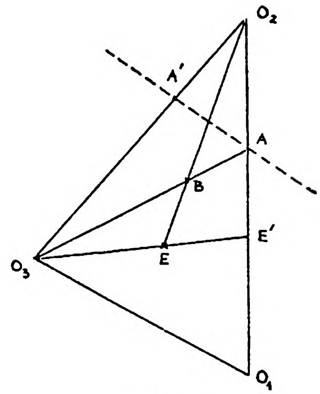

Fig. 2.

Notăm $\mathfrak{D}^* = \{d | d \in \mathfrak{D},\ d \not\mathrel{I} O_2\}$.

Unei drepte dIO_2 îi asociem ecuaţia $x = a$, unde $a = \varphi\ (P)$, P fiind punctul de intersecţie al dreptei d cu O_3E şi o mai notăm cu $[a]$. Unei drepte $d^* \in D^*$ incidentă cu punctele A şi A' îi asociem perechea ordonată (m, b), unde m este coordonata punctului AIO_1O_2, iar b coordonata nenulă a punctului $A'IO_2O_3$ (fig. 2). Dreapta d^* se mai notează cu $[m, b]$. Putem scrie deci $D^* \Leftrightarrow R \subset Q \times Q$ unde

$$\mathfrak{R} = \{(m, b) |\ \exists\ d^* \in \mathfrak{D}^*,\quad A'(0, b)\,Id^*,\ A(m)Id^*\},$$

m se numeşte direcţia dreptei d^*. În cazul dreptelor incidente cu O_2 definim direcţia prin ∞.

Definiţia 6. În mulţimea Q definim o *operaţie ternară parţială*, care asociază elementelor din

$$\mathfrak{L} = \{(x, m, b) | x \in \mathfrak{Q},\qquad (m, b) \in \mathfrak{R}\}$$

elementul

$$y = T(x, m, b) \tag{1}$$

egal cu a doua coordonată a punctului de intersecţie al dreptei $[x]$ cu dreapta $[m, b]$.

Observaţie. Dacă $\mathfrak{R} = \mathfrak{Q} \times \mathfrak{Q}$ operaţia se numeşte *ternară.*

După felul cum a fost definit, y este unic determinat, în conformitate cu proprietatea 2. a definiţiei 3.

Se verifică imediat, următoarele proprietăţi:

1. $T(0, m, b) = b \qquad \forall (m, b) \in \mathfrak{R}$
2. $T(x, 0, b) = b \qquad \forall x, b \in \mathfrak{Q}$
3. $T(1, m, 0) = m \qquad \forall m \in \mathfrak{Q}$
4. $T(x, 1, 0) = x \qquad \forall x \in \mathfrak{Q}$

Observaţie. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca punctul (x, y) şi dreapta $[m, b]$ să fie incidente este $y = T(x, m, b)$.

În mulţimea $\mathfrak{Q}$ definim operaţiile:

a) *Adunarea*, ca fiind operaţia definită prin relaţia

$$x + b = T(x, 1, b) \tag{2}$$

(Se observă că $T(x, 1, b)$ este definit pentru orice $x, b \in \mathfrak{Q}$).

Această operaţie are următoarele proprietăţi:

1. $y = x + b$ admite soluţie unică în raport cu x, pentru orice y şi b, şi în raport cu b pentru orice y şi x.

Demonstraţie. Într-adevăr, dreptele $[1, b]$ şi cele incidente cu O_1 şi O_2 aparţin 3-ţesutului (O_1, O_2, E') şi deci ele au două câte două exact un punct comun, iar printr-un punct oarecare şi un punct fundamental al ţesutului trece exact o dreaptă.

2. $0 + b = T(0,\ 1,\ b) = b$.

3. $x + 0 = T(x,\ 1,\ 0) = x$.

Proprietățile 2. și 3. se verifică imediat. Proprietatea 1. înseamnă că $(\mathcal{Q}, +)$ este un cvasigrup, iar din proprietățile 2. și 3. se observă că pentru operația de adunare definită, 0 este element neutru, deci $(\mathcal{Q}, +)$ este un loop.

b) Operația de *înmulțire* definită prin relația

$$x \cdot m = T(x, m, 0) \text{ pentru } \forall x, m \in \mathcal{Q} \tag{3}$$

$(T(x, m, 0)$ există pentru orice $x, m \in \mathcal{Q})$.

Această operație admite următoarele proprietăți:

1. $y = x \cdot m$ pentru $x \neq 0$ și $y \in Q$ are soluție unică în raport cu m și pentru $m \neq 0$ și $y \in \mathcal{Q}$, are soluție unică în raport cu x.

Demonstrație. Într-adevăr, proprietatea rezultă imediat din faptul că dreptele incidente cu O_1, O_2, O_3 aparțin 3-țesutului (O_1, O_2, O_3).

2. $x \cdot 1 = T(x, 1, 0) = x$.

3. $1 \cdot m = T(1, m, 0) = m$.

Proprietățile 2. și 3. rezultă din proprietățile operației ternare parțiale.

Dacă notăm $\mathcal{Q}^* = \mathcal{Q}\setminus\{0\}$, atunci $(\mathcal{Q}^*, \cdot)$ este un loop cu elementul neutru 1.

DEFINIȚIA 7. Fie $\mathcal{Q}$ o mulțime care conține elementele distincte 0,1 și $\mathcal{R}$ o parte a produsului cartesian $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ astfel ca elementele de forma $(0, x)$, $(x, 0)$, $(1, x)$ să fie conținute în $\mathcal{R}$ pentru orice $x \in \mathcal{Q}$. Fie mai departe $\mathcal{L} = \{(x,m,b) | x \in \mathcal{Q}, (m, b) \in \mathcal{R}\}$ și $T : \mathcal{L} \to \mathcal{Q}$. Notăm $x + b = T(x, 1, b)$ și $x \cdot m = T(x, m, 0)$ pentru $\forall x, b, m \in \mathcal{Q}$. Sistemul algebric $(\mathcal{Q}, T)$ se numește *ternar parțial*, dacă sînt verificate proprietățile:

1. $T(0, m, b) = b \qquad \forall (m, b) \in \mathcal{R}$

2. $T(x, 0, b) = b \qquad \forall x, b \in \mathcal{Q}$,

3. $T(1, m, 0) = m \qquad \forall m \in \mathcal{Q}$.

4. $T(x, 1, 0) = x \qquad \forall x \in \mathcal{Q}$.

5. Ecuațiile $x + a = b$, $a + x = b$, $a^* \cdot x = b$, $x \cdot a^* = b$ au cîte o soluție unică în raport cu x, unde a și b sînt elemente arbitrare din $\mathcal{Q}$, iar a^* din $\mathcal{Q}\setminus\{0\}$ Dacă $\mathcal{R} = \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ sistemul algebric $(\mathcal{Q}, T)$ se numește *ternar*. În acest caz sistemul algebric $(\mathcal{Q}, +, \cdot)$ se numește cvasicorp natural.

Am văzut, că unei structuri de incidență slabă i se asociază o operație ternară parțială, deci un ternar parțial. Avem și reciproc.

TEOREMA 1. *Fiind dat ternarul parțial $(\mathcal{Q}, T)$ există o prestructură de incidență slabă $\mathcal{S}$, astfel ca operația ternară parțială asociată ei să fie egală cu T. Prestructura $\mathcal{S}$ este unic determinată, abstracție făcîndu-se de izomorfisme.*

Demonstrație. Considerăm ca puncte $\mathfrak{P}$: (x, y) (m) și (∞) unde $x, y, m \in \mathcal{Q}$, iar ca drepte $\mathfrak{D}$: $[m, b]$, $[a]$, $[\infty]$, unde $a \in \mathcal{Q}$, $(m, b) \in \mathfrak{R}$. Vom arăta că această mulțime de puncte $\mathfrak{P}$ și drepte $\mathfrak{D}$ împreună cu relația de incidență I definită prin:

$$
\begin{array}{lcl}
(x, y)I[m, b] & \Leftrightarrow & y = T(x, m, b) \\
(x, y)I[a] & \Leftrightarrow & x = a \\
(x, y)\not{I}[\infty] & & \forall x, y \in \mathcal{Q} \\
(m)I[m', b] & \Leftrightarrow & m = m' \\
(m)\not{I}[a], & & \forall m, a \in \mathcal{Q} \\
(m)I[\infty], & & \forall m \in \mathcal{Q} \\
(\infty)\not{I}[m, b] & & \forall m, b \in \mathcal{Q} \\
(\infty)I[a] & & \forall a \in \mathcal{Q} \\
(\infty)I[\infty] & &
\end{array}
$$

formează o prestructură de incidență slabă. Notăm $O_3 = (0, 0)$, $O_1(0)$, $O_2 = (\infty)$ și $E' = (1)$. Arătăm întîi că mulțimea $\mathfrak{P}$ împreună cu dreptele prin O_1, O_2, O_3 formează un 3-țesut. Într-adevăr, două drepte d, d' incidente cu O_2 respectiv O_3, cu O_2 respectiv O_1 și cu O_1 respectiv O_3 au exact un punct comun.

1) $d = [a]$, $d' = [m, 0]$, avem că $y = T(a, m, 0) = a \cdot m$, deci avem punctul $(a, a \cdot m)$. De asemenea pentru cazurile:

2) $d = [a]$, $d' = [0, b]$, $y = [T(a, 0, b] = b$, deci punctul (a, b) și,

3) $d = [0, b]$, $d' = [m, 0]$, $T(x, 0, b) = T(x, m, 0)$, sau $b = x \cdot m$, care pentru $m \neq 0$ admite soluție unică x_0 în raport cu x și deci avem punctul $(x_0, x_0 \cdot m)$.

Arătăm acum că printr-un punct oarecare și unul din punctele O_1, O_2, O_3 trece exact o dreaptă:

Într-adevăr printr-un punct (r, s) și (∞) există totdeauna o singură dreaptă $[r]$; printr-un punct (r, s) și (0) există singura dreaptă $[0, s]$, iar prin punctele (r, s) și $(0, 0)$ avem singura dreaptă $[m, 0)$ unde m se determină unic din $s = r \cdot m$. Deci mulțimea $\mathfrak{P}$ împreună cu dreptele prin O_1, O_2, O_3 formează un 3-țesut. În continuare arătăm în mod analog că mulțimea punctelor $\mathfrak{P}$ împreună cu dreptele prin O_1, O_2, E' formează un 3-țesut. Într-adevăr, avem cazurile:

1) $d = [a]$, $d' = [1, b]$, $y = T(a, 1, b) = a + b$, deci avem un singur punct $(a, a + b)$;

2) $d = [1, b]$, $d' = [0, b]$, $y = T(a, 0, b) = b$, avem punctul (a, b) și

3) $d = [1, b)$, $d' = [0, b']$, $y = T(x, 1, b) = T(x, 0, b')$ sau $x + b = b'$, care are soluție unică în raport cu x, în baza proprietății 5. a definiției 7.

Printr-un punct (r, s) și (1) trece o singură dreaptă și anume dreapta $[1, b]$, unde b este unic determinat din $s = r + b$.

Fie acum o dreaptă $d = [m, b]$ și o dreaptă $[a]$ ele au exact un punct comun, căci $y = T(a, m, b)$ este unic determinat: astfel am dovedit și proprietatea 3. din definiția 3.

Pentru a demonstra proprietatea 4, a aceleiași definiții, considerăm punctele $A(0, b')IO_2O_3$ și $B(m')IO_1O_2$ și dacă există $d = [m, b]$, din $BId \Rightarrow m' = m$, iar din $AId => b' = T(0, m', b) = b$. $\mathfrak{S} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, I)$ fiind o prestructură de incidență slabă, să considerăm ternarul parțial $(\mathfrak{Q}, T)$ asociat. Aplicînd construcția de mai sus, ternarului parțial $(\mathfrak{Q}, T)$, am văzut că se obține o prestructură de incidență slabă $\mathfrak{S}'(\mathfrak{P}', \mathfrak{D}', I')$, $\mathfrak{S}$ și $\mathfrak{S}'$ sînt izomorfe, căci aplicația σ, prin care unui punct $P \in \mathfrak{P}$ îi corespunde în $(\mathfrak{Q}, T)$ (x, y), (m) sau (∞) iar unei drepte $d \in \mathfrak{D}$ îi corespunde în $(\mathfrak{Q}, T)$ $[m, b]$, $[a]$ sau $[\infty]$ este bijectivă și păstrează incidențele. Rezultă că două prestructuri de incidență slabe $\mathfrak{S}$ și $\mathfrak{S}'$, cu același ternar asociat (Q, T), sînt izomorfe între ele.

DEFINIȚIA 8. $\mathfrak{S} = (\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, I)$ fiind o prestructură de incidență cu punctele fundamentale O_1, O_2, O_3, E, se numește *perspectivitate cu axa $l = O_1O_2$ și centrul $c \in \mathfrak{P}$* o aplicație

$$\varphi : \begin{cases} \mathfrak{P} \to \mathfrak{P} \\ \mathfrak{F} \to \mathfrak{D} \end{cases} \tag{4}$$

unde $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{D}$, care verifică următoarele condiții:

1. $\mathfrak{F}$ conține dreptele țesutului de adunare și dreptele prin C.
2. $\varphi(M) = M$ dacă MIO_1O_2;
3. $\varphi(d) = d$ dacă CId;
4. $M \in \mathfrak{P}$, $d \in \mathfrak{F}$, din $MId => \varphi(M) I \varphi(d)$.

DEFINIȚIA 9. Prestructura de incidență slabă $\mathfrak{S}$ se nmește *$O_i - l$ slab tranzitivă* $(i = 1,2,3)$, dacă oricare ar fi două puncte A, A' coliniare cu O_i, distincte de O_i și neincidente cu l, există o perspectivitate φ cu axa l și centrul O_i, astfel ca $\varphi(A) = A'$.

În legătură cu prestructura $\mathfrak{S}$ $O_2 - l$ slab tranzitivă demonstrăm cîteva teoreme:

TEOREMA 2. *Dacă o prestructură de incidență slabă $\mathfrak{S}$ este $O_2 - l$ slab tranzitivă atunci avem proprietatea că:*

$(\mathfrak{Q}, +)$ este grup

Demonstrație. Ecuațiile unei perspectivități cu centrul O_2 și axa l sînt

$$\varphi : \begin{cases} x' = x \\ y' = f(y) \end{cases} \tag{5}$$

deoarece, pe baza condiției 3. din definiția 8, o dreaptă dIO_2 se transformă în ea însăși deci punctele ei vor avea aceeași primă coordonată, modificîndu-se doar cea de-a doua. Aceasta la rîndul ei nu depinde de x, deoarece o dreaptă prin O_1 se transformă într-o dreaptă tot prin O_1.

În baza condiției 4. a aceleiași definiții, putem scrie

$$y = T(x, m, b) \Rightarrow y' = T(x', m', b'), \ x \in \mathfrak{Q}, \ [m, b] \in \mathfrak{F}$$

unde (x', y'), $[m', b']$ sînt imaginea prin φ a punctului (x, y) și a dreptei $[m, b]$. Ținînd seama de (5), de $m' = m$ și de $b' = f(b)$, avem

$$f(y) = T[x, m, f(b)], \quad [m, b] \in \mathfrak{F}$$

sau

$$f[T(x, m, b)] = T[x, m, f(b)], \ [m, b] \in \mathfrak{F} \tag{6}$$

Făcînd în ultima relaţie $m = 1$, avem pentru orice x, b din $\mathfrak{A}$

$$f(x + b) = x + f(b) \tag{7}$$

Luînd în (7) $b = 0$, găsim

$$f(x) = x + a \tag{7'}$$

unde am notat $f(0) = a$. Atunci relaţia (7) devine

$$(x + b) + a = x + (b + a) \quad (x, x + b) \in \mathfrak{A} \tag{8}$$

Ţinînd seama de $O_2 - l$ tranzitivitate a poate lua orice valoare din $\mathfrak{A}$; rezultă că relaţia (8) demonstrează asociativitatea operaţiei de adunare, ceea ce împreună cu proprietatea de loop arată că ($\mathfrak{A}$, +) este grup, şi cu aceasta am demonstrat teorema. $O_2 - l$ slab tranzitivitatea asigură existenţa unei perspectivităţi φ cu axa l şi centrul O_2, transformînd un punct A în orice alt punct A' incident cu $O_2 A$. Variind poziţia lui A', mulţimea $\mathfrak{F}$ care intră în definiţia perspectivităţii φ va varia în general şi ea, dar în toate cazurile va conţine dreptele 4-ţesutului slab. Notăm cu $\bar{\mathfrak{F}}$ intersecţia mulţimilor $\mathfrak{F}$ corespunzătoare tuturor poziţiilor punctului A' pe dreapta O_2A.

TEOREMA 3. *Dacă o structură de incidenţă $\mathfrak{S}$ este $O_2 - l$ slab transitivă, atunci*

$$T(x,m,b) = x.\, m + b \text{ pentru } [m,b] \in \bar{\mathfrak{F}} \tag{9}$$

Demonstraţie. Din relaţia (6) ţinînd seama de (7') deducem

$$T\,(x,m,b) + a = T\,(x,m,\, b + a), \text{ dacă } [m,b] \in \mathfrak{F}_a, \tag{10}$$

unde $\mathfrak{F}_a$ este mulţimea corespunzătoare perspectivităţii (5) cu proprietatea $f\,(0) = a$. Putem scrie:

$T\,(x,m,b) + a = T\,(x,m,b + a)$, pentru $[m,b] \in \bar{\mathfrak{F}}$, $\forall\, a \in \mathfrak{A}$ Punînd $a = -$ $- b$ rezultă

$$T\,(x,m,b) = T\,(x,m,0) + b,\ [m,b] \in \mathfrak{F}$$

sau

$$T\,(x,m,b) = x.m + b,\ \ [m,b] \in \bar{\mathfrak{F}}$$

şi deci teorema este demonstrată.

TEOREMA 4. *Într-o prestructură de incidenţă slabă $\mathfrak{S}$ $O_2 - l$ slab tranzitivă, orice dreaptă $d \in \mathfrak{D}$ este intersectată de dreptele incidente cu O_1, exact într-un punct.*

Demonstraţie. Fie $y = K$ o dreaptă incidentă cu O_1 şi $y = x.\, m + b$ o dreaptă arbitrară $\delta \in \mathfrak{D}$. Putem scrie atunci

$$K = x.\, m + b$$

sau

$$x.m = K - b$$

care are soluţie unică în raport cu x, deoarece această relaţie exprimă intersecţia dreptelor $y = x.\, m$ şi $y = K_1$, unde $K_1 = K - b$, drepte ce aparţin 4-ţesutului slab.

O întărire a noţiunii de perspectivitate este următoarea noţiune dată de

DEFINIȚIA 10. O perspectivitate cu axa $l = O_1O_2$ și centrul C se numește o omologie dacă mulțimea $\mathfrak{F}$ din definiția 8. conține dreptele O_3M, pentru punctele M cu proprietatea că dreapta $M\varphi(O_3)$ există în prestructura de incidență slabă $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, I)$.

DEFINIȚIA 11. Dacă în definiția 9. se înlocuiește perspectivitatea φ printr-o omologie, noțiunea de slab-tranzitivitate devine *tranzitivitate.*

TEOREMA 5. *Dacă o prestructură de incidență slabă este $O_2 - l$ tranzitivă, atunci*

$$T(x,m,b) = x.m + b \qquad (m,b) \in \mathfrak{R}.$$

Demonstrație. Dacă $(m,b) \in \mathfrak{R}$, în baza definiției 10., $[m,O] \in \mathfrak{F}_a$ și atunci în relația (10) făcînd $b = 0$, rezultă

$$x.m + a = T(x,m,a)$$

unde

$$a = f(o)$$

DEFINIȚIA 12. Fie $\mathcal{S}^*$ o prestructură de incidență $(\mathfrak{P}^*, \mathfrak{D}^*, I^*)$. O prestructură de incidență slabă $\mathcal{S}$ $(\mathfrak{P}, \mathfrak{D}, I)$ se spune să este scufundabilă în $\mathcal{S}^*$, dacă $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}^*$ $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}^*$ și $I = I^* | \mathfrak{P} \cup \mathfrak{D}$

TEOREMA 6. *O prestructură de incidență slabă $O_2 - l$ tranzitivă este totdeauna scufundabilă într-o prestructură de incidență $\mathcal{S}^*$ $O_2 - l$ tranzitivă,*

Demonstrație. Fie $\mathcal{S}^*$ o prestructură de incidență $(\mathfrak{P}^*, \mathfrak{D}, ^* I^*)$ în care mulțimea $\mathfrak{P}^*$ coincide cu mulțimea $\mathfrak{P} \in \mathcal{S}$, iar dreptele $\mathfrak{D}^*$ sînt definite de mulțimile

$$\{(a,y) | \; y \in \mathfrak{Q}\}, \qquad \text{cu } a \in \mathfrak{Q}$$

$$\{(x,y) | \; y = x.m + b\}, \text{ unde } (m,b) \in \mathfrak{Q} \times \mathfrak{Q}.$$

Trebuie să arătăm că $\mathcal{S}^*$ este o prestructură de incidență $O_2 - l$ tranzitivă. Ținînd seama de faptul că $\mathfrak{D}^* \supset \mathfrak{D}$, se vede imediat că $\mathcal{S}^*$ este o prestructură de incidență slabă. $\mathcal{S}^*$ este chiar o prestructură de incidență, căci prin $A\,I\,O_2O_3$ și $B\,I\,O_1O_2$, $A \neq B$, trece exact o dreaptă, aceasta rezultînd din însăși definiția dreptelor din $\mathcal{S}^*$.

Fie acum un element $b \in \mathfrak{Q}$ și definim o aplicație, pentru puncte, dată de

$$(\infty) \to (\infty)$$

$$(m) \to (m)$$

$$(a,c) \to (a, c+b)$$

iar pentru drepte

$$l \to l$$

$$x = a \to x = a$$

$$y = x.m + n \to y = x.m + (n+b), \; m,n \in \mathfrak{Q}.$$

Această aplicație este omologie, deoarece, dacă

$$(a,c)\ I\ y = xm + n,$$

avem

$$c = a \cdot m + n \text{ şi adunînd la dreapta pe } b$$

$$c + b = (a.m + n) + b$$

iar în baza proprietății de grup a lui $(Q, +)$ avem

$$c + b = a.m + (n + b)$$

şi deci

$$(a, c + b)\ I\ y = x.\ m + (n + b).$$

Întrucît b a fost un element arbitrar din $\mathcal{Q}$ şi în baza aplicației definite,

$$O_3(O,O) \to \bar{O}_3\ (0,b)$$

rezultă că $\mathcal{S}^*$ este $O_2 - l$ tranzitivă şi cu aceasta teorema este demonstrată.

În cele ce urmează admitem că prestructura de incidență este $O_i - l$ tranzitivă ($i = 1,2$), ceea ce ne va permite să demonstrăm proprietatea de distributivitate din dreapta a înmulțirii față de adunare în ternarul asociat prestructurii.

TEOREMA 7. *Dacă o prestructură de incidență $O_2 - l$ tranzitivă este şi $O_1 - l$ tranzitivă, atunci în ternarul asociat avem relația*

$$(x + a).\ m = x \cdot m + a.m,\ \forall\ x,a,m \in \mathcal{Q} \tag{11}$$

Demonstrație. Fie $\mathcal{S}$ $O_1 - l$ tranzitivă, atunci ecuațiile perspectivității sînt

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ y' = y \end{cases} \tag{12}$$

în baza aceloraşi considerente făcute în demonstrarea teoremei 2. Conform proprietății 4. din definiția 8. putem scrie că

$$y = T(x,m,b) \Rightarrow y' = T(x',m',b')$$

unde (x',y') şi $[m',b']$ sînt imaginea prin φ a punctului (x,y) şi a dreptei $[m,b]$. Ținînd seama de $m' = m$ şi de $b' = \varphi(m,b)$, avem

$$T(x,m,b) = T[f(x),\ m,\ \varphi(m,b)] \tag{13}$$

Ținînd seama de faptul că $\mathcal{S}$ este $O_2 - l$ tranzitivă, operația ternară se liniarizează, deci

$$x.\ m + b = f(x).\ m + \varphi\ (m,b),\quad (m,b) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q} \tag{13'}$$

Făcînd în (13') $x = 0$, deducem

$$b = a.\ m + \varphi\ (m,b)$$

unde $a = f(0)$. Substituind valoarea lui b astfel obținută în (13') obținem

$$x.\ m + a.\ m + \varphi\ (m,b) = f\ (x).\ m + \varphi\ (m,b)$$

sau

$$x.m + a.m = f(x).m \tag{14}$$

Făcînd $m = 1$, găsim

$$x + a = f(x),$$

care substituită în relaţia (14) ne dă

$$x.m + a.m = (x + a).m \ \forall\, x, a, m \in \mathcal{Q}$$

care este chiar relaţia (11) din enunţul teoremei.

TEOREMA 8. *Fiind dat un ternar* ($\mathcal{Q}$,T) *există totdeauna o prestructură de incidenţă* $\mathcal{S}$ $O_i - l$ *tranzitivă* ($i = 1,2$), *astfel ca operaţia ternară asociată ei să fie egală cu* T. *Prestructura* $\mathcal{S}$ *este unic determinată, abstracţie făcîndu-se de un izomorfism.*

Demonstraţie. Demonstraţia primei părţi se face la fel cu cea a teoremei 1; rămîne să arătăm că prestructura de incidenţă $\mathcal{S}$ este $O_i - l$ tranzitivă ($i = 1,2$). Pentru aceasta, considerăm un element arbitrar $b \in Q$ şi definim aplicaţia, pentru puncte, dată de

$$(\infty) \to (\infty)$$
$$(m) \to (m)$$
$$(a,c) \to (a + b,c)$$

iar pentru drepte

$$[l] \to [l]$$
$$[a] \to [a + b]$$
$$y = x.m + n \to y = (x + b).m + n.$$

Această aplicaţie este o coliniaţie, deoarece, dacă

$$(a,c)\, I\, y = x.m + n, \text{ avem } c = a.m + n,$$

dar atunci, avem

$$(a + b,c)\, I\, y = (x - b) \,.\, m + n$$

şi cum b a fost ales arbitrar în Q şi

$$O_3\,(0,0) \to \overline{O}_3\,(b,0)$$

rezultă că $\mathcal{S}$ este $O_1 - l$ tranzitivă. $O_2 - l$ tranzitivitatea se demonstrează ca şi în cazul teoremei 6.

În încheiere dăm următoarea teoremă:

TEOREMA 9. *O prestructură de incidenţă* $O_i - l$ *tranzitivă* ($i = 1,2$) *este o structura de incidenţă* $O_i - l$ *tranzitivă* ($i = 1,2$).

Demonstraţie. Pentru a arăta că prestructura de incidenţă este o structură de încidenţă este suficient să dovedim că oricare două puncte distincte sînt incidente exact cu o dreaptă. Fie punctele (x_1,y_1) şi (x_2,y_2) cu $x_1 \neq x_2$ şi punem condiţia ca ele să fie incidente cu dreapta $[m,b]$, atunci putem scrie

$$y_1 = x_1 \,.\, m + b$$
$$y_2 = x_2 \,.\, m + b$$

Exprimînd pe b din cele două egalităţi, avem

$$-(x_1 m) + y_1 = -(x_2 m) + y_2$$

sau

$$x_2 \cdot m - x_1 \cdot m = y_2 - y_1$$

$$(x_2 - x_1 + x_1)\, m - x_1 \,.\, m = y_2 - y_1$$

deci

$$(x_2 - x_1)\,.\, m = y_2 - y_1$$

şi cum $x_2 - x_1 \neq 0$, rezultă că m este unic determinat, de asemenea $b = -x_1 \,.\, m + y_1$ este unic determinat şi cu aceasta teorema e demonstrată.

(Intrat în redacție la 13 aprilie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Marshall, Hall Jr., *The Theory of Groups*, The Macmillan Company, New York, 1959, p. 353—356.
2. Pickert, Günther, *Projektive Ebenen*, Springer-Verlag. Berlin, Göttingen—Heidelberg, 1955, p. 2, 42.

О КООРДИНАЦИИ И ПОГРУЖЕНИИ СТРУКТУР ПАДЕНИЯ

(Резюме)

В работе распространяется метод координации, данный Маршаллом Холлом [1] для структур падения, обобщающих проективную плоскость. Обобщая само понятие структуры падения, автор вводит понятия предварительной структуры слабого падения, соответственно предварительной структуры падения путём ослабления условия единства падающих прямых двумя точками. Оно будет постулировано только для определённых пар точек.

Устанавливается эквивалентность между геометрической структурой и ассоциированной алгебраической системой.

Изучаются особенности предварительных структур падения, подвергнутых некоторым условиям транзитивности. Транзитивности определяются с помощью гомологий, сохраняющих только коллинеацию определённых триплетов точек.

В дальнейшем доказывается, что предварительная структура слабого падения $O_2 - O_1 O_2$ переходная является одновременно погружаемой в одну предварительную структуру падения $O_2—O_1O_2$ переходную и что одна предварительная структура падения $O_i—O_1O_2$ переходная ($i = 1,2$) является структурой падения $O_i - O_1 O_2$ транзитивной ($i = 1,2$).

SUR LA COORDONATISATION ET L'IMMERSION DES STRUCTURES D'INCIDENCE

(Résumé)

Dans le présent travail l'auteur étend la méthode de „coordonatisation" donnée par M. Hall [1] à des structures d'incidence généralisant le plan projectif. En généralisant la notion même de structure d'incidence, on introduit les notions respectives de préstructure d'incidence faible et de préstructure d'incidence, par l'affaiblissement de la condition d'unicité de la droite incidente à deux points. Elle ne sera postulée que pour certaines paires de points.

On établit une équivalence entre la structure géométrique et le système algébrique associé.

On étudie les particularités des préstructures d'incidence soumises à des conditions de transitivité. Les transitivités se définissent à l'aide d'homologies qui conservent seulement la collinéarité de certains triplets de points.

On démontre ensuite qu'une préstructure d'incidence faible $O_2-O_1O_2$ transitive est en même temps plongeable dans une préstructure d'incidence $O_2-O_1O_2$ transitive et qu'une préstructure d'incidence $O_i-O_1O_2$ transitive ($i = 1, 2$) est une structure d'incidence $O_i-O_1O_2$ transitive ($i = 1, 2$).

LA PRIMITIVE M_* D'UNE FONCTION INTÉGRABLE M_*

MARCEL RĂDULESCU

En deux articles [1, 2] a été définie l'intégrale M_* et ont été données plusieurs propriétés de cette intégrale. Dans cette note, nous allons définir et démontrer plusieurs propriétés de la primitive M_* d'une fonction mesurable et intégrable M_* sur B. Nous allons utiliser les notations et les résultats obtenus dans les articles précédents. Nous observerons que la primitive M_* est définie pour les fonctions intégrables M_* qui sont *mesurables*. C'est pourquoi dans cette note nous considérons seulement des fonctions mesurables sans le spécifier.

1. Soit f une fonction réelle définie et intégrable M_* sur la base B de l'intervalle $[a, b]$; on peut définir, en vertu du théorème 3.5. de [2], pour $x \in B$ la fonction.

$$F(x) = (M_*)\int_{Bx} f(u)du, \tag{1.1}$$

où Bx est la base $Bx = B \cap [a, x]$. Cette fonction est une application d'une base B sur l'axe réel $F : B \to R$. Nous appellerons dans ce qui suit cette fonction *la primitive* M_* *de* f. Il résulte de même du théorème 3.5 de [2] que

$$F(x_2) - F(x_1) = (M_*)\int_{x_1Bx_2} f(u)du, \tag{1.2}$$

où $x_1, x_2 \in B$, $x_1 < x_2$ et $x_1Bx_2 = B \cap [x_1, x_2]$. Une autre propriété est le

THÉORÈME 1.1. *Soit f une fonction intégrable M_* sur B et F la primitive M_* correspondante. S'il existe un ensemble $A \subset B$ dense sur B, tel que $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in A$, alors F est une fonction non décroissante sur B.*

Démonstration. On considère deux points $x_1, x_2 \in B$ tels que $x_1 < x_2$ et l'ensemble $x_1Ax_2 = A \cap [x_1, x_2]$. Par hypothèse l'ensemble x_1Ax_2 est dense sur la base x_1Bx_2 et $f(x) \geqslant 0$ pour $x \in x_1Ax_2$. Il résulte en vertu du théorème 2.3 de [2] que

$$(M_*)\int_{x_1Bx_2} f(u)du \geqslant 0.$$

On déduit alors de (1.2) que $F(x_2) - F(x_1) \geqslant 0$.

Pour une fonction F définie sur B et $d : < x_i, y_i >$, $i = \overline{1, k}$ une sous-division de B nous noterons par $\omega(F, d)$ la somme

$$\omega(F, d) = \sum_{i=1}^{k} [F(y_i) - F(x_i)].$$

On voit pour chaque sous-division d que $\omega(F, d) = \omega(F, d_r)$, où par d_r nous avons noté la sous-division réduite de d (voir [1] page 25).

DEFINITION. *Soient f et F deux fonctions définies sur la base B. Nous disons que F est une fonction absolument continue relative à f sur la base B si à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond $\eta > 0$ tel que*

$$|\omega(F, d_r) - \sigma(f, d)| < \varepsilon \tag{1.3}$$

pour chaque sous-division d qui vérifie l'inégalité $\Delta(d) < \eta$.

Nous allons noter par $AC(B, f)$ la classe des fonctions absolument continues relative à f sur la base B. Si $F \in AC(B, f)$ alors la fonction Φ définie par la relation $\Phi(x) = F(x) + C$, $x \in B$ où C est une constante, appartient de même à la classe $AC(B, f)$, parce que nous avons pour chaque sous-division d $\omega(\Phi, d) = \omega(F, d)$.

THÉORÈME 1.2. *La primitive M_* d'une fonction f intégrable M_* sur B appartient à la classe $AC(B, f)$.*

Démonstration. Par hypothèse f est intégrable M_* sur B, alors il résulte du théorème 3.3 [2] que la fonction f vérifie la propriété S_* sur B. Donc au nombre $\varepsilon > 0$ correspond $\eta > 0$ tel que

$$|\sigma(d') - \sigma(d'')| < \varepsilon \tag{1.4}$$

pour chaque paire de sous-divisions d', d'', $d' < d''$ (voir [1] page 27) qui vérifient l'inégalité $\Delta(d') = \Delta(d'') < \eta$.

Soit d une sous division qui vérifie l'inégalité précédente. En notant par d_j, $j = \overline{1, k_r}$ les composantes de d nous avons $\overline{d}_{j_1} \cap \overline{d}_{j_2} = \emptyset$, $j_1 \neq j_2$ et $d = \bigcup_{j=1}^{k_r} d_j$. Nous remarquons que les sous-divisions $(d_j)_r : < x_j, y_j >$, $j = \overline{1, k_r}$ sont unidimensionnelles. On considère les bases $B_j = B \cap [x_j, y_j]$, $j = \overline{1, k_r}$. La fonction f est intégrable M_* sur B_j et

$$(M_*) \int_{B_j} f(u) \mathrm{d}u = F(y_j) - F(x_j), \; j = \overline{1, k_r}.$$

Nous noterons par $\mathfrak{D}(d^1, d^2, \ldots, d^n, \ldots)$ une suite de sous-divisions de B telle que $d^1 = d$, $d^n < d^{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ et

$$\lim_{n \to \infty} \delta(d^n) = 0. \tag{1.5}$$

Soient d_j^n les sous-divisions $d_j^n = d^n \cap (d_j)_r$, $j = \overline{1, k_r}$, $n = 1, 2, \ldots$ alors il résulte de (1.5) que $\mathfrak{D}_j(d_j^1, d_j^2, \ldots, d_j^n, \ldots)$, $j = \overline{1, k_r}$ est une suite admise de divisions de B_j. Donc

$$\lim_{n \to \infty} \sigma(f, d_j^n) = F(y_j) - F(x_j), \quad j = \overline{1, k_r}$$

ainsi que

$$\lim_{n\to\infty} \sigma(f, d^n) = \omega(F, d) = \omega(F, d_r)$$

Parce que $d = d^1 < d^n$, $n = 2, 3, \ldots$ de (1.4) on déduit que

$$|\sigma(f, d^n) - \sigma(f, d)| < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots;$$

d'où à la limite résulte (1.3).

THÉORÈME 1.3. *Si pour la fonction f définie sur B_0 il existe une fonction $\Phi \in AC(B_0, f)$ alors il existe la base $B \subset B_0$ telle que f est intégrable M_* sur B.*

Démonstration. Par hypothèse il existe la fonction Φ telle que à chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond $\eta > 0$ ainsi que

$$|\omega(\Phi, d_r) - \sigma(f, d)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pour chaque sous-division d pour qui $\Delta(d) < \eta$. Pour deux sous-divisions d', d'', $d' < d''$ telles que $\Delta(d') = \Delta(d'') < \eta$, nous avons

$$|\sigma(f, d'') - \sigma(f, d')| \leqslant |\sigma(f, d'') - \omega[\Phi, (d'')_r]| + |\omega[\Phi, (d')_r] - \sigma(f, d')| < \varepsilon,$$

parce que $(d')_r = (d'')_r$. Il résulte que f possède la propriété S_* sur B_0. Alors on déduit du théorème 3.4 [2] qu'il existe la base $B \subset B_0$ telle que f est intégrable M_* sur B.

2. Soit un point $x \in (a, b)$, $A \subset [a, b]$ un ensemble mesurable et $A_h = A \cap [x - h, x + h]$, par $\nu(A, x)$ nous noterons la limite

$$\nu(A, x) = \lim_{h\to 0} \frac{m(A_h)}{2h}.$$

Evidemment $0 \leqslant \nu(A, x) \leqslant 1$. Si $\nu(A, x) = 1$ on dira que le point x est un point de densité 1 pour l'ensemble A. On sait [4] que si $m(A) > 0$, alors $m(A') = m(A)$, où A' est l'ensemble des points de densité 1 de A. Si, pour la fonction donnée F, il existe la limite

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x + h) - F(x)}{h} = F'_{as}(x),$$

pour $x + h \in A$, $x \in A'$ alors nous allons appeler $F'_{as}(x)$ la dérivée asymptotique de F sur le point x.

Si A est un ensemble parafait $A \subset B$, nous désignons par $[a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots$ les intervalles contigus de A et par d_i les sous-divisions $d_i: \langle a_i b_i \rangle$. Pour $x_1, x_2 \in B$, $x_1 < x_2$ par

$$\sum_{x_1}^{x_2}{}_i \,[\omega[F(d_i)_r] - \sigma(f, d_i)]$$

nous désignons la somme relative aux indices i pour lesquels $x_1 \leqslant a_i < b_i \leqslant x_2$. Si $a_i < x_1 < b_i \leqslant x_2$ alors $d_i = \langle x_1, b_i \rangle$ et si $x_1 \leqslant a_i < x_2 < b_i$ alors $d_i = \langle a_i, x_2 \rangle$.

LEMME 1. *Soient f une fonction intégrable M_* sur B et $A \subset B$ un ensemble parfait. Alors la série*

$$\sum_a^b {}_i \left[\omega[F, (d_i)_r] - \sigma(f, d_i) \right] \tag{2.1}$$

est absolument convergente.

Démonstration. Parce que f est intégrable M_* d'après le théorème 1.2, à chaque $\varepsilon > 0$ correspond $\eta > 0$ tel que (1.3) soit vérifié. Soient respectivement I^+, I^- les ensembles des indices $i = 1, 2, \ldots$ pour lesquels

$$[\omega(F, d_i)_r] - \sigma(f, d_i) \geqslant 0, \ i \in I^+ ; \ \omega[F, (d_i)_r] - \sigma(f, d_i) < 0, \ i \in I^-.$$

Nous considérons les séries

$$\sum_{\substack{a \\ i \in I^+}}^b {}_i \left[\omega[F, (d_i)_r] - \sigma(f, d_i) \right] \tag{2.2}$$

$$\sum_{\substack{a \\ i \in I^-}}^b {}_i \left[\omega[F, (d_i)_r] - \sigma(f, d_i) \right] \tag{2.3}$$

et les sous-divisions $d^n = \bigcup_{i \geqslant n} d_i$, $n = 1, 2, \ldots$. Parce que

$$\lim_{n \to \infty} \Delta(d^n) = 0$$

il existe N tel que $\Delta(d^n) < \eta$, pour $n > N$. Mais $\omega[F, (d^n_+)_r] - \sigma(f, d^n_+)$ où $d^n_+ = \bigcup_{\substack{i \geqslant n \\ i \in I^+}} d_i$ est le reste de la série (2.2). De (1.3) on déduit que le reste de cette série converge vers zéro, donc la série est convergente. De même on démontre que la série (2.3) est convergente. Parce que les séries (2.2) et (2.3) sont convergentes il résulte que la série (2.1) est abolument convergente.

LEMME 2. *On considère une fonction f intégrable M_* sur B et $A \subset B$ un ensemble parfait. Alors presque partout sur A a lieu la limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \sum_x^{x+h} {}_i \left[\omega[F, (d_i)_r] - \sigma(f, d_i) \right] = 0. \tag{2.4}$$

Démonstration. Soit g la fonction

$$g(x) = \begin{cases} 0 & x \in A \\ \dfrac{1}{b_i - a_i} \left[\omega[F, (d_i)_r] - \sigma(f, d_i) \right] & x \in (a_i, b_i), \quad i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Si on note par g_i la valeur de la fonction g sur (a_i, b_i) alors d'après le lemme 1 la série $\sum_a^b {}_i(b_i - a_i) g_i$ est convergente. Puisque d s'annule sur A cette série est sommable. Soit G la primitive de g alors

$$G(x) = \int_a^x g(u)\, du = \sum_a^x {}_i\, [\omega[F, (d_i)_r] - \sigma(f, d_i)].$$

Presque partout sur $[a, b]$ la dérivée de la fonction G coïncide avec g. Donc presque partout sur A

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_x^{x+h} {}_i [\omega[F, d_i)_r)] - \sigma(f, d_i)] = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = 0.$$

LEMME 3. *Si f est une fonction intégrable M_* sur B qui s'annule sur un ensemble parfait $A \subset B$, alors*

$$(M_*) \int_B f(x)\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} (M_*) \int_{B_i} f(x)\, dx,$$

où $B_i = B \cap [a_i, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots$.

Démonstration. En vertu du théorème. 3.5 [2] la fonction f est intégrable M_* sur B, $i = 1, 2, \ldots$. Soit $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$ une suite admise des divisions telles que si $x \in D_n$ et $x \in B_i$, alors $a_i, b_i \in D_n$. Il résulte que

$$\sigma(f, D_n) = \sum_{i \in D_n} \sigma_i(f, D_n), \tag{2.5}$$

où $\sigma_i(f, D_n)$ est la somme intégrale correspondant aux points $x \in D_n$ qui appartiennent à la base B_i et $\sum_{i \in D_n}$ signifie la somme relative aux indices i pour lesquels $D_n \cap B_i \neq 0$. Puisque.

$$\lim_{n\to\infty} \delta(D_n) = 0,$$

l résulte qu'il existe N_i tel que $\delta(D_n) < b_i - a_i$ pour $n > N_i$, et donc, dans la somme (2.5) pour $n > N_i$ il y a le terme $\sigma_i(f, D_n)$. Alors nous avons

$$(M_*) \int_B f(x) dx = \lim_{n\to\infty} \sigma(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i \in D_n} \sigma_i(f, D_n) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} (M_*) \int_{B_i} f(x)\, dx.$$

THÉORÈME 2.1. *Pour chaque fonction f intégrable M_* sur B, presque partout sur B*

$$F'_{as}(x) = f(x),$$

où F est la primitive M_* de f.

Démonstration. Par hypothèse f est mesurable, et alors, d'après le théorème de Lusin [3], pour le nombre naturel n il existe un ensemble parfait $A_n \subset B$ tel que la restriction de f à A_n est une fonction continue et

$$m(A_n) > b - a - \frac{1}{n}. \tag{2.6}$$

Nous notons par A_n' l'ensemble des points de densité 1 de A_n et par $A_n'' \subset A_n$ l'ensemble des points $x \in A_n$ pour lesquels a lieu la relation (2.4). On considère les ensembles $A_n^0 = A_n' \cap A_n''$, $n = 1, 2, \ldots$ et

$$B_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^0.$$

Parce que $m(A_n') = m(A_n'') = m(A_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, de (2.6) il résulte que $m(B_0) = b - a$.

Pour $x_0 \in B_0$ il existe n tel que $x_0 \in A_n^0$. Nous définissons la fonction

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A_n \\ f(a_i^n) + \dfrac{f(b_i^n) - f(a_i^n)}{b_i^n - a_i^n}(x - a_i^n) & x \in (a_i^n, b_i^n),\ i = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

La fonction g est continue sur $[a, b]$[1], alors g est intégrable et, G étant sa primitive

$$G'(x_0) = g(x_0) = f(x_0). \tag{2.7}$$

Soit $x_0 + h \in A_n$, alors

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} + \frac{1}{h}(M_*)\int_{x_0Bx_0+h} f(u)du - \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} g(u)du =$$

$$= \frac{G(x_0 + h) - G(x_0)}{h} + (M_*)\frac{1}{h}\int_{x_0Bx_0+h} [f(u) - g(u)]du.$$

La fonction $f - g$ est intégrable M_* sur la base $x_0Bx_0 + h = B \cap [x_0, x_0 + h]$ et devient nulle sur A_n, alors, en vertu du lemme 3

$$(M_*)\int_{x_0Bx_0+h} [f(u) - g(u)]\,du = \sum_{x_0}^{x_0+h}{}_i\, (M_*)\int_{B_{in}} [f(u) - g(u)]\,du.$$

où $B_{in} = B \cap [a_i^n, b_i^n]$, $i = 1, 2, \ldots$ Puisque g est linéaire sur $[a_i^n, b_i^n]$ nous avons

$$(M_*)\int_{B_{in}} [f(u) - g(u)]du = F(b_i^n) - F(a_i^n) - \frac{g(a_i^n) + g(b_i^n)}{2}(b_i^n - a_i^n).\text{[2]}$$

---

[1] Voir [2] lemme 3 du théorème 3.4.
[2] Voir [2] lemme 1 du théorème 3.4.

Donc

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{G(x_0+h)-G(x_0)}{h}+\frac{1}{h}\sum_{x_0}^{x_0+h}{}_i\,[\omega[F.\ (d_{in})_r]-\sigma(f,\ d_{in})],$$

où $d_{in}: < a_i^n,\ b_i^n >$, $i = 1, 2, \ldots.$ De (2.4), (2.7) nous déduirons que

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ x_0+h\in A_n}} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0).$$

3. Dans ce qui suit seront données plusieurs propriétés des fonctions absolument continues relativement à une fonction f. Nous noterons par O la fonction égale à zéro pour $x \in B$.

Si Φ_1, $\Phi_2 \in AC(B, f)$ alors la fonction $\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ appartient à la classe $AC(B, O)$. Cette propriété résulte de l'égalité

$$\omega(\Phi,\ d) = \omega(\Phi_2,\ d) - \omega(\Phi_1,\ d).$$

pour n'importe quelle sous-division d de la base B.

THÉORÈME 3.1. *Une fonction Φ absolument continue relativement à 0 sur la base $B \subset [a, b]$ est continue sur $[a, b]$*[3].

Démonstration. Parce que $\Phi \in AC(B, 0)$, pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour n'importe quels deux points x', $x'' \in B$ qui vérifient l'inégalité

$$|x''-x'| < \eta. \tag{3.1}$$

nous avons

$$|\Phi(x'') - \Phi(x')| = |\omega(\Phi,\ d)| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{3.2}$$

où $d: < x',\ x'' >$. Soit $x_0 \in [a, b]$ et $x_n \in B$, $n = 1, 2, \ldots$ tels que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$. Par hypothèse il existe N tel que pour $x' = x_n$, $x'' = x_m$, où n, $m > N$, l'inégalité (3.1) soit vérifiée, et, par suite, a lieu la relation (3.2). Il résulte qu'il existe la limite

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = h(x_0), \qquad x_0 \in [a, b],\ x_n \in B.$$

Nous supposons qu'il existe deux suites x_n, $y_k \in B$, n, $k = 1, 2, \ldots$, telles que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} y_k = x_0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(x_n) = h(x), \qquad \lim_{k\to\infty} \Phi(y_k) = h(y),$$

et

$$\nu = |h(y) - h(x)| > 0. \tag{3.3}$$

Nous considérons

$$0 < \varepsilon < \nu. \tag{3.4}$$

[3] Pour $x_0 \notin B$ on considère $\Phi(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in B}} \Phi(x)$. Voir (3.5).

Soient N_1, K_1 tels que, respectivement pour $n > N_1$, $k > K_1$ nous avons

$$|\Phi(x_n) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |\Phi(y_k) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

et N_2, K_2 tels que, respectivement pour $n > N_2$, $k > K_2$

$$|x_n - x_0| < \frac{\eta}{2}, \qquad |y_k - x_0| < \frac{\eta}{2}.$$

Si respectivement $n > max(N_1, N_2)$, $k > max\ (K_1, K_2)$, alors

$$\nu = |h(y) - h(x)| \leqslant |h(y) - \Phi(y_k)| + |\Phi(y_k) - \Phi(x_n)| + |\Phi(x_n) - h(x)| < \varepsilon$$

parce que $|y_k - x_n| \leqslant |y_k - x_0| + |x_0 - x_n| < \eta$. Comme l'inégalité obtenue contredit l'inégalité (3.4), il résulte que la relation (3.3) n'est pas vraie. Nous allons démontrer que la limite

$$\lim_{x \to x_0} \Phi(x) = h(x_0), \qquad x \in B, \quad x_0 \in [a, b] \tag{3.5}$$

a lieu uniformément par rapport à x. Si $|x - x_0| < \eta$ et x, $x_0 \in B$, alors de (3.2)

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon.$$

Mais si $x_0 \notin B$, puisque B est dense sur $[a, b]$ il existe $x' \in B$ tel que $|x' - x| < < \eta$ et

$$|\Phi(x') - \Phi(x_0)| < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Donc nous avons

$$|\Phi(x) - \Phi(x_0)| \leqslant |\Phi(x) - \Phi(x')| + |\Phi(x') - \Phi(x_0)| < \varepsilon.$$

De la dernière propriété et du fait que B est dense sur $[a, b]$ on déduit que pour $\varepsilon > 0$ et une suite de points x_n, $n = 1, 2, \ldots$ pour qui $\lim_{n \to \infty} x_n = x_0$, il existe N tel que si $n > N$ alors

$$|\Phi(x_n) - \Phi(x_0)| < \varepsilon.$$

De ce théorème on déduit qu'une fonction $\Phi \in AC(B, 0)$ est uniformément continue sur $[a, b]$. Donc pour un nombre naturel k donné et $\varepsilon > 0$ il existe η_k tel que

$$|\Phi(x'') - \Phi(x')| < \frac{\varepsilon}{2^k}$$

si $|x'' - x'| < \eta_k$. D'ailleurs, au nombre $\varepsilon > 0$ correspond $\eta > 0$ tel que

$$|\omega(\Phi, d)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.6}$$

pour une sous-division d de la base B pour laquelle $\Delta(d) < \eta$. Soit $d : \langle x_k, y_k \rangle$ $k = 1, 2, \ldots$ une sous-division de l'intervalle $[a, b]$ qui vérifie l'inégalité précédente. On considère la sous-division de la base B d'_k : $< x'_k, y' >$, $k = 1, 2, \dots$ telle que

$$x'_k = \begin{cases} x_k & x_k \in B \\ \bar{x}_k & \bar{x}_k \in B, \quad \bar{x}_k - x_k < \eta_{k+2}, \quad x_k \notin B, \quad x_k < \bar{x}_k < y_k \end{cases}$$

$$y'_k = \begin{cases} y_k & y_k \in B \\ \bar{y}_k & \bar{y}_k \in B, \quad y_k - \bar{y}_k < \eta_{k+2}, \quad y_k \in B, \quad x_k < \bar{y}_k < y_k. \end{cases}$$

Alors $\Delta(d') \leqslant \Delta(d) < \eta$. En ce cas

$$|\omega(\Phi, d)| \leqslant |\omega(\Phi, d')| + \sum_k [|\Phi(x_k) - \Phi(\bar{x}_k)| + |\Phi(y_k) - \Phi(\bar{y}_k)|] < \varepsilon.$$

Il résulte de cette courte analyse que, si $\Phi \in AC(B, 0)$, alors Φ est absolument continue relativement à 0 sur $[a, b]$.

THÉORÈME 3.2. *Une fonction Φ absolument continue relativement à 0 sur la base B de l'intérvalle $[a, b]$ est absolument continue sur $[a, b]$.*

Démonstration. La fonction Φ est absolument continue relativement à 0 sur $[a, b]$, donc pour $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que (3.6) est vérifiée pour une sous-division d de $[a, b]$ telle que $\Delta(d) < \eta$. Soient $[a_k, b_k]$, $k = 1, 2, \dots$ des intervalles disjoints deux à deux tels que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \eta.$$

Nous considérons les sous-divisions d^+, d^-, la première formée avec les couples $< a_k, b_k >$ pour qui $\Phi(b_k) - \Phi(a_k) \geqslant 0$ et la deuxième formée avec les couples $< a_k, b_k >$ pour quoi $\Phi(b_k) - \Phi(a_k) < 0$. Comme $\Delta(d^+) < \eta$, $\Delta(d^-) < \eta$ nous obtenons.

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\Phi(b_k) - \Phi(x_k)| \leqslant |\omega(\Phi, d^+)| + |\omega(\Phi, d^-)| < \varepsilon.$$

Soit f une fonction intégrable M_* sur B et F la primitive M_* correspondante, alors la condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi \in AC(B, f)$ est qu'il existe une fonction G_Φ absolument continue sur $[a, b]$ telle que

$$\Phi(x) = F(x) + G_\Phi(x), \; x \in B,$$

La propriété résulte du théorème précédent et de $\Phi - G \in AC(B, 0)$. Cette égalité donne la structure de la classe $AC(B, f)$. En conformité avec les théorèmes 1.3 et 2.1 si $\Phi \in AC(B_0, f)$ il existe une base $B \subset B_0$ et une fonction sommable g_Φ telle que f est intégrable M_* sur B et presque partout sur B

$$\Phi'_{as}(x) = f(x) + g_\Phi \; (x).$$

On considère une fonction f intégrable M_* sur le base B, un point $x \in B$ et $h_1, h_2 > 0$, $x - h_1$, $x + h_2 \in B$. Soit $d : < x - h_1, x > ; < x, x, + h_2 >$, parce que f vérifie la propriété S_* sur B[4] nous avons

$$\lim_{h_1+h_2\to 0} \frac{1}{2} [(h_1+h_2)f(x) - h_1f(x + h_2) - h_2f(x - h_1)] =$$
$$= \lim_{h_1+h_2\to 0} [\sigma(f, d) - \sigma(f, d_r)] = 0. \tag{3.7}$$

THÉORÈME 3.3. *Pour chaque fonction* $\Phi \in AC(B, f)$ *et* $x \in B$

$$\lim_{h\to 0} [\Phi(x + h) - \Phi(x - h)] = 0, \tag{3.8}$$

où $h > 0$, $x - h$, $x + h \in B$.

Démonstration. Par hypothése $\Phi \in AC(B, f)$, donc au nombre $\varepsilon > 0$ il correspond $\eta_1 > 0$ tel que

$$|\omega(\Phi, d_r) - \sigma(f, d)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

si $\Delta(d) < \eta_1$. Nous considérons un point $x \in B$ et $h < 0$ tel que $x - h$, $x + h \in B$. Soit d la sous-division $d : < x - d, x + d >$, alors $d_r = d$. En utilisant la relation (3.7) pour $h_1 = h_2 = h$ au nombre donné $\varepsilon > 0$ correspond $\eta_2 > 0$ de sorte que

$$|\sigma(f, d) - 2hf(x)| = |2hf(x) - hf(x - h) - h(x + h)| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

si $h < \eta_2$. D'ailleurs il existe η_3 tel que

$$|2hf(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\cdot$$

si $h < \eta_3$. Soit $\eta = min(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$, alors pour $0 < h < \eta$; $x - h, x + h \in$ B nous avons

$$|\Phi(x + h) - \Phi(x - h)| = |\omega(\Phi, d_r)| \leqslant |\omega(\Phi, d_r) - \sigma(f, d)| +$$
$$+ |\sigma(f, h) - 2hf(x)| + |2hf(x)| < \varepsilon.$$

La relation (3.8) donne en particulier une propriété de continuité symétrique de la primitive M_* sur les pointes de la base B.

(Manuscris reçu le 13 novembre 1969

BIBLIOGRAPHIE

1. Rădulescu M., *Une définition de l'intégrale*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math. -Phys. 1 1969, 23–35.
2. Rădulescu M., *L'intégrale* M_*, „Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math. -Mech., 1970, 1, 23–34.
3. Halmos, P.R., *Measure Theory*, New York, 1950.
4. Luzin N., *Integral i trigonometriceskii riad*, Moscova, 1951.

[4] Voir [2] le théorème 3.2.

PRIMITIVA M_* A UNEI FUNCŢII INTEGRABILE M_*

În continuarea articolelor [1, 2] se defineşte şi se studiază primitiva M_* a unei funcţii măsurabile şi integrabile M_* pe B. Se defineşte (1.3) clasa $AC(B, f)$ a funcţiilor absolut continui relativ la f pe o bază B. Primitiva M_* a unei funcţii f măsurabile şi integrabile M_* pe B aparţine clasei $AC(B, f)$. În paragraful 2 se demonstrează că dacă F este primitiva M_* a funcţiei f măsurabile şi integrabile M_* pe B, atunci, aproape peste tot pe B,

$$F'_{as}(x) = f(x).$$

În paragraful 3 se dau mai multe teoreme referitoare la continuitatea funcţiilor din clasa $AC(B, f)$. Pentru $\Phi \in AC(B, f)$ şi $x \in B$ se arată că funcţia Φ verifică o proprietate de continuitate simetrică (3.8).

ПРИМИТИВ M_* ОДНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ M_*

(Р е з ю м е)

В продолжение статей [1,2] определяется и изучается примитив M_* одной измеримой и интегрируемой функции M_* на B. Определяется (1.3) класс $AC(B,f)$ абсолютно непрерывных функций относительно f на базе B. Примитив M_* одной функции измеримой и интегрируемой M_* на B принадлежит классу $AC(B,f)$. В параграфе 2 доказывается, что если F является примитивом M_* функции f, измеримой и интегрируемой M_* на B, тогда почти всюду на B

$$F'_{as}(u) = f(u).$$

В параграфе 3 даётся несколько теорем, касающихся непрерывности функций класса $AC(B,f)$. Для $\Phi \in AC(B,f)$ и $x \in B$ показывается, что функция Φ удовлетворяет свойству симметрической непрерывности (3.8).

LES FONCTIONNELLES GÉNÉRATRICES DES FONCTIONS SPLINES

C. KALIK

On note par $H_2^{(k)}(a, b)$ la fermeture de l'ensemble $C^{(k)}[a, b]$ á l'aide de la norme

$$\|u\|_k^2 = \|u\|^2 + \|u^{(k)}\|^2 \tag{1}$$

où $\| \quad \|$ représente la norme de l'espace $L_2(a, b)$. L'ensemble $H^{(k)}(a, b)$ ainsi défini est un espace hilbertien avec le produit scalaire

$$(u, v)_k = (u, v) + (u^{(k)}, v^{(k)}) \tag{2}$$

Nous rappelons qu'ont lieu les inclusions $C^{(k)}[a, b] \subset H_2^{(k)}(a, b) \subset C^{(k-1)}[a, b]$

Sur $H_2^{(k)}(a, b)$ sont données les fonctionnelles linéares et continues $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Dans le travail [1] on montre que dans le cas où existe une constante positive m de façon que l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2(u) + \|u^{(k)}\|^2 \geqslant m\|u\|_k^2 \tag{3}$$

ait lieu pour chaque $u \in H^{(k)}(a, b)$, le sous-espace $S = (\operatorname{Ker} F)^{\perp}$ du $H_2^{(k)}$ représente l'ensemble de toutes les fonctions splines relatives aux transformations $F = \{F_1, \ldots F_n\}$ et $D^k = \frac{d^k}{dx^k}$. En outre la projection orthogonale de n'importe quelle $u \in H_2^{(k)}$ est justement la spline interpolatoire de cette fonction.

Le but de ce travail est de préciser la classe de toutes les fonctionnelles pour lesquelles l'inégalité (3) est satisfaite, ce qui assure en vertu des résultats obtenus dans [1], l'existence des fonctions splines.

Etant donné que les fonctionnelles $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont continues sur $H_2^{(k)}(a,b)$ il existe une constante $C_1 > 0$ de façon que

$$|F_i(u)| \leqslant c_1 \|u\|_k$$

pour chaque $i = 1, 2, \ldots, n$ et $u \in H_2^{(k)}(a, b)$. Par conséquent, nous avons

$$\sum_{i=1}^{n} F_i^2(u) + \|u^{(k)}\|^2 \leqslant n\, c_1^2\|u\|_k^2 + \|u^{(k)}\| \leqslant (nc_1^2 + 1)\|u\|_k^2 \tag{4}$$

Cette inégalité et la formule (3) nous montrent que notre problème se réduit à la précision des conditions dans lesquelles l'expression

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} F_i^2(u) + ||u^{(k)}||^2\right\}^{1/2} \tag{5}$$

nous fournit la norme équivalant à la norme de $H_2^{(k)}(a, b)$. Dans ce sens nous allons démontrer la théorème suivant:

THÉORÈME. *La condition nécessaire et suffisante pour que* (5) *soit une norme équivalent à la norme* $||u||_k$ *est que le rang de la matrice*

$$(F_i(x^j))_{i=\overline{1, n}}^{j=\overline{0, k-1}} \tag{6}$$

ayant n *lignes et* k *colonnes, soit égale à* k.

Démonstration. a) Nous admettons donc que (5) est une norme équivalant à $||u||_k$. D'abord nous allons montrer que $k \leqslant n$. En effet, soit $P_{k-1}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j$ un polynôme pour lequel il y a

$$F_i(P_{k-1}) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j F_i(x^j) = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \tag{7}$$

Alors on a $\sum_{i=1}^{n} F_i^2(P_{k-1}) + ||P_{k-1}^{(k)}||^2 = 0$ et, attendu que (5) est une norme, il en résulte que $P_{k-1}(x) \equiv 0$. Par conséquent le système (7) n'admet que la solution banale, ce qui amène l'inégalité $k \leqslant n$.

Notons par ρ le rang de la matrice (6). Etant donné que la matrice (6) a k colonnes, nous avons $\rho \leqslant k$. Supposons que $\rho < k$. Nous allons montrer maintenant que, dans ce cas il existe un polynôme $P_{k-1}(x) = \sum_{j=0}^{k-1} a_j x^j \not\equiv 0$ de façon que $F_i(P_{k-1}) = 0$ $(i = \overline{1, n})$. En effet, le système (7) admet une solution différente de zéro, parce que le rang de la matrice (6) et celui de la matrice étendue coïncident. En remplaçant ce polynôme dans l'inégalité

$$m||u||_k^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} F_i^2(u) + ||u^{(k)}||^2 \leqslant M||u||_k^2$$

qui exprime l'équivalence des deux normes ci-dessous et en tenant compte de $F_i(P_{k-1}) = 0$, on arrive à $m||P_{k-1}||_k^2 = 0$. Par conséquent

$$\int_a^k P_{k-1}^2\,(x)dx = 0$$

d'où il résulte que $P_{k-1}(x) \equiv 0$. Mais cette identité représente une contradiction avec $P_{k-1}(x) \not\equiv 0$, ce qui signifie que $\rho = k$.

b). Soit $\rho = k$. Admettons, pour simplifier les calculs que

$$det(F_\mu(x^h))_{\mu=\overline{1, k}}^{h=\overline{0, k-1}} \neq 0 \tag{8}$$

Cette condition assure que le système d'équations

$$\sum_{\mu=1}^{k} A_{j\mu}F_{\mu}(x^h) = \delta_{j-1,h} \quad (h = \overline{0,\ k-1}) \tag{9}$$

aura la solution unique pour chaque $1 \leqslant j \leqslant k$. Il faut mentionner que $(A_{j\mu})_{j=\overline{1,k}}^{\mu=\overline{1,k}}$ est la matrice inverse de $(F_{\mu}(x^j))_{\mu=\overline{1,\ k}}^{h=0,\overline{k-1}}$. Notons

$$G_j = \sum_{\mu=1}^{k} A_{j\mu}F_{\mu} \qquad (j = \overline{1,\ k}). \tag{10}$$

D'où, en se servant de (9) on obtient la représentation

$$F_j = \sum_{\mu=1}^{k} F_{\mu}(x^{j-1})G_{\mu} \quad (j = \overline{1,\ k}) \tag{11}$$

Les représentations (10) et (11) montrent l'existence des constantes $d > 0$ et $D > 0$ de sorte que

$$d\sum_{i=1}^{k} F_i^2(u) \leqslant \sum_{i=1}^{k} G_i^2(u) \leqslant D\sum_{i=1}^{k} F_i^2(u) \tag{12}$$

soit valable pour chaque $u \in H_k^{(k)}\ (a,\ b)$. En vertu de l'inégalité (4) et (12), la démonstration de l'équivalence des normes (1) et (5) se réduit a celle de

$$\sum_{i=1}^{k} G_i^2(u) + ||u^{(k)}||^2 \geqslant \delta||u||_k^2 \tag{13}$$

Dans cette intention nous avons à faire quelques observations auxiliaires. Soit $\mathfrak{L}_{k-1}$ l'ensemble des polynômes d'un degré inférieur ou égal à $k-1$. Notons par π_1 le projecteur orthogonal de l'espace $H_2^{(k)}(a,\ b)$ sur $\mathfrak{L}_{k-1}$. L'opérateur $Q_1 = I - \pi_1$ est le projecteur orthogonal de $H^{(k)}(a,\ b)$ sur la complémentaire orthogonale de $\mathfrak{L}_{k-1}$, notée par $\mathfrak{L}_{k-1}^{\perp}$. Soit

$$||\pi_1 u|| = ||u|| \quad \text{et} \quad ||Q_1 u|| = ||u^{(k)}||$$

Donc nous avons $||u||_k^2 = ||\pi_1 u||^2 + ||Q_1 u||^2$. Soit aussi

$$\pi_2 u = \sum_{j=1}^{k} G_j(u)x^{j-1} \quad \text{et} \quad ||\pi_2 u||^2 = \sum_{j=1}^{k} G_j^2(u)$$

Notons aussi $Q_2 = I - \pi_2$ et $||Q_2 u|| = ||u \quad ||$. A l'aide de ces notations on peut écrire

$$||u||_k^2 = ||\pi_1 u||^2 + ||u^{(k)}||^2 \ = ||\pi_2 u + (\pi_1 - \pi_2)u||^2 + ||u^{(k)}||^2 \leqslant$$

$$\leqslant \mathcal{C}\{||\pi_2 u||^2 + ||(\pi_1 - \pi_2)u||^2 + ||u^{(k)}||^2\}$$

Cela signifie que pour démontrer l'inégalité (13) il suffit de montrer que

$$||(\pi_1 - \pi_2)u||^2 \leqslant \mathcal{C}_1||u^{(k)}||^2 \tag{14}$$

Pour cela nous pouvons écrire

$$||(\pi_1 - \pi_2)u||^2 = ||\pi_2(\pi_1 - I)u||^2 = ||\pi_2(I - Q_1 - I)u||^2 =$$
$$= ||\pi_2 Q_1 u||^2 = \sum_{i=1}^{k} G_i^2(Q_1 u)$$

D'autre part nous avons

$$G_i^2(Q_1 u) \leqslant C_2||Q_1 u||_k^2 = C\{||\pi_1 Q_1 u||^2 + ||Q_1 u||^2\} =$$
$$= C_2\{||(\pi_1 - \pi_1)u||^2 + ||u^{(k)}||^2\} = C_2||u^{(k)}||^2$$

Ces inégalités montrent que la formule (14) est valable, et par conséquent, l'inégalité (13) est démontrée, ce qui revient à dire que le théorème est aussi démontré.

Enfin il faut faire remarquer que dans les considérations ci-dessous l'espace $H_2^{(k)}(a,b)$ peut être remplacé par n'importe lequel de ses sous-espaces. Les sous-espaces le plus fréquemment appliqués sont $\overset{\circ}{H}{}_2^{(k)}(a, b)$ et $H_2^{(k)\#}(a, b)$. Le premier est la fermeture dans $H_2^{(k)}(a, b)$ de l'ensemble $C_0^\infty(a, b)$, et le deuxième est la fermeture de l'ensemble des fonctions périodiques ayant la période $b - a$. Dans le cas de $\overset{\circ}{H}{}_2^{(k)}(a, b)$ on obtient les fonctions splines qui satisfont les conditions aux limites:

$$s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0 \qquad (j = \overline{0, k-1})$$

et dans le cas de l'espace $H_2^{(k)\#}(a, b)$ on obtient les fonctions splines périodiques

(Manuscrit reçu le 11 juin 1970)

BIBLIOGRAPHIE

1. Sard, A., *Optimal Approximation*, Journal of Functional Analysis, 1, 2, 1967.
2. Sobolev S. L., *Nekatorie primenenia funkţionalnogo analiza v matematiceskoi fizike*, Leningrad, 1950

FUNCŢIONALELE GENERATOARE DE FUNCŢII SPLINE

(Rezumat)

În [1] se indică inegalitatea (2), care asigură existenţa funcţiilor spline relative la funcţionalele $F_1, F_2, \ldots, F_n$ şi operatorul $\frac{d^{(k)}}{dx^k}$. În prezenta lucrare se caracterizează funcţionalele $F_1, F_2, \ldots, F_n$ pentru care inegalitatea (2) are loc. Anume, se demonstrează că (2) este adevărată atunci şi numai atunci, dacă rangul matricei (3) este egal cu k.

ФУНКЦИОНАЛЫ, ГЕНЕРИРУЮЩИЕ „SPLINE" ФУНКЦИИ

(Резюме)

В [1] даётся неравенство (2), обеспечивающее существование „spline" функций, относящихся к функционалам $F_1, F^2, \ldots, F_n$, а также к оператору $\frac{d^{(k)}}{dx^k}$. В статье характеризуются функционалы $F_1, F_2, \ldots, F_n$, для которых имеет место неравенство (2). Доказывается, что (2) является верным тогда и только тогда, когда ранг матрицы (3) равен к.

O CARACTERIZARE A OPERATORILOR DIFERENŢIALI

A. MUREŞAN

1. Un operator diferenţial pe un domeniu din R^n se defineşte cu ajutorul unei expresii diferenţiale. Cînd definim un operator diferenţial pe o varietate diferenţiabilă poate fi folosită, aceeaşi idee, expresia diferenţială fiind dată în fiecare sistem local de coordonate, astfel încît să fie asigurată invarianţa ei la schimbarea sistemului local de coordonate (N. Teodorescu [7]; T. Y. Thomas, E. W. Titt [8]).

Se pune problema dacă nu se poate defini un operator diferenţial pe o varietate diferenţiabilă printr-o definiţie globală, neintervenind astfel sistemele locale de coordonate.

Această problemă a fost pusă în mai multe moduri şi s-au dat şi soluţii pentru ea de către mai mulţi autori, dintre care amintim: J. Peetre [3], [4], L. Hörmander [2], S. Spagnolo [6], M. Engert [1].

În prezenta notă ne propunem a generaliza rezultatul dat de Spagnolo şi de a stabili o legătură între rezultatul lui Engert şi un rezultat al lui Hörmander.

2. În lucrarea [6] Spagnolo dă o caracterizare a operatorilor diferenţiali caracterizînd formele biliniare ce-i definesc. În cele ce urmează folosim definiţiile şi notaţiile din lucrarea mai sus amintită. Are loc

TEOREMA. *Dacă* $\alpha : \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \times \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \to R$ *este o formă biliniară ce verifică condiţiile:*

i) α *este continuă*

ii) α *este simetrică*

iii) $\alpha(u_1, \cdot) : \mathfrak{D}(\Omega_1) \to R$ *este o distribuţie regulară oricare ar fi* $\Omega_1 \subset \{x | x \in \Omega, u_1(x) = 1\}$, *atunci* α *admite următoarea reprezentare:*

$$\alpha(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + a_0 uv \right) dx \tag{1}$$

oricare ar fi $u, v \in \mathfrak{D}(\Omega)$ *şi oricare ar fi* $a_{ij}, a_0 \in L^\infty(\Omega)$ *cu* $a_{ij} = a_{ji}$.

Demonstraţie. Condiţiile i), ii) ne conduc la următoarea formă pentru α,

$$\alpha(u, v) = \langle A, uv \rangle + \sum_{i,j=1}^n \left\langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\rangle, \tag{2}$$

unde A şi B_{ij} sînt distribuţii pe Ω şi $B_{ij} = B_{ji}$.

Acum oricare ar fi $u \in \mathfrak{D}(\Omega)$ alegem $\tilde{u} \in \mathfrak{D}(\Omega)$ astfel ca $\tilde{u} = 1$ în jurul suportului lui u. Obţinem $\tilde{u}u = u$ şi $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0$, deci ţinînd cont de iii) avem:

$$\alpha(u, u) = \langle A, \tilde{u}u \rangle = \langle A, u \rangle = \langle A_0, u \rangle, \text{ unde } A_0 \in L^\infty(\Omega), \tag{3}$$

Deoarece u a fost arbitrar aleasă deducem că:

$$\alpha(u, v) = \langle A_0, uv \rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\rangle, \text{ cu } A_0 \in L^\infty(\Omega) \tag{4}$$

Teorema va fi demonstrată dacă se stabileşte că $B_{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Pentru aceasta este suficient de arătat că B_{ij} sînt funcţii măsurabile, dat fiind faptul că sînt mărginite pe Ω.

Într-adevăr în acest caz aplicaţia:

$(u, v) \to \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + A_0 uv \right) dx$ este o formă biliniară şi continuă pe $\mathfrak{D}(\Omega) \times \times \mathfrak{D}(\Omega)$ care se extinde prin continuitate la o formă biliniară şi continuă pe $\mathring{H}^1(\Omega) \times \times \mathring{H}^1(\Omega)$.

Vom da în continuare demonstraţia unei leme care ne va stabili rezultatul pe care-l dorim.

Lema. *Dacă* $\alpha : \mathfrak{D}(\Omega) \times \mathfrak{D}(\Omega) \to R$ *este o aplicaţie biliniară astfel ca oricare ar fi* $u, v \in \mathfrak{D}(\Omega)$ *să avem:*

1° $\alpha(u, v) = \langle A_0, uv \rangle + \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\rangle$,

unde $A_0 \in L^\infty(\Omega)$ *şi* $B_{ij} \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ *cu* $B_{ij} = B_{ji}$;

2° $|\alpha(u, v)| \leqslant M \, ||u||_{H^1} \cdot ||v||_{H^1}$,

atunci $B_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $i, j = \overline{1, n}$.

Demonstraţie. Notăm: $\alpha'(u,v) = \alpha(u,v) - \langle A_0, uv \rangle$.

Rezultă: $\alpha'(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\rangle$.

În plus: $|\alpha'(u,v)| \leqslant M' ||u||_{H^1} \cdot ||v||_{H^1}$.

Însă acestea sînt chiar cele două condiţii din lema dată în [6], deci $B_{ij} \in L^\infty(\Omega)$.

3. Fie V o varietate de clasă C^∞ şi $\xi = (E, p, X)$ o fibrare peste V de clasă C^∞. Notăm cu $C^\infty(V, \varepsilon)$ mulţimea secţiunilor de clasă C^∞ a fibrării ξ. Fie $P : C^\infty(V, \xi) \to C^\infty(V, \eta)$ un operator diferenţial.

Hörmander a demonstrat următoarea

Teorema. *O aplicaţie liniară şi continuă* $L : C^\infty(V, \xi) \to C^\infty(V, \eta)$ *este un operator diferenţial liniar de ordin* $\leqslant m$ *dacă şi numai dacă următoarea condiţie este îndeplinită:*

Pentru orice $s \in C^\infty(V, \xi)$, $a \in V$ și orice funcție f cu valori reale pe V de clasă C^∞ funcția $k(\lambda)(a) = e^{-i\lambda f(a)}\{L(se^{i\lambda f})(a)\}$ este un polinom de λ de grad $\leqslant m$ cu valori în η_a.

Pe de altă parte Engert, fără a menționa rezultatul lui Hörmander, demonstrează următoarea

TEOREMĂ. *Fie L un operator liniar și continuu, $L : \mathfrak{D}(R^n) \to L^2(R^n)$. L este un operator diferențial-diferență dacă și numai dacă spațiul $T(L)$ este finit dimensional, unde $T(L)$ este spațiul liniar complex $\{T(\lambda, L), \lambda \in R^n\}$ unde $T(\lambda, L) = e^{-i\lambda x} L e^{i\lambda x}$, $\lambda \in R^n$.*

Luăm în teorema lui Hörmander $V = R^n$ iar drept fibrări ξ și η acele fibrări care au *ca* fibre pe R. În acest caz o secțiune s devine o funcție obișnuită. Analog $a = x \in R^n$ și $\lambda \in R^n$, deci

$$k(\lambda)(x) = e^{-i\lambda f(x)}\{L(se^{i\lambda f})(x)\}.$$

Se observă că dacă $f(x) = x$ atunci $k(\lambda)(x) = e^{-i\lambda x}\{L(se^{i\lambda \cdot})(x)\}$, deci : $k(\lambda) = T(\lambda, L)s$.

Obținem astfel o parte din rezultatul lui M. Engert.

Rămîne de văzut ce condiții trebuie adăugate în teorema lui Engert pentru a obține teorema lui Hörmander. Această problemă o vom studia cu altă ocazie.

(Intrat în redacție la 16 ianuarie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Engert, M., *A characterization of differential operators*, în „Proc. Amer. Math. Soc." pp. 87–93, 1967. 18. 1.
2. Narasimhan, R., *Analysis on real and complex manifolds*, Masson Cie, Paris. North-Holland, Amsterdam, 1968.
3. Peetre, J., *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels*, „Math. Scand.", 7, pp. 211–218, 1959.
4. Peetre, J., *Rectification à l'article „Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels"*, „Math. Scand.", 8, pp. 116–120, 1960.
5. Schwartz, L., *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1966.
6. Spagnolo, S., *Una caratterizzazione degli operatori differenziali autoaggiunti del 2 ordine a coefficienti misurabili e limitati*, „Rendiconti del seminario matematico della Università di Padova", 39, pp. 56–64, 1967.
7. Teodorescu, N., *La géometrie de l'équation des ondes*, „Bulletin mathématique de la Société Roumanie des sciences", 43, 1–2, 1941, pp. 59–62.
8. Thomas, T. Y., Titt, E. W., *On the elementary solution of the general linear differential equation of the second order with analytic coefficients*, „Journal de mathématiques pures et appliquées. Neuvième série", 18, 1939, pp. 217–228.

ОДНА ХАРАКТЕРИСТИКА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Резюме)

В работе обобщается результат, данный С. Спаньоло [6], и устанавливается связь между теоремой М. Энгерта [1] и одной теоремой Л. Хёрмандера ([2], стр. 176).

A CHARACTERIZATION OF THE DIFFERENTIAL OPERATORS

(Summary)

A result given by S. Spagnolo [6] is generalized in the paper, a link being established between M. Engert's theorem [1] and a theorem of L. Hörmander ([2], pp. 176).

ASUPRA ORDINULUI DE APROXIMAŢIE AL UNUI OPERATOR AL LUI V. A. BASKAKOV

GR. MOLDOVAN

În prezenta notă se consideră următorul operator al lui V. A. Baskakov [1]:

$$B_{r_n}(f;x) = \sum_{k=0}^{[r_n]} f\left(\frac{k}{r_n}\right)\binom{r_n}{k} x^k(1-x)^{r_n-k}, \tag{1}$$

unde $x \in [0, 1)$, iar $(r_n)_0^\infty$ este un şir de numere pozitive nemărginit superior şi prin [ ] înţelegem partea întreagă. Acest operator pe intervalul considerat este liniar şi pozitiv. În cazul cînd $r_n = n$, obţinem operatorul lui Bernstein obişnuit [2]. De aceea operatorul (1) spunem că este o generalizare a polinoamelor lui Bernstein. Baskakov demonstrează în [1] că operatorul (1) converge uniform pe intervalul $[0, a]$ $(a < 1)$ către funcţia f, continuă pe $[0, a]$, continuă la dreapta pe punctul $x = a$ şi mărginită pe $[0,1)$.

Este bine cunoscută inegalitatea lui T. Popoviciu [5] relativă la evaluarea ordinului de aproximaţie a unei funcţii prin polinoame Bernstein obişnuite. Aici vom stabili o inegalitate de tip Popoviciu privind determinarea ordinului de aproximaţie a unei funcţii f ce îndeplineşte condiţiile precizate mai sus, prin operatorul (1).

Pentru a demonstra convergenţa şirului de operatori liniari şi pozitivi $L_n(f; x)$ către f, $f \in C[a, b]$, după cum se ştie din teorema lui P. P. Korovkin [3], e suficient să verificăm dacă în următoarele relaţii:

$$\begin{aligned} L_n(1; x) &= 1 + \alpha_{0,n}(x) \\ L_n(t, x) &= x + \alpha_{1,n}(x) \\ L_n(t^2, x) &= x^2 + \alpha_{2,n}(x) \end{aligned} \tag{2}$$

$\alpha_{i,n}(x)$ $(i = 0,1,2)$ converg uniform către zero pe intervalul considerat.

Folosind relaţiile (2) se obţine (a se vedea R. C. Mamedov, [4], O. Shisha şi B. Mond [6] şi într-o altă manieră D. D. Stancu [7])

$$|L_n(f; x) - f(x)| \leqslant (1 + m\sqrt{\alpha_n})\, \omega\left(\frac{1}{m}\right) + \alpha_{0,n}M, \tag{3}$$

unde $\alpha_n \geqslant ||\alpha_n(\cdot)||$, $\alpha_{0,n} \geqslant ||\alpha_{0,n}(\cdot)||$, $M \geqslant ||f||$, iar

$$\alpha_n(x) = x^2\alpha_{0,n}(x) - 2x\alpha_{1,n}(x) + \alpha_{2,n}(x).$$

Pentru operatorul (1) avem [1]

$$\alpha_{0,n}(x) = u_{r_n}(x)\,;\ \alpha_{1,n}(x) = x u_{r_n-1}(x),$$

$$\alpha_{2,n}(x) = \frac{x(1-x)}{r_n} + x^2\frac{r_n-1}{r_n}u_{r_n-2}(x) + \frac{x}{r_n}u_{r_n-1}(x), \tag{4}$$

unde

$$u_{r_n}(x) = \sum_{m=[r_n]+1}^{\infty} (-1)^{m+[r_n]}\binom{r_n}{m}\binom{m-1}{[r_n]} x^m.$$

Termenii seriei lui $u_{r_n}(x)$ sînt negativi, după cum se observă din egalitatea

$$(-1)^{m+[r_n]}\binom{r_n}{m}\binom{m-1}{[r_n]} = (-1)^{2m-1}\cdot\frac{r_n}{m}\cdot\frac{(r_n-1)\ldots(r_n-[r_n])([r_n]+1-r_n)\ldots(m-1-r_n)}{[r_n]!(m-[r_n]-1)!}$$

Mai departe avem

$$|u_{r_n}(x)| < \sum_{m=[r_n]+1}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}x^{[r_n]+1} < \frac{x^{r_n+1}}{1-a} \quad x\in[0, a],\ a<1, \tag{5}$$

şi deci e adevărată dubla inegalitate

$$-\frac{a^{r_n+1}}{1-a} < u_{r_n}(x) < 0, \quad x\in[0, a],\ a<1.$$

De aici se vede clar că $u_{r_n}(x)$ tinde uniform către zero cînd $n\to\infty$ pe intervalul $[0, a]$, $a<1$ şi în consecinţă avem verificate condiţiile din teorema lui Korovkin.

Ţinînd seama de (5), avem

$$|\alpha_n(x)| \leqslant x^2|u_{r_n}(x)| + 2x^2|u_{r_n-1}(x)| + \frac{x(1-x)}{r_n} + x^2\frac{r_n+1}{r_n}|u_{r_n-2}(x)| +$$
$$+\frac{x}{r_n}|u_{r_n-1}(x)| < \frac{x(1-x)}{r_n} + \frac{a}{1-a}\left[x^2a^{r_n} + 2x^2a^{r_n-1} + x^2a^{r_n-2} + \frac{x^2}{r_n}a^{r_n-2} + \frac{x}{r_n}a^{r_n-1}\right] <$$
$$< \frac{1}{2r_n} + \frac{a(a+1)^2+a}{1-a}a^{r_n}.$$

Luînd $\alpha_n = \dfrac{1}{2r_n} + \dfrac{a(a+1)^2+a}{1-a}a^{r_n}$ şi în inegalitatea (3) punînd $m=\sqrt{r_n}$ obţinem pentru operatorii (1) inegalitatea

$$|B_{r_n}(f; x) - f(x)| \leqslant \left(1 + \sqrt{\frac{1}{2} + cr_na^{r_n}}\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{r_n}}\right) + \frac{Ma^{r_n+1}}{1-a} \tag{6}$$

unde $c = \dfrac{a(a+1)^2+a}{1-a}$, $M = \max\limits_{0\leqslant x\leqslant a}|f(x)|$, $0<a<1$.

Dacă observăm că $r_na^{r_n} \leqslant -\dfrac{1}{\ln a}a^{-\frac{1}{\ln a}}$, $a<1$ şi notăm $\alpha = \sqrt{\dfrac{1}{2} - c\dfrac{1}{\ln a}a^{-\frac{1}{\ln a}}}$, atunci inegalitatea (6) se poate scrie astfel

$$|B_{r_n}(f; x) - f(x)| \leqslant (1+\alpha)\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{r_n}}\right) + \frac{Ma^{r_n+1}}{1-a}. \tag{7}$$

Trebuie observat că din această inegalitate nu rezultă direct inegalitatea lui T. Popoviciu [5], căci de fapt, operatorul (1) are proprietatea de convergență uniformă către f numai pe intervalul $[0, a]$, $a < 1$.

Menționăm de asemenea că din această inegalitate rezultă convergența uniformă către f a operatorului lui V. A. Baskakov (1) pentru $x \in [0, a]$, $a < 1$ cînd $n \to \infty$ $(r_n \to \infty)$ și în condițiile de mai sus impuse asupra funcției f.

(Intrat în redacție la 12 martie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Baskakov, V. A., *A generalization of the Bernstein polynomials.* (Russian), „Izv. Vysš. Učebn Zaved. Matematika", 3 (16), 48–53, 1960.
2. Bernstein, S. N., *Démonstration du théorème de Weierstrass, fondeé sur le calcul des probabilités,* Commun. Soc. Math. Kharkow, 13(2), 1–2, 1912–13,.
3. Korovkin, P. P., *Linear operators and approximations theory,* Fizmatgiz, 1959.
4. Mamedov, R. C., *On the order of the approximation of functions by linear positive operators,* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 128, 674–676, 1959.
5. Popoviciu, T., *Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur,* Mathematica, 10, 48–54, 1935.
6. Shisha, O., Mond, B., *The degree of convergence of linear positive operators,* Proc. nat. Acad. Sci. USA, 60, 1196–1200, 1968.
7. Stancu, D. D., *Use of probabilistic methods in the theory of uniform approximation of continuous functions,* „Rev. Roum. Math. Pures Appl.," 14, 673–691, 1969.

О ПОРЯДКЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ОДНОГО ОПЕРАТОРА В. А. БАСКАКОВА

(Резюме)

В статье даётся оценка порядка приближения одной функции f: $[0,a] \to R$, $a < 1$ с помощью оператора [1] Баскакова. Имеет место неравенство (7).

ON THE APPROXIMATION ORDER OF A BASKAKOV'S OPERATOR

(Summary)

An evaluation of the approximation order of a function $f: [0, a] \to R$, $a < 1$ through the Baskakov's operator [1] is given in the paper. The inequality (7) takes place.

FORMULE PRACTICE DE CUADRATURĂ, OPTIMALE PENTRU O CLASĂ DE FUNCŢII

GH. COMAN

Se consideră formula de cuadratură

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = A_0[f(x_0) + f(x_m)] + A_1[f(x_1) + f(x_{m-1}] + \ldots + A_p[f(x_p) + f(x_{m-p})] + \\ + h[f(x_{p+1}) + \ldots + f(x_{m-p-1})] + R_{m+1}(f). \qquad (1)$$

unde $A_0, A_1, \ldots, A_p$, $0 \leqslant p \leqslant \left[\frac{m-1}{2}\right]$, sînt parametri arbitrari, iar nodurile sînt în progresie aritmetică cu raţia h, adică $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0,1,\ldots,m)$.

Se pune problema determinării parametrilor A_i $(i = 0,1,\ldots,p)$ în ipoteza că formula de cuadratură are gradul de exactitate (r) dinainte dat, iar în cazul în care din condiţiile impuse de gradul de exactitate nu pot fi determinaţi toţi parametrii să fie satisfăcute condiţii suplimentare legate de o evaluare cît mai convenabilă a restului $R_{m+1}(f)$.

Această problemă a fost studiată de Durand [6] în ipoteza că gradul de exactitate $r = 1$ şi $p = 1$, Lacroix [6] pentru $r = 3$ şi $p = 2$, G. Coulmy [1] pentru $r = 1$ şi $p = 3$. În aceste lucrări nu s-a pus, însă problema studiului restului.

Un studiu sistematic al formulelor lui Durand, Lacroix şi G. Coulmy este făcut în lucrările Prof. D. V. Ionescu ([3], [4], [5], unde se dă o metodă pentru construirea lor şi a altora similare cu ele, în ipoteza că $r = 1$, $r = 3$ şi $p \leqslant 4$. Tot aci, în ipoteza că funcţia f este de clasă $C^r[x_0, x_m]$, se dau expresiile restului din care se trag concluzii cu privire la aplicarea uneia sau alteia în practică.

În această lucrare se studiază formula de tipul (1), în ipoteza că gradul de exactitate este egal cu unu $(r = 1)$ şi p arbitrar, pentru f aparţinînd clasei $W^{(2)}(M; x_0, x_m)$ a funcţiilor definite pe intervalul $[x_0, x_m]$, avînd derivata de ordinul întîi continuă pe acest interval şi derivata de ordinul doi segmentar continuă şi satisfăcînd condiţia $|f''(x)| \leqslant M$.

Restricţiile suplimentare impuse asupra parametrilor A_k $(k = 0,1,\ldots,p)$, vor fi astfel alese încît restul formulei să ia valoarea minimă.

Să considerăm integrala

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx, \qquad (2)$$

unde $f \in W^{(2)}(M; x_0, x_m)$. Se împarte intervalul $[x_0, x_m]$ în m părţi egale prin punctele de abscisă $x_k = x_0 + kh$ $[k = 1,2, \ldots, m-1)$. Ataşăm fiecărei părţi $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1,2,\ldots,m)$ o funcţie φ_k, integrală a ecuaţiei diferenţiale corespunzătoare:

$$\varphi_k''(x) = 1 \quad (k = 1,2, \ldots m). \tag{3}$$

Integrala (2) se va scrie:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \sum_{k=1}^{m} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \varphi_k''(x)f(x)dx,$$

sau aplicînd fiecărui termen din membrul al doilea formula generalizată de integrare prin părţi, se obţine

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = -\varphi_1'(x_0)f(x_0) + \sum_{k=1}^{m-1} [\varphi_k'(x_k) - \varphi_{k+1}'(x_k)]f(x_k) + \varphi_m'(x_m)f(x_m) +$$

$$+ \varphi_1(x_0)f'(x_0) - \sum_{k=1}^{m-1} [\varphi_k(x_k) - \varphi_{k+1}(x_k)]f'(x_k) - \varphi_m(x_m)f'(x_m) + \int_{x_0}^{x_m} \varphi(x)f''(x)dx, \tag{4}$$

unde funcţia φ coincide pe rînd cu funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ în intervalele $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{m-1}, x_m]$.

Dacă se aleg funcţiile φ_k $(k = 1,2, \ldots, m)$ astfel încît, pe lîngă condiţiile (3), să fie satisfăcute şi condiţiile:

$$\begin{gathered}
\varphi_1(x_0) = \varphi_m(x_m) = 0, \quad \varphi_k(x_k) = \varphi_{k+1}(x_k) \quad (k = 1,2, \ldots, m-1), \\
-\varphi_0'(x_0) = \varphi_m'(x_m) = A_0, \\
\varphi_k'(x_k) - \varphi_{k+1}'(x_k) = \varphi_{m-k}'(x_{m-k}) - \varphi_{m-k+1}'(x_{m-k}) = A_k \quad (k = 1,2,\ldots,p), \\
\varphi_k'(x_k) - \varphi_{k+1}'(x_k) = h \quad (k = p+1, p+2, \ldots, m-p-1),
\end{gathered} \tag{5}$$

atunci formula de cuadratură (4) este de tipul (1), unde restul are expresia

$$R_{m+1}(f) = \int_{x_0}^{x_m} \varphi(x)f''(x)dx.$$

Pentru a fi satisfăcute condiţiile (3) şi (5) este suficient să luăm funcţiile φ_k sub forma

$$\varphi_1(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} - A_0(x - x_0)$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x - x_0)^2}{2} - A_0(x - x_0) - A_1(x - x_1)$$

$$\varphi_{p+1}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_0(x-x_0) - A_1(x-x_1) - \ldots - A_p(x-x_p)$$

$$\varphi_{p+2}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_0(x-x_0) - A_1(x-x_1) - \ldots - A_p(x-x_p) - h(x-x_{p+1})$$

$$\cdots$$

$$\varphi_{m-p-1}(x) = \frac{(x-x_m)^2}{2} + A_0(x-x_m) + A_1(x-x_{m-1}) + \ldots + A_p(x-x_{m-p}) + \\ + h(x-x_{m-p-1})$$

$$\varphi_{m-p}(x) = \frac{(x-x_m)^2}{2} + A_0(x-x_m) + A_1(x-x_{m-1}) + \ldots + A_p(x-x_{m-p})$$

$$\cdots$$

$$\varphi_{m-1}(x) = \frac{(x-x_m)^2}{2} + A_0(x-x_m) + A_1(x-x_{m-1})$$

$$\varphi_m(x) = \frac{(x-x_m)^2}{2} + A_0(x-x_m).$$

Pentru restul formulei avem evaluarea

$$|R_{m+1}(f)| \leqslant M \int_{x_0}^{x_m} |\varphi(x)| dx. \tag{6}$$

Faptul că formula de cuadratură trebuie să aibă gradul de exactitate egal cu unu, impune asupra parametrilor A_k $(k = 0, 1, \ldots, p)$ următoarea restricţie:

$$\sum_{k=0}^{p} A_k = \frac{2p+1}{2} h.$$

Pentru determinarea parametrilor $A_0, A_1, \ldots, A_p$ mai sînt necesare p relaţii Aceste relaţii se obţin din condiţia ca integrala

$$J = \int_{x_0}^{x_m} |\varphi(x)| dx$$

să ia valoarea minimă.

Avem

$$J = \sum_{k=1}^{m} I_k, \quad \text{unde} \quad I_k = \int_{x_{k-1}}^{x_k} |\varphi_k(x)| dx. \tag{7}$$

LEMA. *Minimul integralei*

$$G(A,B) = \int_{a-h}^{a+h} \left| \frac{x^2}{2} - Ax - B \right| dx \quad (h > 0)$$

pe mulțimea polinoamelor $\frac{x^2}{2} - Ax - B$ *de gradul al doilea cu coeficientul lui* x^2 *egal cu* $\frac{1}{2}$ *și coeficienții* A *și* B *arbitrari, este atins pentru polinomul unic* $T_2(x) = \frac{x^2}{2} - ax - \left(\frac{h^2}{8} - \frac{a^2}{2}\right)$.

Demonstrație. Avem

$$\frac{\partial G}{\partial A} = 2A\sqrt{A^2 + 2B} - ah = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial B} = 2\sqrt{A^2 + 2B} - h = 0,$$

a cărui soluție unică este $A = a$, $B = \frac{h^2}{8} - \frac{a^2}{2}$. Cum

$$\frac{\partial^2 G}{\partial A^2}\frac{\partial^2 G}{\partial B^2} - \left(\frac{\partial^2 G}{\partial A\,\partial B}\right)^2 = 16 > 0,$$

lema este demonstrată.

Se spune că dintre polinoamele de gradul al doilea cu coeficientul lui x^2 egal cu $\frac{1}{2}$, polinomul $T_2(x)$ se abate în medie cel mai puțin de la zero pe intervalul $[a - h, a + h]$.

Conform lemei, integrala I_k $(k = 2,3,\ldots, p + 1)$ ia valoarea minimă în singurul caz în care funcția φ_k $(k = 2,3,\ldots p + 1)$ coincide pe intervalul corespunzător $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 2,3,\ldots,p + 1)$ cu polinomul care se abate în medie cel mai puțin de la zero pe acest interval. Pentru aceasta trebuie să avem

$$x_0 + \sum_{i=1}^{k-1} A_i = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}\ (k = 2,3,\ldots,p + 1)$$

și

$$\frac{x_0^2}{2} + \sum_{k-1}^{k-1} A_i x_i = \frac{1}{2}\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{x_k - x_k - 1}{2}\right)^3 (k = 2,3,\ldots,p + 1),$$

care sînt echivalente cu următoarele relații:

$$\sum_{i=0}^{k-1} A_i = \frac{2k-1}{2} h \quad \text{și} \quad \sum_{k-1}^{i=0} iA_i = \frac{16k(k-1) + 3}{32} h \quad (k = 2,3,\ldots,p + 1.$$

De aici se obține:

$$A_0 = \frac{13}{32}h,\ A_1 = \frac{35}{32}h,\ A_2 = A_3 = \ldots = A_p = h. \tag{8}$$

Se verifică ușor că pentru valorile (8) ale parametrilor A_k și integralele I_{p+1}, $I_{p+2}, \ldots$ iau valoarea minimă, adică și funcțiile $\varphi_{p+1}, \varphi_{p+2}, \ldots$ coincid pe intervalele corespunzătoare $[x_p, x_{p+1}]$, $[x_{p+1}, x_{p+2}]$, $\ldots$ cu polinoamele care se abat în medie cel mai puțin de la zero pe aceste intervale.

Introducînd valorile (8) ale parametrilor A_k în (7) și observînd că pentru aceste valori avem

$$\bar{I}_0 = \frac{1031}{24576}h^3,\quad \bar{I}_k = \frac{1}{32}h^3\quad (k = 2,3\ldots,m - 1),$$

se obţine

$$\bar{J} = 2\bar{I}_0 + (m-2)\bar{I}_k = \left(\frac{533}{12288} + \frac{m}{32}\right)h^3.$$

Prin urmare

$$|R_{m+1}(f)| \leqslant \left(\frac{533}{12288} + \frac{m}{32}\right)h^3 M, \tag{9}$$

pentru $p > 0$.

Pentru $p = 0$ se obţine formula de cuadratură a trapezelor.

În felul acesta s-a demonstrat

TEOREMA 1. *Formula de cuadratură de tipul (1), avînd gradul de exactitate egal cu unu, pentru care evaluarea restului (6) are cea mai mică valoare este, pentru* $p > 0$

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)dx = \frac{13h}{32}[f(x_0) + f(x_m)] + \frac{35h}{32}[f(x_1) + f(x_{m-1})] + h[f(x_2) + \\ + \dots + f(x_{m-2})] + R_{m+1}(f), \tag{10}$$

cu evaluarea restului dată de (9) *şi formula trapezelor pentru* $p = 0$.

În încheiere vom considera cazul în care, în membrul al doilea al formulei (1), lipsesc valorile funcţiei f pe nodurile x_0 şi x_m. Cu alte cuvinte, vom considera o formulă de forma (1) de tip deschis şi anume:

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx = A_1[f(x_1) + f(x_{m-1})] + \dots + A_p[f(x_p) + f(x_{m-p})] + h[f(x_{p+1}) + \\ + \dots + f(x_{m-p-1})] + R_{m-1}(f), \tag{11}$$

unde $f \in W^{(2)}(M\,;\ x_0, x_m)$. Şi aici pentru restul formulei se obţine evaluarea

$$|R_{m-1}(f)| \leqslant M\int_{x_0}^{x_m} |\varphi(x)|\,dx, \tag{12}$$

unde funcţia φ coincide pe intervalul $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, \dots, m)$ respectiv cu funcţiile

$$\varphi_1(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2}$$

$$\varphi_2(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_1(x-x_1)$$

$$\dots$$

$$\varphi_{p+1}(x) = \frac{(x-x_0)^2}{2} - A_1(x-x_1) - \dots - A_p(x-x_p)$$

$$\varphi_{p+2}(x) = \frac{x-x_0)^2}{2} - A_1(x-x_1) - \dots - A_p(x-x_p) - h(x-x_{p+1})$$

$$\varphi_{m-p-1}(x) = \frac{(x-x_m)^2}{2} + A_1(x - x_{m+1}) + \ldots + A_p(x - x_{m-p}) + h(x - x_{m-p-1})$$

$$\varphi_{m-p}(x) = \frac{(x-x_m)^2}{2} + A_1(x - x_{m-1}) + \ldots + A_p(x - x_{m-p})$$

$$\cdots$$

$$\varphi_m(x) = \frac{(x-x_m)^2}{2}.$$

În mod cu totul analog cazului precedent se demonstrează

TEOREMA 2. *Formula de cuadratură de tipul (11), avînd gradul de exactitate egal cu unu, pentru care evaluarea restului (12) are cea mai mică valoare este*

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx = \frac{61h}{32}[f(x_1) + f(x_{m-1})] + \frac{19h}{32}[f(x_2) + f(x_{m-2})] +$$

$$+ h[f(x_3) + \ldots + f(x_{m-3})] + R_{m-1}(f), \tag{13}$$

iar

$$|R_{m-1}(f)| \leqslant \left(\frac{29}{48} + \frac{m}{32}\right) h^3 M \tag{14}$$

pentru $p > 1$ şi

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x)\,dx = \frac{3h}{2}[f(x_1) + f(x_{m-1})] + h[f(x_2) + \ldots + f(x_{m-2})] + R_{m-1}(f), \tag{15}$$

iar

$$|R_{m-1}(f)| \leqslant \frac{5m-6}{12} h^3 M \tag{16}$$

pentru $p = 1$.

(Intrat în redacţie la 30 septembrie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Coulmy, G., *Opérations sur les courbes expérimentales*, C. R. de Seances de l'Ac. des Sci. Paris, **246**, 1958, 1799–1800.
2. Ionescu, D. V., *Cuadraturi numerice*, Bucureşti, 1957.
3. Ionescu, D. V., *Construirea unor formule practice de cuadratură*, „Stud ş cercetări matem.", **15**, 6, 1963, 757–769.
4. Ionescu, D. V., *Cîteva formule practice de cuadratură*, Comunic. Acad. R.P.R., **13**, 8, 1963, 689–695.
5. Ionescu, D. V., *Nouvelles formules practiques de quadrature*, C. R. Acad. Sci, Paris, **259**, 1964, 504–507.,

6. Mineur, H., *Techniques de calcul numérique*, Librairie Polytechnique Ch. Béranger, Paris, 1952, p. 244.
7. Natanson, I. P., *Konstruktivnaia teoria funkţii*, Moskva, 19491.
8. Nikolski S. M., *Kvadraturnîie formulî*, Moskva, 1958.
9. Sard, A., *Linear Approximation*, American Math. Society, Providence, 1963.

ПРАКТИЧЕСКИЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ, ОПТИМАЛЬНЫЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ФУНКЦИЙ

(Резюме)

В работе строятся квадратурные формулы типа (1) и (11), где $f \in W^{(2)}(M; x_0, x_m)$, в предположении, что степень точности равна единице и p является произвольным, для которых оценки остатка (6), соответственно (12), принимают минимальное значение.

Получается формула (10) с оценкой (9) остатка для $p > 0$ и формула трапеций для $p = 0$, соответственно формула (13) с оценкой (14) остатка для $p > 1$ и формула (15) с оценкой остатка (16), для $p = 1$.

PRACTICAL FORMULA OF OPTIMAL QUADRATURE FOR A CLASS OF FUNCTIONS

(Summary)

Quadrature formula of the type (1) and (11) where $f \in W^{(2}(M; x_0, x_m)$ are constructed with the assumption that the degree of exactitude equals 1 and arbitrary p, for which, the evaluations of the rest (6) respectively (2) take the minimum value.

The formula (10) is obtained with the evaluation (9) of the rest for $p > 0$ and the formula of the trapeziums for $p = 0$ respectively the formula (13) with the evaluation (14) of the rest for $p < 1$ and the formula (15) with the evaluation of the rest (16), for $p = 1$.

ASUPRA REZOLVĂRII ECUAŢIILOR OPERAŢIONALE NELINIARE DEFINITE ÎN SPAŢII L — SUPERMETRICE

S. GROZE şi B. JANKÓ

1. Se consideră spaţiul liniar complet L-supermetric X [1] şi ecuaţia operaţională

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

unde $P(x)$ este un operator neliniar definit într-un anumit domeniu S al spaţiului X şi cu valori în spaţiul Y de acelaşi tip cu X, iar θ elementul nul al spaţiului Y. Presupunem de asemenea că $P(x)$ admite derivate în sens Fréchet de ordinul I şi II.

În lucrarea de faţă se studiază problema rezolvării ecuaţiei (1) folosind metoda lui Newton — Kantorovici, avînd algoritmul

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1}P(x_n) \tag{2}$$

unde $n = 0,1,\ldots$ Se dau condiţiile de convergenţă ale şirului de elemente $\{x_n\}$ către soluţia exactă x^* a ecuaţiei (1), ţinîndu-se seama de norma generalizată a spaţiului X, respectiv Y [1], unde elementele x_n sînt determinate cu ajutorul lui (2), plecînd de la o anumită aproximaţie iniţială x_0. În acelaşi timp se stabilesc condiţii suficiente pentru existenţa soluţiei x^* a ecuaţiei (1).

2. Teorema 1. *Presupunem îndeplinite condiţiile*

1° *Pentru o aproximaţie iniţială dată x_0, operatorul liniar ce transformă elementele din $S \subseteq X$ în Y, admite un invers $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$, fiindu-i cunoscut delimitarea*

$$\rho_{Y,X}(\Gamma_0) \leqslant B_0$$

unde $\rho_{Y,X}(\Gamma_0)$ este norma generalizată a operatorului liniar Γ_0[1].

2° *Pentru elementul x_0 avem delimitarea*

$$\rho_X(\Gamma_0 P(x_0)) \leqslant \eta_0$$

unde $\rho_X(\Gamma^0 P(x_0))$ este norma generalizată a elementului $\Gamma_0 P(x_0) \in X$.

3° *Derivata a doua $P''(x)$, este mărginită, adică*

$$\rho_{x^2,y}(P(x)) \leqslant M_2 \tag{3}$$

$\rho_{X,Y}(P''(x))$ *fiind norma generalizată a operației biliniare* $P''(x)$, [1] *pentru orice element* x *din domeniul* S *format de sfera difinită de* $\rho_X(x-x_0) \leqslant 2\eta_2$.

4. *Constantele* β_0, η_0, M_2 *satisfac relația*

$$0 < h_0 \equiv B_0\eta_0 M_2 \leqslant \frac{1}{2}\,.$$

In aceste condiții ecuația (1) admite cel puțin o soluție x^* *situată în* S, *iar aproximațiile succesive* x_n *calculate cu ajutorul relației (2) converg către* x^*, *rapiditatea convergenței fiind caracterizată prin delimitarea*

$$\rho_X(x^* - x_n) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0. \tag{4}$$

Demonstrație. În demonstrarea teoremei, cu toate că ne situăm într-un spațiu cu normă generalizată în sensul lui Collatz [1], vom putea folosi aceeași metodă de lucru ca și în spațiul cu normă obișnuită. Astfel vom arăta că dacă condițiile 1° — 4° sînt valabile pentru aproximația x_0, ele rămîn valabile și pentru x_1, prima aproximație obținută cu ajutorul algoritmului (2).

a) Considerînd formula lui Lagrange, extinsă la spații cu normă generalizată [1], pentru operatorul $\Gamma_0 P'(x)$, se obține

$$\rho_{X,X}(\Gamma_0[P'(x_1) - P'(x_0)] \leqslant B_0 M_2 \rho_X(x_1 - x_0).$$

Deoarece, avem din ipoteză

$$\rho_X(x_1 - x_0) = \rho_X(\Gamma_0 P(x_0) \leqslant \eta_0,$$

rezultă

$$\rho_{X,X}(\Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_1)]) \leqslant B_0 M_2 \eta_0 \equiv h_0 \leqslant \frac{1}{2} < 1.$$

De aici, în baza teoremei lui Banach extinsă la spațiul X considerat [1], rezultă existența operatorului invers

$$H = \{I - \Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_1)]\}^{-1}$$

cu norma generalizată mărginită

$$\rho_{X,X}(H) \leqslant \frac{1}{1 - h_0}\,.$$

Avem atunci

$$H\Gamma_0 = \{I - \Gamma_0[P'(x_0) - P'(x_1)]\}^{-1} \cdot [P'(x_0)]^{-1} = \{P'(x_0) \cdot (I - \Gamma_0[P'(x_0) - [P'(x_1)]\}^{-1} = [P'(x_1)]^{-1} = \Gamma_1$$

ceeace dovedește existența operatorului invers Γ_1. Norma generalizată a acestui operator este mărginită,

$$\rho_{Y,X}(\Gamma_1) \leqslant \frac{1}{1 - h_0} \cdot B_0 \equiv B_1.$$

Astfel condiția 1° este satisfăcută și de către x_1.

b) Folosind formula tayloriană, extinsă la cazul spaţiului cu normă generalizată [1], pentru operatorul $P(x_0)$, avem

$$\rho_Y(P(x_1) - P(x_0) - P'(x_0)(x_1 - x_0) \leqslant \frac{M_2}{2}\rho_x^2(x_1 - x_0),$$

care, conform algoritmului (2), ne conduce la

$$\rho_Y(P(x_1) \leqslant \frac{M_2}{2}\eta_0^2.$$

Rezultă artunci $(x_1))$

$$\eta_1 = \rho_{X,X}(\Gamma_1 P(x)) \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{1-h_0}B_0 M_2 \eta_0^2 = \frac{1}{2}\frac{h_0\eta_0}{1-h_0}$$

fapt ce dovedeşte că şi condiţia 2° este îndeplinită de către elementul x_1.

c) Condiţia 3° va fi deasemenea îndeplinită de către elementul x_1. Într-adevăr, sfera S_1 de centru x_1 şi raza $2\eta_1$ este inclusă în sfera S deoarece avem, pentru un element $x \in S_1$,

$$\rho_X(x - x_0) \leqslant \rho_X(x - x_1) + \rho_X(x_1 - x_0) \leqslant 2\eta_1 + \eta_0 \leqslant \frac{h_0\eta_0}{1-h_0}\eta_0 = \eta_0\left(\frac{h_0}{1-h_0} - 1\right) \leqslant 2\eta_0.$$

d) Condiţia 4° se verifică în mod direct folosindu-se delimitările normei lui Γ_1 respectiv $\Gamma_1 P(x_1)$. Într-adevăr, avem

$$h_1 \equiv B_1\eta_1 M_2 = \frac{B_0}{1-h_0}\cdot\frac{1}{2}\frac{h_0\eta_0}{1-h_0}M_2 = \frac{1}{2}\frac{h_0^2}{(1-h_0)^2} \leqslant 2h_0^2 \leqslant \frac{1}{2}.$$

Putem deci conchide că pentru elementul x_1, condiţile 1° — 4° sînt verificate În baza inducţiei complete se stabilesc următoarele relaţii de recurenţă, analoage cu cele obţinute în cazul particular al spaţiilor cu normă obişnuită:

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1-h_{n-1}}; \quad \eta_n = \frac{1}{2}\frac{h_{n-1}\eta_{n-1}}{1-h_{n-1}}; \qquad h_n = \frac{1}{2}\frac{h_{n-1}^2}{(1-h_{n-1})^2}$$

unde η_n delimitează norma lui $x_{n+1} - x_n$, adică

$$\rho_X(x_{n+1} - x_n) \leqslant \eta_n. \tag{5}$$

Pentru h_n şi η_n se obţin delimitările

$$h_2 \leqslant \frac{1}{2}(2h_2)^2, \ldots, h_n \leqslant \frac{1}{2}(2h_0)^{2n}$$

$$\eta_n \leqslant \frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0 \tag{6}$$

care se verifică prin calcul direct.

Din (5) şi (6) se deduce,

$$\rho_X(x_{n+p} - x_n) \leqslant \rho_X(x_{n+1} - x_n) + \rho_X(x_{n+2} - x_{n-1}) + \ldots + \rho_X(x_{n+p} - x_{n+p-1}) \leqslant$$

$$\leqslant \eta_n + \eta_{n+1} + \ldots + \eta_{n+p-1} \leqslant \frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0\left[1 + \frac{1}{2}(2h_0)^{2^n} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}}(2h_0)^{2^n}(2^{p-1}-1)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0\left[1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^{p-1}} + \ldots\right] = \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{2^n-1}\eta_0. \tag{7}$$

Pe baza completitudinii spaţiului X, există deci

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Făcînd în (7) $p \to \infty$ se stabileşte relaţia (4) din enunţul teoremei.
Pe baza formulei teyloriene extinse şi a algoritmului (2) se stabileşte că

$$\rho_Y(P(x_n)) \leqslant \frac{M_2}{2} \rho_X^2(x_n - x_{n-1}).$$

Din faptul că $\rho_X(x_n - x_{n-1}) \to 0$ pentru $n \to \infty$, rezultă că

$$\rho_Y(P(x_n)) \to 0, \quad \text{pentru} \quad n \to \infty$$

şi deoarece $x_n \to x^*$ în baza continuităţii, obţinem

$$P(x^*) = \theta$$

deci $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ este o soluţie a ec. operaţionale (1)

Observaţii 1. În cazul în care $\rho_{Y,X}(\Gamma)$ este uniform mărginită, problema existenţei soluţiei ecuaţiei operaţionale (1) date, respectiv convergenţa aproximaţiilor către soluţie, a fost studiată de către I. Collatz în [1]. În lucrarea de faţă această condiţie nu a fost cuprinsă pentru orice element $x \in S$, ci numai elementului x_0

2. În cazul particular în care spaţiul X este normat în sens obişnuit, se regăsesc rezultatele date de către L. V. Kantorovici [2]

(Intrat în redacţie la 22 aprilie 1970)

BIBLIOGRAFIE

1. Collatz, I., *Funktionalanalysis und numerische mathematik*, Springer Verlag, Berlin 1964.
2. Kantorovici, I. V., *O metode Niutona*, „Trud. Mat. Inst. V. A. Steklova", 28. 104–144, 1949

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОПРЕДЕЛЁННЫХ В L-СВЕРХМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Резюме)

Авторы статьи, применяя метод Ньютона-Канторовича и имея алгоритм

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1} P(x_n),$$

изучают проблему решения операторного уравнения $P(x) = 0$, $P(x)$ будучи определён в области S L-сверхметрического пространства и со значениями в пространстве того же типа, Y. Для этого предполагается существование обратного оператора $\Gamma_0 = [P'(x_0)]^{-1}$ и его ограничение лишь для первого приближения x_0 решения рассматриваемого уравнения, в отличие от [1], где это предполагается для любой $x \in S$.

ON SOLVING THE DEFINITE NON-LINEAR OPERATIONAL EQUATIONS IN L-SUPERMETRICAL SPACES

(Summary)

Using the method of Newton-Kantorovici, having the algorithm

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1}P(x_n),$$

the problem of solving the operational, equation $P(x) = 0$, $P(x)$ is studied, being defined in a domain S of the L-supermetric space and having values in a space of the same type, Y. The existence of the reverse operator $\Gamma_0 = [P'(x_n)]^{-1}$ is assumed for this as well as its limitation only to a prime approximation x_0 of the solution of the considered equation, in contrast to [1] where this is assumed for any $x \in S$.

SUR LA COUCHE LIMITE MAGNÉTOHYDRODYNAMIQUE NON-STATIONNAIRE PLANE

IOAN POP

Notations

c, vitesse de la lumière
$\vec{H}$, champ magnétique appliqué
H_0, dimension caractéristique associée au champ magnétique
$\vec{H}_e$, champ magnétique extérieur
N^2, nombre d'Alfvén
R, rayon du cylindre
t, coordonnée temporelle
t_s^*, temps de détachement
$\vec{V}$, vitesse du fluide dans la couche limite
U, vitesse du mouvement potentiel
U_0, grandeur caractéristique associée à la vitesse
U_∞, vitesse du fluide par rapport au cylindre
x, y, coordonnées de la couche limite (x-au long du corps, et y- perpendiculairement sur lui)
ρ, densité
ν, viscosité cinématique
ν_m, viscosité magnétique
σ, conductivité électrique
η, variable non-dimensionnelle associée à y
μ, viscosité dynamique.

1. Introduction. Au cours des années précédentes d'intenses études analytiques ont été effectuées relativement à l'action mutuelle du champ magnétique avec le fluide conducteur électrique qui s'écoule tout autour d'un corps. La solution mathématique de ce problème technique, d'importance majeure, réside dans la résolution d'un système d'équations différentielles aux dérivées partielles. Cette solution détermine l'influence du champ magnétique sur le détachement de la couche limite du corps, sur la force du frottement, sur le transfert de chaleur, etc. Concernant ce sujet nous citons, en particulier, les travaux suivants : celui de I. Teipel [1], où l'on établit des solutions par ,,similitude" pour les équations d'une couche limite magnétohydrodynamique non-stationnaire plane, le champ magnétique étant normal sur le plan du mouvement; celui de A. B. Vatajin [2], qui s'occupe du détachementde la couche limite magnétohydrodynamique non-stationnaire plane dans le cas d'une conductivité électrique du fluide variable avec le temps. Nous citons aussi celui de A. G. Boev [3], qui déduit des solutions par „similitude" pour le cas d'une couche limite magnétohydrodynamique non-stationnaire tridimensionelle. Récemment [4] nous avons étudié l'influence d'un champ magnétique uniforme sur le détachement de la couche limite d'un corps de rotation en mouvement hélicoïdal (spin). Dans le présent travail, nous voulons reprendre l'étude de la formation de la couche limite magnétohydrodynamique plane en présence d'un champ magnétique appliqué et parallèle à la vitesse du mouvement potentiel. En particulier on calcule l'intervalle de temps durant lequel la couche limite se sépare d'un cylindre circulaire et on montre que ce temps croît au fur et à mesure que le champ magnétique croît. Ce problème a été analysé pour le mouvement stationnaire dans les travaux [5, 6].

2. Équations de la couche limite. Prenons maintenant en considération le mouvement plan non-stationnaire d'un fluide visqueux incompressible en présence d'un champ magnétique situé dans le plan du mouvement. On suppose le champ électrique nul et le champ magnétique appliqué parallèle à la vitesse du courant à la surface extérieure de la couche limite

$$\vec{H}/H_0 = \vec{V}/V_0.$$

Dans ces conditions, les équations de la couche limite magnétohydrodynamique, étant supposé connu le champ magnétique appliqué $\vec{H}_e(H_e, 0, 0)$, sont

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial t} + (1 - N^2)\, U\frac{\partial U}{\partial x} + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + N^2\left(H_x\frac{\partial H_x}{\partial x} + Hy\frac{\partial H_x}{\partial y}\right), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial}{y\partial}(uHy - vH_y) + \nu_m\frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

où $N^2 = H_0/4\pi\rho U_0^2$. Nous résoudrons les équations (2.1) — (2.3) avec les conditions à la limite suivantes

$$\begin{aligned} &u = v = 0, &&H_x = H_y = 0 &&\text{pour } y = 0,\\ &u \to U(x), &&H_x \to H_e(x) &&\text{pour } y \to \infty. \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Solution du problème. Si nous introduisons les fonctions du courant ψ pour la vitesse et Φ pour le champ magnétique

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \; v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \; H_x = \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \; H_y = -\frac{\partial\Phi}{\partial x},$$

alors les équations (2.1) et (2.2), avec les conditions à la limite (2.4) deviennent

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial y} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = (1 - N^2)U\frac{dU}{dx} + \nu\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3} + N^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}\right), \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \nu_m\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial y} = \Phi = \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0 \qquad \text{pour} \quad y = 0,\\ &\frac{\partial\psi}{\partial y} \to U(x), \frac{\partial\psi}{\partial y} \to U(x) \qquad \text{pour} \quad y \to \infty. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pour l'intégration des équations de la couche limite (3.1) — (3.3), nous emploierons la méthode des solutions „similaires" [7] : la transformation des équations de la couche limite en équations différentielles ordinaires. Dans ce but on introduit la variable $\eta = y/2\sqrt{\nu t}$ et on suppose que $\nu \approx \nu_m$ [8]. Si on cherche maintenant la solution des équations (3.1)—(3.3) sous la forme

$$\psi = 2\sqrt{\nu t}\, U\, F(x, \eta, t), \qquad \Phi = 2\sqrt{\nu t}\, U G(x, \eta, t),$$

alors elles deviennent

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3F}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2} - 4t\frac{\partial^2F}{\partial t\partial\eta} + 4t\left\{\frac{dU}{dx}\left[1 - \left(\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)^2 + F\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right] + \right.\\ &\left. + U\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2} - \frac{\partial F}{\partial\eta}\frac{\partial^2F}{\partial x\partial\eta}\right)\right\} - 4N^2t\left\{\frac{dU}{dx}\left[1 - \left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)^2 + G\frac{\partial^2G}{\partial\eta^2}\right] + \right.\\ &\left. + U\left(\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial^2G}{\partial\eta^2} - \frac{\partial G}{\partial\eta}\frac{\partial^2G}{\partial x\partial\eta}\right)\right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial^3G}{\partial\eta^3} + 2\eta\frac{\partial^2G}{\partial\eta^2} - 4t\frac{\partial^2G}{\partial t\partial\eta} + 4t\left[\frac{dU}{dx}\left(F\frac{\partial^2G}{\partial\eta^2} - G\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right) + U\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2G}{\partial\eta^2} - \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial^2F}{\partial\eta^2}\right)\right] = 0, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} &F = \frac{\partial F}{\partial\eta} = G = \frac{\partial G}{\partial\eta} = 0 \qquad \text{pour} \quad \eta = 0,\\ &\frac{\partial F}{\partial\eta} \to 1, \frac{\partial G}{\partial\eta} \to 1 \qquad \text{pour} \quad \eta \to \infty. \end{aligned} \quad (3.6)$$

En examinant (3.4) — (3.6), on est conduit à prendre les fonctions F et G sous la forme

$$\begin{aligned} F(x, \eta, t) &= F_0(\eta) + t\frac{dU}{dx}F_{11}(\eta) + t^2\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2F_{21}(\eta) + U\frac{d^2U}{dx^2}F_{22}(\eta)\right] + \cdots,\\ G(x, \eta, t) &= G_0(\eta) + t\frac{dU}{dx}G_{11}(\eta) + t^2\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2G_{21}(\eta) + U\frac{d^2U}{dx^2}G_{22}(\eta)\right] + \cdots. \end{aligned} \quad (3.7)$$

En substituant les solutions (3.7) en (3.4) et (3.5), on obtient pour les fonctions $F_0(\eta)$, $G_0(\eta)$, $F_{ii}(\eta)$ et $G_{ii}(\eta)$ $(i = 1, 2)$ les équations différentielles ordinaires suivantes,

$$F_0''' + 2\eta F_0'' = 0, \qquad G_0''' + 2\eta G_0'' = 0, \tag{3.8}$$

$$F_{11}''' + 2\eta F_{11}'' - 4F_{11}' = 4(-1 + F_0'^2 + F_0 F_0'') + 4N^2(1 - G_0'^2 + G_0 G_0''), \tag{3.9}$$

$$G_{11}''' + 2\eta G_{11}'' - 4G_{11}' = 4(G_0 F_0'' - G_0'' F_0), \tag{3.10}$$

$$F_{2i}''' + 2\eta F_{2i}'' - 8F = 4\alpha_{2i}, \qquad G_{2i}''' + 2\eta G_{2i}'' - 8G_{2i}'' = 4\beta_{2i}, \tag{3.11}$$

où

$$\alpha_{21}(\eta) = 2F_0'F_{11}' - F_0 F_{11}'' - F_0''F_{11}, \quad \alpha_{22}(\eta) = F_0'F_{11}' - F_{11}F_0'',$$

$$\beta_{21}(\eta) = G_0 F_{11}'' - F_{11}G_0'', \qquad \beta_{22}(\eta) = G_0''F_{11}.$$

Les conditions à la limite des équations (3.8) — (3.11) sont

$$\begin{aligned} &F_0(0) = F_0'(0) = G_0(0) = G_0'(0) = 0, \quad F_0'(\infty) \to 1, \quad G_0'(\infty) \to 1, \\ &F_{ii}(0) = F_{ii}'(0) = G_{ii}(0) = G_{ii}'(0) = 0, \quad F_{ii}'(\infty) \to 0, \quad G_{ii}'(0) \to 0. \end{aligned} \tag{3.12}$$

La solutions des équations (3.8) et (3.10) sont

$$F_0(\eta) = G_0(\eta) = \eta \operatorname{erf} \eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}}(e^{-\eta^2} - 1), \tag{3.13}$$

$$G_{11}(\eta) = 0,$$

où

$$\operatorname{erf} \eta = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\eta e^{-s^2} ds,$$

est la fonction de l'erreur de Gauss. Compte tenu de (3.13), l'équation (3.9) devient

$$F_{11}''' + 2\eta F_{11}'' - 4F_{11}' = 4(N^2 - 1)\left[-erf^2\eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2} erf\,\eta + \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} - \frac{2}{\pi} e^{-\eta^2} + 1\right]. \tag{3.14}$$

L'intégrale générale de l'équation homogène (3.14) est

$$F_{11}^{1h}(\eta) = C_1(1 + 2\eta^2) + C_2\left[(1 + 2\eta^2)(1 - erf\,\eta) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta e^{-\eta^2}\right[$$

D'autre part, nous rechercherons une intégrale particulière de l'équation non — homogène (3.14) sous la forme

$$F_{11}^{1p}(\eta) = X(\eta)\ erf^2\,\eta + Y(\eta)\ erf\,\eta + Z(\eta),$$

où les fonctions X, Y et Z sont déterminées par les équations

$$X'' + 2\eta X' - 4X = -4(N^2 - 1), \tag{3.15}$$

$$Y'' + 2\eta Y' - 4Y = -\frac{8}{\sqrt{\pi}} X' \cdot e^{-\eta^2} + \frac{8}{\sqrt{\pi}} (N^2 - 1)\eta e^{-\eta^2},$$

$$Z'' + 2\eta Z' - 4Z = -\frac{4}{\sqrt{\pi}} Y' \cdot e^{-\eta^2} - \frac{8}{\pi} X \cdot e^{-\eta^2} +$$

$$4(N^2 - 1)\left(\frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} - \frac{2}{\pi} e^{-\eta^2} + 1\right). \tag{3.15}$$

En intégrant le système (3.15) ci-dessus, on trouve

$$X(\eta) = (N^2 - 1)\left(\frac{1}{2} - \eta^2\right), \; Y(\eta) = \frac{3(1 - N^2)}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2},$$

$$Z(\eta) = (1 - N^2)\left(\frac{2}{\pi} e^{-\eta^2} - \frac{4}{3\pi} e^{-\eta^2} + 1\right),$$

De cette manière, avec les conditions à la limite (3.12), la solution de l'équation (3.14) est

$$F'_{11}(\eta) = (N^2 - 1)\left\{\left(\frac{1}{2} - \eta^2\right) erf^2 \eta - \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3\pi}\right)(1 + 2\eta^2) + \frac{3}{\sqrt{\pi}} \eta e^{-\eta^2}\right] erf\, \eta + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{2}{3\sqrt{\pi}} - \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3\pi}\right)\eta\right] e^{-\eta^2} - \frac{2}{\pi} e^{-2\eta^2} + 2\left(1 + \frac{2}{3\pi}\right)\eta^2 + \frac{2}{3\pi}\right\}.$$

Revenons maintenant au système d'équations (3.11). Afin de résoudre ce système nous remarquerons que les expressions

$$p(\eta) = 3 + 12\eta^2 + 4\eta^4,$$

$$q(\eta) = (3 + 12\eta^2 + 4\eta^4) erf\, \eta + \frac{2}{\sqrt{\pi}}(5\eta + 2\eta^3) e^{-\eta^2},$$

représentent deux solutions particulières des équations homogènes (3.11). Alors la solution générale de ces équations peut s'écrire de la manière suivante

$$F'_{2i}(\eta) = \frac{\sqrt{\pi}}{12}\left\{q\left[\int_0^\infty e^{s^2} q(s)\alpha_{2i}(s)ds - \int_0^\infty e^{s^2} p(s)\alpha_{2i}(s)ds\right] - p\int_0^\eta e^{s^2} q(s)\alpha_{2i}(s)ds\right\}.$$

Mettant dans cette formule β_{2i} à la place de α_{2i}, nous obtenons une formule correspondante pour la fonction $G_{2i}(\eta)$. Comme les intégrales qui surviennent dans la formule ci-dessus se calculent assez difficilement, nous ne voulons pas développer par la suite ces calculs. Pourtant la force de frottement sur la surface du corps

$$\tau_x = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{1}{2}(\mu\rho/t)^{1/2}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_\eta = 0,$$

peut se calculer assez facilement. La condition $\tau_x = 0$ donne l'intervalle de temps qui s'écoule du début du mouvement jusqu'au moment où la couche limite se détache du corps et conduit à la relation

$$F''_0(0) + t_s \frac{dU}{dx} F''_{11}(0) + t_s^2\left[\left(\frac{dU}{dx}\right)^2 F''_{21}(0) + U\frac{d^2U}{dx^2} F''_{22}(0)\right] = 0,$$

où

$$F''_{2i}(0) = \frac{4}{3}\int_0^{\infty} e^{s^2}[q(s) - p(s)]\alpha_{2\,i}(s)ds, \tag{3.16}$$

tandis que de (3.13) et (3.16) il résulte

$$F''_0(0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,,\ F''_{11}(0) = \frac{2(1-N^2)}{\sqrt{\pi}}\left(1 + \frac{4}{3\pi}\right) = 1{,}42442\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(1-N^2),$$

$$F''_{21}(0) = \frac{2(1-N^2)}{\sqrt{\pi}}\left[\frac{11}{12} + \left(\frac{89}{30} - \frac{36}{10}\sqrt{3}\right)\frac{1}{\sqrt{\pi}} - \frac{128}{135}\,\frac{1}{\pi^2}\right] = -\,0{,}21987\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(1-N^2),$$

$$F''_{22}(0) = \frac{2(1-N^2)}{\sqrt{\pi}}\left[-\frac{7}{12} + \left(-\frac{11}{20} + \frac{9}{10}\sqrt{3}\right)\frac{1}{\pi} + \frac{64}{45}\,\frac{1}{\pi^2}\right] = -0{,}05975\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(1-N^2).$$

4. Application. Appliquons les résultats ci-dessus au cas du cylindre circulaire droit. On sait qu'en ce cas

$$U = 2U_{\infty} \sin\frac{x}{R}\,,$$

où x est la longueur de l'arc de la courbe mesurée en prenant comme origine des arcs le point critique du cylindre. Mais, comme $-\,dU/dx$ a une valeur maximale dans une position diamétralement opposée au point critique, U étant ici nul, la séparation t^*_s de la couche limite se produit d'abord en ce point et elle est donnée par l'équation

$$0{,}21987t_s^{*2} + 1{,}42442t^*_s - 1/1-N^2 = 0, \tag{4.1}$$

où $t^*_s = 2U_{\infty}\, t_s/R$. L'équation (4.1), ci-dessus met en évidence le fait que le temps de séparation croît au fur et à mesure que N^2 croît.

(Manuscrit reçu le 24 novembre 1969)

BIBLIOGRAPHIE

1. Teipel, I., Z.A.M.P., **15**, 588, 1965.
2. Vatajin, A. B., P.M.T.F., **4**, 40 (1965).
3. Boev, A.G., P.M.T.F., **1**, 15 (1966).
4. Pop, I., „Magn. Ghidrodinamika" **4**, 39 (1969).
5. Belubekian, M. V., „Inj. Fiziceskii Jurnal," **6**, 97 (1963).
6. Pop, I., „Inj. Fiziceskii Jurnal, **15**, 134 (1968).
7. Schlichting, H., Boundary Layer Theory, New York, 1962.
8. Davies, T. V., „Proc. Roy. Soc.," A **273**, 496 (1963).

ASUPRA STRATULUI LIMITĂ MAGNETOHIDRODINAMIC NESTAŢIONAR PLAN

(Rezumat)

Se studiază influenţa unui cîmp magnetic variabil în spaţiu şi timp asupra desprinderii stratului limită plan de un corp care începe să se mişte impulsiv din starea de repaus. În studiul problemei se aplică metoda soluţiilor „similare" — transformarea ecuaţiilor stratului limită în ecuaţii diferenţiale ordinare, a căror soluţie se dă sub formă închisă. Pentru cilindrul circular se constată că, pe măsură ce cîmpul magnetic creşte, desprinderea stratului limită de el se produce mai tîrziu.

О ПЛОСКОМ НЕСТАЦИОНАРНОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

(Резюме)

Изучается влияние магнитного поля, изменяемого в пространстве и времени, на отрыв плоского пограничного слоя от тела, которое начинает двигаться внезапно из состояния покоя. В изучении задачи применяется метод „подобных" решений — превращение уравнений пограничного слоя в обыкновенные дифференциальные уравнения, решение которых даётся в замкнутом виде. В случае циркулярного цилиндра отмечается, что по мере того, как магнитное поле увеличивается, отрыв от него пограничного слоя происходит позднее.

Felix Hausdorff, Nachgelassene Schriften, I, II, B.G. Teubner, Stuttgart, 1969.

Ces deux volumes, totalisant plus de 1100 pages, édités sous la direction du prof. G. Bergmann (Münster), avec une subvention de la „Deutsche Forschungsgemeinschaft", présentent une reproduction photographique des manuscrits posthumes du grand mathématicien, datés de 1934 à 1938. Peu connus pendant la vie de l'auteur (1868—1942), même dans le cercle restreint de ses relations scientifiques, ces manuscrits contiennent les profondes remarques de Hausdorff sur divers travaux parus dans les périodiques de l'époque, se reportant, pour la plupart, à ses principaux domaines de recherche, qui furent la théorie des ensembles, la topologie et la théorie des fonctions. Dans ces manuscrits, l'auteur simplifie (et corrige parfois) bien des démonstrations, et complète les résultats par d'importantes remarques personnelles. Une préface de M.G. Bergmann donne une esquisse biographique de Hausdorff, d'intéressants détails sur sa correspondance avec les mathématiciens contemporains (P. Urysohn, P. Alexandroff, C. Kuratowski) et des indications précises, quoique rapides, sur le contenu des plus importantes contributions de Hausdorff, exposées dans ces manuscrits. Tels sont, entre autres, ses résultats sur les espaces de Baire et la théorie de la dimension. Deux nouveaux volumes sont projetés pour faire suite, se rapportant aux manuscrits datés de 1938 à 1942, puis, dans un délai de 2 ans, d'autres volumes contenant des manuscrits antérieurs à 1934. Cette publication permettra au lecteur de pénétrer dans l'intimité de la pensée et du style de travail du grand pionnier des mathématiques modernes que fut Felix Hausdorff.

G.C.

Bases in Banach Spaces I by Dr. Ivan Singer, Institute of Mathematics, Academy of the Socialist Republic of Romania, Bucharest, VIII, 668 pages. Berlin-Heidelberg-New York; Springer-Verlag 1970 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band 154).

This monograph on basis problem appears a short time after the appreciated book of the same author „Cea mai bună aproximare în spaţii vectoriale normate prin elemente din subspaţii vectoriale", Edit. Acad. R.S. România 1967 (English translation to appear in Edit. Acad. R.S. România and Springer-Verlag 1970). The basis problem, one of the famous classical unsolved problems of functional analysis, has been attracting hundreds of mathematicians soon after its formulation by Schauder 43 years ago. The various and important applications of the results and tools of basis theory, especially to approximation theory, make the new book of Singer useful both for specialists in the field and for those who want to apply basis theory to other problems.

Due to the vastness of the field, the present monograph is divided into two volumes, of which this is the first.

The Chapter I is dedicated to the basis problem and some properties of bases in Banach spaces. By a basis in a Banach space E we understand a sequence $\{x_n\}$ in E such that for every $x \in E$ there exists a unique sequence of scalars $\{\alpha_n\}$ with $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$, where the series converges in the norm-topology of E. Bases for most standard Banach spaces (as c, C[0, 1], 1 and L [0, 1] $(1 \leqslant p < \infty)$) were constructed by Schauder himself. Obviously, every Banach space with a basis is separable (hence the space m has no basis), but it is not known yet whether the converse is true or not (the basis problem): does every separable Banach space possess a basis? Note that there are some concrete separable Banach spaces in which no basis is known, e.g. the space of analytic functions in the unit disk.

The first chapter contains, above all, classical results of Banach concerning the continuity of coefficient functionals $f_n(x) = \alpha_n$ associated with a basis $\{x_n\}$ and the characterizations of regular biorthogonal systems. The notion of basis is regarded as a strong form of three fundamental types of linear independence: finite, ω- and minimal linear independence; the characterizations of Markushevich for minimal sequences are given. Necessary and sufficient conditions of Grinblium for a complete sequence $\{x\}$ to be a basis are also given in terms only of the properties of the sequence $\{x_n\}$ or in terms of domination of sequences. For certain types of nearness between sequences, a number of stability theorems of Paley-Wiener type are proved (conservation of linear independences and basis property).

In the author's opinion the basis problem seems to have a negative answer, i.e. it is probable that there exists a Banach space which has no basis. Indeed, he gives a sufficient condition for existence of a separable Banach space having no basis, which suggests a possible method of constructing such a space. In addition to this, the author constructs a separable complete metric linear space which has no basis, and in each normed space he gives a basis which is not Schauder basis. Using the author's notion of characteristic of a linear subspace of a conjugate Banach space, a number of important theorems are established concerning the properties of strong duality with their application to bases and sequence spaces. This chapter is completed with some applications to general form of continuous linear maps between Banach spaces with basis, to Grothendieck approximation problem, to evaluation of the best approximation in Banach spaces with basis and to the problem of polynomial and strictly polynomial bases.

More extensive, the second and last chapter deals with some special classes of bases in Banach spaces. One of the main problems which the author considers for each such class is the existence problem: does there exist a basis belonging to the respective class in every separable Banach space? In infinite dimensional Banach spaces the answer is either negative or unknown (an affirmative answer would also imply an affirmative answer to the basis problem). In the first case one gives an example of a separable Banach space which has no basis belonging to the respective class; in the second case threre arises the more restricted problem of the existence of bases of that class in infinite dimensional Banach spaces with bases.

The classes of bases are the following: monotone and strictly monotone bases (considered by James), normal bases (defined by Banach), positive bases (recently introduced by Davis), retrobases in conjugate Banach spaces (studied by Gelbaum), Besselian and Hilbertian bases, and universal and complementably universal bases (recently introduced and studied by Pelczynski); the k-shrinking and k-boundedly complete bases, the bases of types wc_0, swc_0, P, aP, 1_+, $a1_+$ and their duals, are introduced and studied by Singer himself or in collaboration with Foiaş. Some classes of unconditional bases (orthogonal and hyperorthogonal, subsymmetric and symmetric, perfectly homogenous and uniform bases) are considered in the last part of this chapter.

The monograph ends with an extensive bibliography (276 titles) and notation, author and subject indices.

This book is the first exhaustive, rigorous and systematic presentation of the results known today on bases in Banach spaces, including the latest results often acquired by direct contact with their authors. The completeness of the exposition (necessary and sufficient conditions, examples and counter-examples, unsolved problems and remarks) and the author's numerous and important contributions (a number of his results are first published here) are undeniable qualities of this fundamental monograph.

IOAN MUNTEAN

Întreprinderea Poligrafică Cluj — 714/1970