STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 2

1970

CLUJ

ANUL XV 1970

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 2

Redacţia: CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 • Telefon: 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — SOMMAIRE — CONTENTS

SYSTÈMES RÉGULIERS DE Ω-SOUS-GROUPES D'UN Ω-GROUPE. I.

par

I. VIRÁG

Dans ce travail un Ω-groupe représente un groupe ayant Ω pour domaine des multi-opérateurs (groupe à multi-opérateurs [3][1]).

On introduit la notion de système régulier de Ω-sous-groupes et de Ω-endomorphismes d'un Ω-groupe et on en donne quelques exemples. Ces notions représentent une généralisation de la décomposition d'un Ω-groupe respectivement en somme directe et en somme libre d'une famille de Ω-sous-groupes. On étudie la relation entre les systèmes réguliers de Ω-sous-groupes et les systèmes de Ω-endomorphismes d'un Ω-groupe et le problème de la possibilité des raffinements des systèmes réguliers de Ω-sous-groupes.

DÉFINITION 1. La famille $(A_i\,;\ i \in I)$[2] de Ω-sous-groupes du Ω-groupe G est un système régulier de G si les conditions suivantes sont vérifiées:

(I) G possède une famille $(B_i\,;\ i \in I)$ d'idéaux, telle que

(i) $G = A_i + B_i$ pour chaque $i \in I$;

(ii) $O = A_i \cap B_i$, pour chaque $i \in I$;

(iii) $A_i \subseteq B_j$ pour chaque couple $i,\ j \in I,\ i \neq j$.

(II) Le système $(A_i\,;\ i \in I)$ est complet par rapport à la condition (I), c'est-à-dire, s'il existe un système $(A_j\,;\ j \in J)$, $I \subseteq J$ de Ω-sous-groupes de G, vérifiant la condition (I), alors $A_j = O$ pour chaque $j \in J \setminus I$.

Observations. 1°. Si $(A_i\,;\ i \in I)$ est un système régulier de Ω-sous-groupes de G et $A_{i_0} = O$ $(i_0 \in I)$ alors nous avons — conformément à la condition (I) — $B_{i_0} = G (i_0 \in I)$. Dans ce cas $(A_i\,;\ i \in I \setminus \{i_0\})$ est un système régulier de G.

2°. Si $(A_i\,;\ i \in I)$ est un système régulier de G et $A_{i_0} = A_{i_1}$ $(i_0, i_1 \in I,\ i_0 \neq i_1)$, alors $A_{i_0} = A_{i_1} \subseteq B_{i_0}$ et, conformément à la condition (I), nous avons $G = A_{i_0} + B_{i_0} = B_{i_0}$ et $O = A_{i_0} \cap B_{i_0} = A_{i_0}$.

---

[1] Pour la terminologie de la théorie des groupes à multi-opérateurs nous renvoyons le lecteur à [5].

[2] $I \neq \emptyset$ désigne un ensemble arbitraire d'indices.

3°. Si $(A_i\,;\ i \in I)$ est un système régulier de Ω-sous-groupes de G et $A_{i_0} = G (i_0 \in I)$, alors $B_{i_0} = O$. En tenant compte du fait que $A_i \subseteq B_{i_0}$, $i \neq i_0$, $i \in I$, il résulte que $A_i = O$, $i \in I \setminus \{i_0\}$.

En vertu de ces observations nous supposons que dans un système régulier $(A_r\,;\ i \in I)$ de Ω-sous-groupes de G on a $A_i \neq O$ pour chaque $i \in I$.

Soit $(A_i\,;\ i \in I)$ une famille de Ω-sous-groupes du Ω-groupe G. On désigne par A_i^* le Ω-sous-groupe de G engendré par les Ω-sous-groupes A_j, $j \in I \setminus \{i\}$.

LEMME 1. *Les inclusions* $A_i \subseteq B_j$, $i, j \in I$, $i \neq j$ *dans la definition* 1. *sont équivalentes aux inclusions*

$$\text{(iii}')\quad A_i^* \subseteq B_i, \text{ pour chaque } i \in I.$$

Exemples. 1. Soit G la somme directe de ses Ω-sous-groupes A_i, $i \in I$ désignée par $G = \sum_{i\in I}{}^{+}_{\Omega} A_i$. Alors la famille $(A_i\,;\ i \in I)$ est un système régulier de G. La famille des idéaux tels que les conditions de la définition 1. soient vérifiées est $(A_i^*\,;\ i \in I)$.

2. Soit G la somme libre de ses Ω-sous-groupes A_i, $i \in I$ désignée par $G = \sum_{i\in I}{}^{*}_{\Omega} A_i$. Alors la famille $(A_i\,;\ i \in I)$ est un système régulier de G. La famille des idéaux de G tels que les conditions de la définition 1. soient vérifiées est $(\overline{A_i^*}^G\,;\ i \in I)$, ou $\overline{A_i^*}^G$ est l'idéal minimal de G qui contient le Ω-sous-groupe A_i^* („fermeture normale" de A_i^* en G).

3. Soit G un groupe (additif) résoluble fini et H un sous-groupe maximal de G qui vérifie les conditions:

a) H est nilpotent,
b) $\bigcap_{g\in G} (-g + H + g) = O$

Alors il existe un seul sous-groupe N normal minimal de G, qui vérifie les conditions

c) N est un groupe abélien élémentaire,
d) $G = H + N$, $O = H \cap N$.

Soit $(S_i\,;\ i = 1, 2, \ldots, \text{n})$ la famille des sous-groupes Sylow de H. Alors $(S_i\,;\ i = 1, 2, \ldots, \text{n})$ est un système régulier de G. La famille des sous-groupes normaux de G telle que les conditions de la définition 1. soient vérifiées est $(S_i^* + N\,;\ i = 1, 2, \ldots, \text{n})$.

DEFINITION 2. La famille $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ de Ω-endomorphismes du Ω-groupe G est un système régulier de G lorsque les conditions suivantes sont vérifiées:

(I′) (i′) $\alpha_i^2 = \alpha_i$ pour chaque $i \in I$,

(ii′) $\alpha_i \alpha_j = \theta$ pour chaque couple $i, j \in I$, $i \neq j$ (θ est le Ω-endomorphisme zero de G)

II′) Le système $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ est complet par rapport à la condition (I′) c est-a-dire, s'il existe un système $(\alpha_j\,;\ j \subseteq J)$, $I \subseteq J$ de Ω-endomorphismes de G, avec la condition (I′), alors $\alpha_j = \varepsilon$ pour chaque $j \in J \setminus I$ (ou ε est le Ω-endomorphisme unité de G).

LEMME 2.[3] *Soit A un Ω-sous-groupe du Ω-groupe G. S'il existe un idéal B de G tel que*

$$G = A + B,\ O = A \cap B,$$

alors il existe un Ω-endomorphisme α de G avec les propriétés

$$\alpha^2 = \alpha,\ G\alpha = A,\ ker\ \alpha = B.$$

Si α est un Ω-endomorphisme de G avec la propriété $\alpha^2 = \alpha$, alors

$$G = G\alpha + \ker \alpha,\ 0 = G\alpha \cap \ker \alpha.$$

THÉORÈME 1. *Soit la famille $(A_i\,;\ i \in I)$ de Ω-sous-groupes du Ω-groupe G un système régulier de G et soit $(B_i\,;\ i \in I)$ une famille d'idéaux de G telle que les conditions de la définition 1. soient vérifiées. Alors il existe une famille unique $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ de Ω-endomorphismes de G telle que $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ soit un système régulier de G et*

$$G\alpha_i = A_i,\ ker\ \alpha_i = B_i \ pour\ chaque\ i \in I.$$

Si $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ est un système régulier de Ω-endomorphismes de G, alors $(G\alpha_i\,;\ i \in I)$ est un système régulier de Ω-sous-groupes de G et $(ker\ \alpha_i\,;\ i \in I)$ est une famille d'idéaux de G telle que les conditions de la définition 1 soient vérifiées.

Démonstration. Supposons que $(A_i\,;\ i \in I)$ est un système régulier de G et que $(B_i\,;\ i \in I)$ est une famille d'idéaux de G satisfaisant aux conditions de la définition. 1. Il résulte de (i) et (ii) — conformément au lemme 2 — qu'il existe un système de Ω-endomorphismes $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ de G tel que $\alpha_i^2 = \alpha_i\ G\alpha_i = A_i$ et $\ker \alpha_i = B_i,\ i \in I$. De (iii) il résulte que $G\alpha_i\alpha_j = (G\alpha_i)\,\alpha_j = A_i\alpha_j = O$ donc $\alpha_i\alpha_j = \theta,\ i \neq j$. Il s'ensuit que la condition (I′) de la définition 2. est vérifiée par la famille $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ de Ω-endomorphismes de G. En tenant compte du fait que la famille $(A_i\,;\ i \in I)$ satisfait la condition (II) de la définition 1, il résulte que $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ satisfait la condition (II′) de la définition 2.

Supposons maintenant que $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ est un système régulier de Ω-endomorphismes de G. Il résulte de (i′) -conformément au lemme 2 — les relations

$$G = G\alpha_i + \ker\alpha_i,\ 0 = G\alpha_i \cap \ker \alpha_i,\ i \in I$$

De (ii′) il résulte que $G\alpha_i \subseteq \ker\ \alpha_j,\ i,\ j \in I,\ i \neq j$. Il s'ensuit que la famille $(G\alpha_i\,;\ i \in I)$ de Ω-sous-groupes de G et la famille $(\ker\ \alpha_i\,;\ i \in I)$ d'idéaux de G satisfont la condition (I) de la définition 1. La famille $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ satisfait la condition (II′) de la définition 2, il en résulte que $(G\alpha_i\,;\ i \in I)$ satisfait la condition (II) de la définition 1.

THÉORÈME 2. *Soit $(A_i\,;\ i \in I)$ un système régulier de Ω-sous-groupes de G et, $(B_{ij_i}\,;\ j_i \in J_i)$ un système régulier de Ω-sous-groupes de A_i, $i \in I$. Alors $(B_{ij_i}\,;\ i \in I,\ j_i \in J_i)$ est un système régulier de Ω-sous-groupes de G.*

Démonstration. Désignons par $(\alpha_i\,;\ i \in I)$ le système régulier de Ω-endomorphismes de G associé — conformément au théorème 1 — au système régulier $(A_i\,;\ i \in I)$ de Ω-sous-groupes de G et par $(\beta_{ij_i}\,;\ j_i \in J_i)$ le système régulier de Ω-endomorphismes de A_i associé au système régulier $(B_{ij_i}\,;\ j_i \in J_i)$ de Ω-sous-groupes de A_i, $i \in I$.

---

[3] Ce lemme a été démontré par M. Benado [1] pour une structure S complète, avec une normalité modulaire unitaire.

Nous considérons les Ω-endomorphismes de G

$$\gamma_{ij_i} = \alpha_i\, \beta_{ij_i},\ i \in I,\ j_i \in J_i.$$

Nous montrerons que $(\gamma_{ij_j}; i \in I, j \in J_i)$ est un système régulier de Ω-endomorphismes de G.

Nous avons

$$G\alpha_i = A_i,\ \alpha_i^2 = \alpha_i,\ \alpha_i\alpha_j = \theta,\ i,\ j \in I,\ i \neq j$$

$$A_i\beta_{ij_i} = B_{ij_i},\ \beta_{ij_i}^2 = \beta_{ij_i},\ \beta_{ij_i}\,\beta_{ij_i'} = \theta_i,\ j_i,\ j_i' \in J_i,\ j_i \neq j_i'$$

Il s'ensuit que

$$a_i\alpha_i = a_i \text{ er } a_i\alpha_j = O \text{ pour chaque } a_i \in A_i,\ i,\ j \in I,\ i \neq j$$

$$b_{ij_i}\beta_{ij_i} = b_{ij_i} \text{ et } b_{ij_i}\,\beta_{ij_i'} = O \text{ pour chaque } b_{ij_i} \in A_{ij_i},\ j_i,\ j_i' \in J_i,\ j_i \neq j_i'$$

Soit $g \in G$. Il résulte que $g\,\alpha_i\,\beta_{ij_i} \in B_{cj_i} \subseteq A_i$.

$$g\,\gamma_{ij_i}^2 = (g\alpha_i\,\beta_{ij_i})\alpha_i\,\beta_{ij_i} = g\alpha_i\,\beta_{ij_i} = g\gamma_{ij_i},\ i \in I,\ j_i \in J_i$$

Soient γ_{ij_j} et $\gamma_{kj_k'}$ deux Ω-endomorphismes différents du système $(\gamma_{ij_i};\ i \in I, j_i \in \in J_i)$.

Si on a $i \not\equiv k$, alors

$$g\gamma_{ij_i}\,\gamma_{kj_k'} = (g\alpha_i\beta_{ij_i})\alpha_k\,\beta_{kj_k'} = O$$

Si on a $i = k$, alors $j_i \neq j_k'$ et

$$g\gamma_{ij_i}\,\gamma_{ij_i'} = (g\alpha_i\,\beta_{ij_i}\alpha_i)\,\beta_{ij_i'} = (g\alpha_i)\,\beta_{ij_i}\,\beta_{ij_i'} = O$$

Il s'ensuit que la condition (I') de la définition 2. est vérifiée par la famille $(\gamma_{ij_i};\ i \in I,\ i_i \in J_j)$ de Ω-endomorphismes de G. En tenant compte du fait que la condition (II') de la définition 2 est vérifiée par les familles $(\alpha_i;\ i \in I)$ et $(\beta_{ij_i}; j \in \in J_i)$, $i \in I$, il résulte que cette condition est vérifiée aussi par la famille $(\gamma_{ij_i};\ i \in I,\ j_i \in J_i)$.

(Manuscrit reçu le 22 octobre 1969)

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Benado, *Über die allgemeine Theorie der regulären Produkte von Herrn O. N.Golowin.* II. „Math. Nachr.", **16** (1957), 137–194.
2. O. N. Golovin, *Nilpotentnye proisvedenija grupp.* „Matem. sb.", 27 (1950), 427–454.
3. P. J. Higgins, *Groupe with multiple operators,* „Proc. London Math. Soc.", **6** (1956, 366–416.
4. A. G. Kuroš, *Svobodnyje summy mul'tioperatornych grupp.* „Acta Sci. Math.", 21 (1960), 187–196.
5. A. G. Kuroš, *Lekcii po obščej algebre.* Fizmatgiz, Moskva, 1962.

SISTEME REGULARE DE Ω-SUBGRUPURI ALE UNUI Ω-GRUP. I.

(R e z u m a t)

În lucrare se introduc noţiunile de sistem regular de Ω-subgrupuri, respectiv de Ω-endomorfisme ale unui Ω-grup (grup cu multi-operatori). Se stabileşte legătura între cele două noţiuni şi se arată posibilitatea rafinării unui sistem regular de Ω-subgrupuri ale unui Ω-grup.

РЕГУЛЯРНЫЕ СИСТЕМЫ Ω-ПОДГРУПП ОДНОЙ Ω-ГРУППЫ. I.

(Р е з ю м е)

В статье вводятся понятия регулярной системы Ω-подгрупп, соответственно Ω-эндоморфизмов одной Ω-группы (группа с мультиоператорами). Устанавливается связь между этими двумя понятиями и показывается возможность продолжения одной регулярной системы Ω-подгрупп одной Ω-группы.

ON THE CONVERGENCE OF SOLUTIONS OF THE NONLINEAR DIFFERENTIAL SYSTEMS

by

IOAN MUNTEAN

I. **Convergence of solutions.** In this paper we consider the system of two ordinary differential equations

$$\dot{x}_1 = X_1(t, x_1, x_2), \ \dot{x}_2 = X_2(t, x_1, x_2), \tag{1}$$

where the functions $X_i :]t_0, +\infty[\times R^2 \to R$ $(t_0 \geqslant -\infty,\ i = 1,2)$ and their partial derivatives $X_{ij} = \partial X_i / \partial x_j$ $(i,j = 1,2)$ are continuous. Here R and R^2 are real axis and real plane, respectively, endowed with euclidean vector topology. The solutions of (1) are said to be *convergent* if for each pair of solutions $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ and $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ of (1), which are defined on a neighbourhood of the point $+\infty$, we have

$$x_i(t) - y_i(t) \to 0 \text{ as } t \to +\infty \ (i = 1,2). \tag{2}$$

We remark that the convergence of solutions implies, among other things, uniqueness of periodic or almost periodic solutions of (1). Indeed, if u and v are two almost periodic functions with $u(t) - v(t) \to 0$ as $t \to +\infty$, and $t \in R$, then for any $\varepsilon > 0$ there is a common ε-almost period for both the functions u and v, i.e., there exists a number $l > 0$ such that for every natural number n one may find $t_n \in [n, n + l]$ with

$$|u(t + t_n) - u(t)| < \varepsilon \text{ and } |v(t + t_n) - v(t)| < \varepsilon.$$

According to convergence hypothesis, one has

$$|u(t + t_n) - v(t + t_n)| < \varepsilon$$

if n is large enough. From the last inequalities we derive

$$|u(t) - v(t)| \leqslant |u(t + t_n) - u(t)| + |v(t + t_n) - v(t)| + |u(t + t_n) - v(t + t_n)| < 3\varepsilon,$$

whence $u(t) = v(t)$ for any $t \in R$.

P. Waltman and T. F. Bridgland Jr. [6], Theorem 1, have established a practical criterion for the convergence of solutions of the system

$$\dot{x}_1 = x_2 - F(x_1), \ \dot{x}_2 = -g(x_1) + e(t) \tag{3}$$

This system, obviously of the form (1), is equivalent to the well known Liénard equation with a forcing term

$$\ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = e(t),$$

if we take $x_1 = x$ and $F(x_1) = \int_0^{x_1} f(x)dx$. Besides, the system

$$\dot{x}_1 = h(x_2) - F(x_1) + e(t), \; \dot{x}_2 = - x_1, \tag{4}$$

is equivalent to the forced Rayleigh equation

$$\ddot{z} + F(\dot{z}) + H(z) = e(t)$$

if we take $x_2 = - z$, $x_1 = - \dot{x}_2$ and $h(x_2) = - H(-x_2)$, and it is of the form (1) without being included among the systems (3). It is our object in the present paper to extend the above mentioned criterion to the system (4) and, generally, to the system (1). We shall use the obtained result to study the uniqueness of periodic or almost periodic solutions of (1), to research the stability for certain systems, and to establish the convergence to zero of the solutions of an autonomous system which is of peculiar interest in the theory of automatic regulation.

II. A theorem of convergence of solutions.

THEOREM 1. *If there exist positive numbers q_1, q_2 and r, $q_2^2 < q_1$, such that*

a) $q_2X_{12} - X_{22} \geqslant 0$,

b) $(- q_2X_{11} - q_1X_{12} + X_{21} + q_2X_{22})^2 \leqslant 4(q_1 - q_2^2)(X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21} - r)$,

c) *the function* $- q_1X_{11} + q_2X_{12} + q_2X_{21} - X_{22}$ *is upper bounded, then the solutions of* (1) *are convergent.*

Proof. Let $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ be a pair of solutions of (1) defined on a neighbourhood of the point $+\infty$. Then the function $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$, with $z_i = x_i - y_i$, $(i = 1, 2)$, is a solution of the linear system

$$\dot{z}_1 = Z_{11}(t)z_1 + Z_{12}(t)z_2, \; \dot{z}_2 = Z_{21}(t)z_1 + Z_{22}(t)z_2, \tag{5}$$

where the functions $Z_{ij} :]t_0, +\infty[\rightarrow R$ are given by

$$Z_{i1}(t) = \begin{cases} \dfrac{X_i(t, x_1(t), x_2(t)) - X_i(t, y_1(t), x_2(t))}{x_1(t) - y_1(t)}, & \text{if } x_1(t) \neq y_1(t), \\[2ex] \dfrac{\partial X_i(t, y_1(t), x_2(t))}{\partial x_1}, & \text{if } x_1(t) = y_1(t), \end{cases}$$

and

$$Z_{i2}(t) = \begin{cases} \dfrac{X_i(t, y_1(t), x_2(t)) - X_i(t, y_1(t), y_2(t))}{x_2(t) - y_2(t)}, & \text{if } x_2(t) \neq y_2(t), \\[2ex] \dfrac{\partial X_i(t, y_1(t), y_2(t))}{\partial x_2}, & \text{if } x_2(t) = y_2(t). \end{cases}$$

By a direct computation, we see the functions Z_{ij} admit the following integral representations:

$$Z_{i1}(t) = \int_0^1 \frac{\partial X_i(t, sz_1(t) + y_1(t), x_2(t))}{\partial x_1} ds,$$
$$Z_{i2}(t) = \int_0^1 \frac{\partial X_i(t, y_1(t), sz_2(t) + y_2(t))}{\partial x_2} ds. \tag{6}$$

To verify (2), that is $z_i(t) \to 0$ as $t \to +\infty$ $(i = 1,2)$, it suffices to show that the solution $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ of (5) is asymptotically globally stable. But for linear systems the asymptotic global stability of trivial solution and the asymptotic stability of this solution are equivalent. Further, the last stability is implied by the existence of a Liapunov function which is positive definite, uniformly little and with negative definite derivative by virtue of (5). Such a function may be the scalar product $V(z_1, z_2) = <z, Q \cdot z>$, where Q is the matrix

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & -q_2 \\ -q_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Thus $V(z_1, z_2) = q_1 z_1^2 - 2q_2 z_1 z_2 + z_2^2$, hence V is uniformly little and, by $q_2^2 < q_1$, it is positive definite. We set

$$\begin{aligned} Y_{i1}(s, t) &= X_{i1}(t, sz_1(t) + y_1(t), x_2(t)) \\ Y_{i2}(s, t) &= X_{i2}(t, y_1(t), sz_2(t) + y_2(t)) \end{aligned} \tag{7}$$

and

$$Y(s, t) = \begin{pmatrix} Y_{11}(s, t) & Y_{12}(s, t) \\ Y_{21}(s, t) & Y_{22}(s, t) \end{pmatrix}.$$

Using (6) we have the following expression for the derivative $\dot{V}$ of V by virtue of (5):

$$\dot{V}(z_1(t), z_2(t) = \int_0^1 < z(t), W(s, t) \cdot z(t) > ds \tag{8}$$

with $W(s, t) = Y^T(s, t) \cdot Q + Q \cdot Y(s, t)$ and Y^T the transposed matrix of Y. The eigenvalues of the symmetric matrix $W(s, t)$ are real and equal to the roots $u_{1,2}(s, t)$ of its characteristic equation

$$u^2 - 2(q_1 Y_{11} - q_2 Y_{12} - q_2 Y_{21} + Y_{22})u + 4(q_1 Y_{11} - q_2 Y_{21})(-q_2 Y_{12} + Y_{22}) -$$
$$- (-q_2 Y_{11} + q_1 Y_{12} + Y_{21} - q_2 Y_{22})^2 = 0.$$

The condition b) implies

$$4(q_1 Y_{11} - q_2 Y_{21})(-q_2 Y_{12} + Y_{22}) - (-q_2 Y_{11} + q_1 Y_{12} + Y_{21} - q_2 Y_{22})^2$$
$$\geqslant 4(q_1 - q_2^2) r, \tag{9}$$

therefore, by a), it is necessary that

$$-q_1 Y_{11} + q_2 Y_{12} + q_2 Y_{21} - Y_{22} \geqslant 2((q_1 - q_2^2) r)^{1/2}, \tag{10}$$

hence we obtain the formula

$$u_{1,2}(s,t) = (-q_1Y_{11} + q_2Y_{12} + q_2Y_{21} - Y_{22})\{-1 \pm$$
$$\pm\left[1 - \frac{4(q_1Y_{11} - q_2Y_{21})(-q_2Y_{12} + Y_{22}) - (-q_2Y_{11} + q_1Y_{12} + Y_{21} - q_2Y_{22})^2}{(-q_1Y_{11} + q_2Y_{12} + q_2Y_{21} - Y_{22})^2}\right]^{1/2}\Bigg\}.$$

The inequalities (9) and (10) imply

$$u_{1,2}(s,t) < 2((q_1 - q_2^2)r)^{1/2}\{-1 + [1 - 4(q_1 - q_2^2)r\, M^{-1}]^{1/2}\}, \tag{11}$$

where the positive number M was chosen such that, by c), we had

$$(-q_1Y_{11} + q_2Y_{12} + q_2Y_{21} - Y_{22})^2 < M.$$

Consequently, if we denote by $-u_0$ the right hand of (11), we obtain $u_{1,2}(s, t) < -u_0 < 0$ for any $s \in [0, 1]$ and $t \in]t_0, +\infty[$.

Finally, from (8) we have

$$\dot{V}(z_1(t),\ z_2(t)) = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1(s, t)\cdot z_1(t) \\ u_2(s, t)\cdot z_2(t) \end{pmatrix} \right\rangle ds =$$
$$= \int_0^1 [u_1(s,\ t)\cdot z_1^2(t) + u_2(s,\ t)\cdot z_2^2(t)]ds < -u_0[z_1^2(t) + z_2^2(t)],$$

that is $\dot{V}$ is negative definite and we obtain the required result.

Remark 1. In the particular case $X_i(t,\ x_1,\ x_2) = Y_i(x_1,\ x_2) + e_i(t)$, Theorem 1 is given in [4].

Remark 2. Unlike the known requirements of T. Yoshizawa [7], our conditions are expressed directly on the right hands of (1), what is more useful in applications.

III. **Some applications of the convergence theorem.** 1. Theorem 1 implies the criterion of P. Waltman and T. F. Bridgland Jr. mentioned in Section I:

The solutions of (3) *are convergent if there exist positive numbers* q_1, q_2, r *with* $q_2^2 < q_1$, *such that*

b′) $(q_2f - g' - q_1)^2 \leqslant 4(q_1 - q_2^2)(g' - r)$,

c′) *the function* $q_1f - q_2g'$ *is upper bounded.*

2. Moreover, the same Theorem includes the following new result concerning the convergence of solutions of (1):

The solutions of (4) *are convergent if there exist positive numbers* q_1, q_2, r *with* $q_2^2 < q_1$, *such that*

b″) $(q_2F' - q_1h' - 1)^2 \leqslant 4(q_1 - q_2^2)(h' - r)$.

Indeed, b) follows from b″) and implies a) and c).

3. As a simple corollary of the preceding remark, we shall deduce an interesting result of N. P. Bhatia [1], Satz (3.2), concerning the extreme stability, that is convergence and boundedness of solutions, for the Rayleigh equation:

Suppose that the function e is continuous and bounded. Then for each triple of positive numbers a_1, a_3, a_4, with $a_3 \leqslant a_4$, there is a positive m such that for every $a_2 \in]0, a_1 + m[$ and every functions F and h with

$$a_1 \leqslant h'(x_2) \leqslant a_2, \ a_3 \leqslant F'(x_1) \leqslant a_4, \quad (x_1, \ x_2 \in R), \tag{12}$$

the solutions of (4) *are extremely stable.*

From (12) we derive

$$a_1 q_1 + 1 - a_4 q_2 \leqslant q_1 h' + 1 - q_2 F' < q_1(a_1 + m) + 1 - a_3 q_2. \tag{13}$$

Now we shall choose positive numbers q_1, q_2, r, m, with $q_2^2 < q_1$, such that

$$(q_1(a_1 + m) + 1 - a_3 q_2)^2 \leqslant 4(q_1 - q_2^2)(a_1 - r). \tag{14}$$

Putting $q_1 = (a_1 + m)^{-1}$, the last inequality is equivalent to

$$(a_3^2 + 4a_1 - 4r)q_2^2 - 4a_3 q_2 + \frac{4(m + r)}{a_1 + m} \leqslant 0.$$

If we decrease r, and in case of need m, we may admit that the number

$$q_2 = \left\{2a_3 - \left[4a_3^2 - \frac{4(m + r)(a_3^2 + 4a_1 - 4r)}{a_1 + m}\right]^{1/2}\right\}(a_3^2 + 4a_1 - 4r)^{-1}$$

s real and verifies $q_2^2 < q_1$ and $q_2 < (a_1 q_1 + 1)a_4^{-1}$. After this choosing of the above numbers, (14) is satisfied. From (12), (13) and (14) we conclude the accomplishment of $b'')$, thus the solutions of (4) are convergent. The boundedness of solutions follows from a theorem of G. H. Reuter [5]. Thereby, the result of N. P. Bhatia is proved.

4. Using the machinery developed in the proof of Theorem 1, we shall establish some properties of solutions in certain special cases.

THEOREM 2. *If* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ *and* $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ *are bounded solutions of* (1) *and if there exist positive numbers* q_1, q_2, r, *such that* $q_2^2 < q_1$ *and the inequalities* a) *and* b) *of Theorem* 1 *hold, then*

$$x_i(t) - y_i(t) \to 0 \text{ as } t \to +\infty. \quad (i = 1, 2).$$

Indeed, we may apply Theorem 1 since the requirement c) we may derive from the continuity of X_{ij} and from the boundedness of solutions x and y.

Corollary 1. *If the functions* X_i *do not depend on t and there exist positive numbers* q_1, q_2, r, *with* $q_2^2 < q_1$, *such that the inequalities a) and b) of Theorem* 1 *are fulfiled, then the autonomous system*

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2), \ \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2) \tag{1'}$$

cannot have nonconstant periodic solutions.

For that, let $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ be a nonconstant periodic solution of (1'). Then, in virtue of well known theorem of Bendixon, the limited by corresponding to x trajectory internal region contains at the least one point (x_1^0, x_2^0) in which

$X_1(x_1^0, x_2^0) = X_2(x_1^0, x_2^0) = 0$. By Theorem 2, for the solution $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix}$ of (1′) we have $x_1(t) = x_1^0$ and $x_2(t) = x_2^0$. This is a contradiction.

5. In the conditions of Theorem 1, with $X_1(0, 0) = X_2(0, 0) = 0$, all prolongable to $+\infty$ solutions of the autonomous system (1′) tend to trivial solution when $t \to +\infty$. Applying this to the following system, which is of interest in the theory of automatic regulation,

$$\dot{x}_1 = f(x_1) + bx_2, \; \dot{x}_2 = g(x_1) + dx_2, \tag{15}$$

with $f(0) = g(0) = 0$ and b and d real numbers, we obtain:

Corollary 2. *If there exist positive numbers q_1, q_2, r, with $q_2^2 < q_1$, such that*

a‴) $q_2 b - d \geqslant 0$,

b‴) $(-q_2 f' - q_1 b + g' + q_2 d)^2 \leqslant 4(q_1 - q_2^2)(df' - bg' - r)$,

c‴) *the function* $-q_1 f' + q_2 g'$ *is upper bounded, then all prolongable to* $+\infty$ *solutions of* (15) *tend to zero when* $t \to +\infty$.

6. *Corollary* 3. *If*: α) *the functions X_1 and X_2 are periodic with respect to the first argument with a common period T*, β) *there exist positive numbers q_1, q_2, r, with $q_2^2 < q_1$ for which the assumptions a) and b) of Theorem* 1 *are fulfiled*, γ) *all solutions of* (1) *are prolongable to* $+\infty$, *and* δ) *the system* (1) *possesses a bounded solution, then system* (1) *has a unique T-periodic solution.*

Indeed, by a theorem of J. L. Massera [2] and by the conditions α), γ) and δ), it follows the existence of a T-periodic solution. Its uniqueness is a consequence of Theorem 2.

Corollary 4. *Suppose that the functions X_1 and X_2 are almost periodic with respect to the first argument. If the condition* β) *of Corollary* 3 *holds and* (1) *has at the least one almost periodic solution, then that solution is unique.*

To prove this Corollary we take account of boundedness of an almost periodic function, of Theorem 2 and of the remark in Section I.

7. Theorem 3. *Suppose that the functions X_1 and X_2 are periodic with respect to the first argument. If the system* (1) *has at the least one periodic solution x and there exist positive numbers q_1, q_2, with $q_2^2 < q_1$, such that $q_2 X_{12} - X_{22} > 0$ and $(-q_2 X_{11} - q_1 X_{12} + X_{21} + q_2 X_{22})^2 < 4(q_1 - q_2^2)(X_{11}X_{22} - X_{12}X_{21})$, then x is the single periodic solution of* (1) *and all other prolongable to $+\infty$ solutions tend to x as $t \to +\infty$.*

Let y be another periodic solution of (1) and T the common period of x and y. We observe that the function $u_{1,2}(s, t)$ from the left side of (11), with the functions Y_{ij} written for x, y and $z = x - y$, is negative and T-periodic with respect to t, hence for any $s \in [0, 1]$ and $t \in R$ we have $u_{1,2}(s, t) \leqslant -u_0$, where

$$-u_0 = \max_{(s,t)\in[0,1]\times[0,T]} u_1(s, t) < 0.$$

Using the arguments from the proof of Theorems 1 and 2, and the remark of Section I, we obtain $x = y$.

Example. Consider the system

$$\dot{x}_1 = h(x_2) - F(x_1) + e_1(t), \; \dot{x}_2 = -g(x_1) + e_2(t), \tag{16}$$

where the functions $e_i : R \to R$, $(i = 1;2)$, are continuous and T-periodic, and the functions $F, g, h : R \to R$ are given by the equalities:

$$F(x_1) = 2\left(2x_1 + \frac{x_1^3}{3}\right), \; g(x_1) = 2x_1 + \frac{x_1^3}{3}, \; h(x_2) = x_2\left(1 + \frac{0{,}2}{1 + x_2^2}\right).$$

According to a theorem of W. Müller [3] and to the well known Brouwer fixed point theorem, the system (16) possesses at the lest one T-periodic solution. Taking $q_1 = 3$ and $q_2 = 1/2$, we see that all requirements of Theorem 3 are fulfiled, hence (16) has exactly one T-periodic solution.

(Received September 15, 1969)

REFERENCES

1. Bhatia N. P., *Anwendung der direkten Methode von Ljapunov zum Nachweis der Beschränktheit und der Stabilität der Lösungen einer Klasse nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung*, „Abhandl. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys. und Techn.", **5** (1961), Akademie-Verlag, Berlin, 1962.
2. Massera J. L., *The Existence of Periodic Solutions of Systems of Differential Equations*, „Duke Math. Journ.", **17** (1950), 457—475.
3. Müller W., *Beschränktheitssätze für die Lösungen eines Systems von zwei Differentialgleichungen*, „Wissen. Zeitschr. der F. Schiller Univ. Jena, Math.-Nat. Wiss. Reihe", **14** (1965), 427—430.
4. Muntean I., *A Note on the Convergence of Solutions of a System of Differential Equations* „Aequationes Mathematicae", III (1970), 128—130.
5. Reuter G. E. R., *Boundedness Theorems for Nonlinear Differential Equations of the Second Order, II*, „Journ. of the London Math. Soc.", **27** (1952), 48—58.
6. Waltman P. and T. F. Bridgland Jr., *On Convergence of Solutions of the Forced Liénard Equation*, „Journ. of Math. and Phys.", **44** (1965), 284—287.
7. Yoshizawa, T., *On the Convergence of the Nonlinear Differential Equations*, „Mem. Coll. Sci. Univ. of Kyoto, Ser. A, Math.", **28** (1954), 143—151.

ASUPRA CONVERGENȚEI SOLUȚIILOR SISTEMELOR DIFERENȚIALE NELINIARE

(Rezumat)

Pentru convergența soluțiilor sistemului diferențial

$$\dot{x}_1 = X_1(t, x_1, x_2), \qquad \dot{x}_2 = X_2(t, x_1, x_2) \tag{1}$$

se dau condiții explicite exprimate prin inegalități asupra derivatelor parțiale ale membrilor drepți. Ca aplicații, se recapătă criteriul lui P. Waltman și T. F. Bridgland Jr. de convergență a soluțiilor ecuației lui Liénard, se stabilește un rezultat nou privind convergența soluțiilor ecuației lui Rayleigh, se studiază unicitatea soluției periodice (sau aproape periodice) pentru (1) și se deduc criterii de stabilitate globală pentru sisteme (1) autonome.

О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(Р е з ю м е)

Для сходимости решений дифференциальной системы

$$\dot{x}_1 = X_1(t, x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = X_2(t, x_1, x_2) \tag{1}$$

даются явные условия, выраженные посредством неравенств, содержащих некоторые частные производные правых частей. В качестве применений получается критерий П. Уолтмена и Т. Ф. Бридгленда младшего для сходимости решений уравнения Лиенара, устанавливается новый результат, касающийся сходимости решений уравнения Релейя, изучается единственность периодического (или почти периодического) решения для (1) и выводятся некоторые критерии устойчивости в целом для автономных систем (1).

NONLINEAR FUNCTIONAL EQUATIONS IN BANACH SPACES

by

E. KOLOZSI

Let E be a Banach space and E his dual. In this paper we shall study the nonlinear equation

$$A(u) = f \tag{1}$$

where A is an operator mapping $\mathfrak{D}(A)$ into E^*. In the sequel we assume that the subset $\mathfrak{D}(A)$ is a linear manifold dense in E.

Denote by $DA(u, h)$ the Gateaux-Differential [13] of A in the point u.

DEFINITION 1. A is called J-potential if there is a linear operator $J: E \to E$ with $\mathfrak{D}(J) \subseteq \mathfrak{D}(A)$ and $R(J)$ dense in E, and a functional $\varphi: E \to R$ such that

$$D\varphi(u, h) = \langle A(u), J(h)\rangle \qquad u, h \in \mathfrak{D}(A)$$

If $J \equiv I$ we have the notion of I-potential (or simply potential) operator which was studied by M. M. Vainberg [13] and others.

DEFINITION 2. A is called J-monoton if there is an operator $J: E \to E$, with $\mathfrak{D}(J) \subseteq \mathfrak{D}(A)$ such that

$$\langle A(u) - A(v), J(u - v)\rangle \geqslant 0 \quad u, v \in \mathfrak{D}(\mathrm{A})$$

If the equality holds if and only if $u \equiv v$, A is strictly J-monoton.

This notion is an extension of monoton operators introduced by P. I. Kaciurovski [7] and developed by G. I. Minty [12], F. E. Browder and others.

A similar notion is that of duality mapping which was used by F. E. Browder [2], [3], [4], F.E.Browder—D. G. Figueiredo [5] in problems of fixed points, also by P. I. Kaciurovski [8].

If the operator A is differentiable and $DA\,(u, h)$ is linear, we have the following theorem.

THEOREM 1. *If the following conditions hold*

i) *There exists a linear differential $AD(u, h)$ in all points of the sphere $S: \|u - u_0\| < r$.*

ii) *There is a linear operator $J: E \to E$ with $\mathfrak{D}(J) \subseteq \mathfrak{D}(A)$ such that*
iii) *The functional $\langle DA(u, h_1), J(h_2)\rangle$ is continuous for all $u \in S$*

$$\langle DA(u, h_1), J(h_2)\rangle = \langle DA(u, h_2), J(h_1)\rangle \qquad u, h_1, h_2 \in S$$

Then A is a J-potential operator.

PROOF. We shall prove that the functional

$$\varphi(u) = \int_0^1 \langle A(u_0 + t(u - u_0)), J(u - u_0)\rangle \, dt + \varphi_0; \qquad \varphi(u_0) = \varphi_0$$

satisfies condition

$$D\varphi(u, h) = \langle A(u), J(h)\rangle.$$

Indeed, let $u, u + h \in S$, then

$$\varphi(u+h) - \varphi(u) =$$

$$= \int_0^1 [\langle A(u_0 + t(u - u_0 + h)), J(u - u_0 + h)\rangle - \langle A(u_0 + t(u - u_0)), J(u - u_0)\rangle] \, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle A(u_0 + t(u - u_0) + th), J(h)\rangle \, dt +$$

$$+ \int_0^1 \langle A(u_0 + t(u - u_0) + th) - A(u_0 + t(u - u_0)), J(u - u_0)\rangle \, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle A(u_0 + t(u - u_0) + th), J(h)\rangle dt + \int_0^1 dt \int_0^t \frac{\partial}{\partial s} \langle A(u_0 + t(u - u_0) + sh), J(u - u_0)\rangle ds =$$

$$= \int_0^1 \langle A(u_0 + t(u - u_0) + th), J(h)\rangle dt + \int_0^0 dt \int_0^t \langle DA(u_0 + t(u - u_0) + sh, u - u_0), J(h)\rangle ds =$$

$$= \int_0^1 \langle A(u_0 + t(u - u_0) + th), J(h)\rangle \, dt + \int_0^1 ds \int_s^1 \langle DA(u_0 + t(u - u_0) + sh, u - u_0), J(h)\rangle \, dt =$$

$$= \int_0^1 \langle A(u_0 + t(u - u_0) + th), J(h)\rangle \, dt +$$

$$+ \int_0^1 \langle A(u_0 + (u - u_0) + sh) - A(u_0 + s(u - u_0) + sh), J(h)\rangle \, ds =$$

$$= \int_0^1 \langle A(u + sh), J(h)\rangle \, ds.$$

Since $\langle A(u+sh), J(h)\rangle$ is continuous,

$$\varphi(u+h)-\varphi(u)=\langle A(u+\tau h), J(h)\rangle \qquad 0<\tau<1.$$

Hence

$$\varphi(u+th)-\varphi(u)=\langle A(u+\tau th), J(th)\rangle.$$

Then

$$\frac{1}{t}[\varphi(u+th)-\varphi(u)]=\langle A(u+\tau th), J(h)\rangle.$$

Let $t\to 0$; we have

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\varphi(u+th)-\varphi(u)]=\langle A(u), J(h)\rangle$$

This theorem is an extension of Vainbergs theorem [13] for potential operators.

Remark. This theorem holds true when we replace S by an arbitrary convex set $\omega C E$.

DEFINITION 3. The operator A is called hemi-continuous in $\mathfrak{D}(A)$ if for all u, $v\in\mathfrak{D}(A)$ the mapping

$$[0,1]\ni t\to A(u+t(v-u))\in E^*$$

is weakly continuous.

LEMMA 1. *If the following conditions hold*

i) A is hemi-continuous

ii) A *is J-potential on* $\mathfrak{D}(A)$

Then for all $u_1, u_2\in\mathfrak{D}(A)$, *we have*

$$\int_0^1\langle A(u_1+t(u_2-u_1)), J(u_2-u_1)\,dt=\varphi(u_2)-\varphi(u_1).$$

PROOF. Since A is J-potential we have

$$D\varphi(u,h)=\langle\varphi'(u),h\rangle=\langle A(u), J(h)\rangle$$

where $\varphi'(u)$ is the Gateaux derivative of $\varphi(u)$. Using this equality

$$\int_0^1\langle A(u_1+t(u_2-u_1)), J(u_2-u_1)\rangle\,dt=\int_0^1\langle\varphi'(u_1+t(u_2-u_1)), u_2-u_1\rangle\,dt=$$

$$=\int_0^1\frac{\partial}{\partial\tau}\varphi(u_1+\tau(u_2-u_1))\,d\tau=\varphi(u_1+\tau(u_2-u_1))|_0^1=\varphi(u_2)-\varphi(u_1).$$

This proves the lemma.

Remark. If A is strictly J-monoton the equation (1) has at most one solution. Indeed, if there are two solutions u_1 and u_2, then

$$A(u_1) - A(u_2) = 0.$$

Hence

$$\langle A(u_1) - A(u_2), J(u_1 - u_2)\rangle = 0.$$

This equality in the case of strictly J-monoton operators hold if and only if $u_1 \equiv u_2$.

THEOREM 2. *If the operator $A : \mathfrak{D}(A) \to E^*$ is hemi-continuous and if there exists a linear operator $J : E \to E$ such that*

i) $\mathfrak{D}(J) \supseteq \mathfrak{D}(A)$; $\mathrm{R}(J)$ *dense in* E
ii) A *is* J*-potential and* $A(0) = 0$
iii) A *is* J*-monoton*

then, the problem of solving the equation (1) *and the problem of finding the minimum of the functional*

$$\Phi(u) = \int_0^1 \langle A(\mathrm{t}u), J(u)\rangle\,\mathrm{dt} - \langle f, J(u)\rangle \tag{2}$$

are equivalent.

PROOF. Let u, $u + h \in \mathrm{D}(A)$. We have

$$\Phi(u + h) - \Phi(u) = \int_0^1 \langle A(\mathrm{t}(u + h)), J(u + h)\rangle\,\mathrm{dt} - \int_0^1 \langle A(\mathrm{t}u), J(u)\rangle \mathrm{dt} - \langle f, J(h)\rangle =$$

$$\int_0^1 \langle A(\mathrm{t}(u + h)), J(h)\rangle\,\mathrm{dt} + \int_0 \langle A(\mathrm{t})u + h)) - A(\mathrm{t}u), J(u)\rangle\,\mathrm{dt} - \langle f, J(h)\rangle$$

From the lemma 1 it follows

$$\Phi(u + h) - \Phi(u) = \int_0^1 \langle A(u + \mathrm{t}h), J(h)\rangle\,\mathrm{dt} - \langle f, J(h)\rangle \tag{3}$$

If u_0 is a solution of the equation (1), then

$$\Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) = \int_0^1 \langle A(u_0 + \mathrm{t}h) - A(u_0), J(h)\rangle\,\mathrm{dt} =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t}\langle A(u_0 + \mathrm{t}h) - A(u_0), J(\mathrm{t}h)\rangle\,\mathrm{dt} \geqq 0$$

This last inequality follows from the J-monotonicity of the A. Therefore u_0 minimizes the functional (2).

Conversely, if we assume that for u_0 the functional (2) has minimum, then

$$\frac{d}{dt}\Phi(u_0+th)\Big|_{t=0} = D\Phi(u_0, h) = 0$$

We have

$$D\Phi(u, h) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\left[\int_0^1\langle A(t(u+\tau h)), J(u+\tau h)\rangle dt - \int_0^1\langle A(tu), J(u)\rangle dt - \langle f, J(\tau h)\rangle\right].$$

Again by lemma 1

$$D\Phi(u, h) = \lim_{\tau\to 0}\int_0^1\langle A(u+t\tau h)-f, J(h)\rangle dt = \int_0^1\langle A(u)-f, J(h)\rangle dt = \langle A(u)-f, J(h)\rangle$$

Therefore

$$\langle A(u_0)-f, J(h)\rangle = 0$$

Using condition (i)

$$A(u_0)-f=0$$

This proves the theorem.

We shall study now the existence of the minimum of the functional (2). We have the following theorem.

THEOREM 3. *Let operator A be hemi-continuous and J-potential. If there exists a real positive and strictly monotonic function $\gamma(r)$ which is defined for $r \in [0, \infty)$ with $\gamma(0)=0$ and*

$$\gamma(tr) \geqq t^k\gamma(r) \qquad k>1$$

such that

$$\langle A(u)-A(v), J(u-v)\rangle \geqq \gamma(\|J(u-v)\|), \text{ and}$$

$$\|J(h)\| \geqq C\|h\| \quad h\in\mathfrak{D}(J),$$

then

1) *There is a lower bound of the functional* (2).
2. *Every minimizing sequence is convergent in E.*

Remark. Take for exemple $\gamma(r)=cr^2$, $c>0$. In this case F. E. Browder-W. V. Petryschyn [6] call the operator A strongly monoton. This case was disscussed by the author in [9].

Proof. of theorem 3. We shall prove the first assertion. We have

$$\Phi(u) = \int_0^1\langle A(tu), J(u)\rangle dt - \langle f, J(u)\rangle = \int_0^1\frac{1}{t}\langle A(tu), J(tu)\rangle dt - \langle f, J(u)\rangle \geqq$$

$$\geqq \int_0^1\frac{1}{t}\gamma(\|J(tu)\|)dt - \|f\|\cdot\|J(u)\| \leqq C\gamma(\|J(u)\|) - \|f\|\cdot\|J(u)\|$$

Therefore $\Phi(u)$ is bounded if the difference in the right hand side of inequality is bounded.

Since from definition of γ follows that $\frac{\gamma(r)}{r} \to \infty$; $r \to \infty$ we have

$$C\gamma(||J(u)||) - ||f|| \cdot ||J(u)|| \geqq 0 \quad \text{if} \quad ||J(u)|| > R$$

For $||J(u)|| \leqq R$ we have

$$C\gamma(||J(u)||) - ||f|| \cdot ||J(u)|| \geqq C\gamma(||J(u)||) - R||f||$$

Hence

$$\Phi(u) \leqq - R\,||f|| \qquad \text{for every } u \in \mathfrak{D}(A)$$

To prove the second assertion let $\{u_n\}$ a minimizing sequence

$$\Phi(u_n) = d + \varepsilon_n, \ \ \varepsilon_n > 0 \text{ and } \varepsilon_n \to 0; \ \mathrm{n} \to \infty; \ d = \inf \Phi(u); \ u \in \mathfrak{D}(A).$$

Let

$$\rho(u, v) = \frac{1}{2}\Phi(u) + \frac{1}{2}\Phi(v) - \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{1}{2}\left[\Phi(u) - \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\Phi(v) - \Phi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right]$$

or

$$\rho(u, v) = \frac{1}{2}\left[\Phi(u) - \Phi\left(u + \frac{h}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\Phi(u + h) - \Phi\left(u + \frac{h}{2}\right)\right]$$

where we put $v = u + h$.

Using (3)

$$\rho(u, v) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left\langle A\left(u + \mathrm{t}\left(\frac{h}{2}\right)\right), J\left(\frac{h}{2}\right)\right\rangle \mathrm{dt} + \left\langle f, J\left(\frac{h}{2}\right)\right\rangle +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^1 \left\langle A\left(u + \frac{h}{2} + \mathrm{t}\,\frac{h}{2}\right), J\left(\frac{h}{2}\right)\right\rangle \mathrm{dt} - \left\langle f, J\left(\frac{h}{2}\right)\right\rangle =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left\langle A\left(u + \mathrm{t}\,\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) - A\left(u + \mathrm{t}\,\frac{h}{2}\right), J\left(\frac{h}{2}\right)\right\rangle \mathrm{dt} \geqq$$

$$\geqq \frac{1}{2}\int_0^1 \gamma\left(\left\|J\left(\frac{h}{2}\right)\right\|\right) = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{1}{2}\,||J(h)||\right) = \frac{1}{2}\gamma\left(\frac{1}{2}\,||J(v - u)||\right).$$

This implies

$$||J(v - u)|| \leqq 2\overset{-1}{\gamma}(2\rho(u, v)).$$

From definition of minimizing sequence, for every $\varepsilon_0 > 0$ there is a number n_0 such that

$$\Phi(n_n) < d + \varepsilon, \quad \Phi(u_n) < d + \varepsilon \quad n, \ m \geqq n_0$$

Then

$$\rho(n_n, u_m) < \frac{1}{2}(d + \varepsilon) + \frac{1}{2}(d + \varepsilon) - d) = \varepsilon,$$

Since

$$||J(h)|| \geqq C||h||,$$

$$||u_n - u_m|| \leqq K||J(u_n - u_m)|| \leqq 2 K\overset{-1}{\gamma}(2\rho(u_n, u_m)) < \varepsilon_1$$

when $n, m \geqq N_0$. In this way, we proved that the constructed sequence is fundamental and because E is a Banach space, $\{u_n\}$ is convergent t.e. $\{u_n\} \to u_0 \in E$. If $u_0 \in \mathfrak{D}(A)$ then in wiev of theorem 1. $Au_0 = f$. If $u_0 \notin \mathfrak{D}(A)$ we have a solution in the sense of the distribution theory. These solutions define an extension of A.

Now we shall prove a suficient condition of J-monotonicity in the case of differentiable operators.

LEMMA 2. *If A is differentiable on $\mathfrak{D}(A)$ and*

$$\langle DA(u, h), J(h)\rangle \geqq \gamma(||h||)$$

where $\gamma(r)$ denotes a real positive function which is defined for $0 \leqq r \leqq +\infty$ then

$$\langle A(u+h) - A(u), J(h)\rangle \geqq \gamma(||h||).$$

PROOF. Let $u_1, u_2 \in \mathfrak{D}(A)$, $t \geqq 0$ and let

$$f(t) = \langle A(u_2 + t(u_1 - u_2), J(u_1 - u_2)\rangle.$$

Then

$$\langle A(u_1) - A(u_2), J(u_1 - u_2)\rangle = f(1) - f(0).$$

For $0 < \xi < 1$ we have

$$\langle A(u_1) - A(u_2), J(u_1 - u_2)\rangle = \frac{d}{dt} f(t)\Big|_{t=\xi} = \frac{d}{dt}\langle A(u_2 + t(u_1 - u_2)), J(u_1 - u_2)\rangle\Big|_{t=\xi} =$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\langle A(u_2 + \xi(u_1 - u_2) + \Delta s(u_1 - u_2)), J(u_1 - u_2)\rangle - \langle A(u_2 + \xi(u_1 - u_2), J(u_1 - u_2)\rangle}{\Delta s} =$$

$$= \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\langle A(u + \Delta s \cdot h), J(h)\rangle - \langle A(u), J(h)\rangle}{\Delta s} = \langle DA(u, h), J(h)\rangle \geqq$$

$$\geqq \gamma(||h||) = \gamma(||u_1 - u_2||)$$

where $u = u_2 + \xi(u_1 - u_2)$ and $h = u_1 - u_2$.

Remark. In particular when the Gateaux differential $DA(u, h)$ of the A is positive A is monoton. This property was proved by G. I. Minty [12].

By lemmas 1 and 2 we have the following theorem.

THEOREM 4. *If the following conditions hold*

i) *For every* $u \in \mathfrak{D}(A)$ *there exists a linear differential* $DA(u,h)$

ii) *There is a linear operator* $J: E \to E$ *such that* $\mathfrak{D}(A) \subseteq \mathfrak{D}(J)$ *and* $R(J)$ *is dense in* E

iii) $\langle DA(u, h_1), J(h_2)\rangle = \langle DA(u_1h_2), J(h_1)\rangle \quad u, h_1, h_2 \in \mathfrak{D}(A)$

iiii) $\langle DA(u, h), J(h)\rangle \geqq \beta^2\|J(h)\|^2 \geqq \gamma^2\|h\|^2$

then theorems 2 *and* 3 *hold.*

Note that this theorem was proved by A. D. Liasko [11] in the case of Hilbert space.

(Received Oktober 3, 1969)

REFERENCES

1. Browder F. E., *Problèmes non-linéaires.* „Presses de l'Univ. de Montreal" (1966).
2. Browder F. E., *Fixed points theorems for nonlinear semicontractive mappings in Banach spaces.* „Arch. Rat. Mech. and Analysis", **21** (1966), 259—270.
3. Browder F. E., *On the theorem of Beurling and Livingstone.* „Canad. Journal of Math.", **XVII**, nr. 3 (1965), 367—372.
4. Browder F. E., *Convergence of approximations to fixed points of non-expansive non-linear mappings in Banach spaces.* „Arch. Rat. Mech. and Analysis", **24** (1967), 82—90.
5. Browder F. E. - Figueiredo D. G., *J-monoton nonlinear operators in Banach spaces.* „Indigationes Mathematicae", **XXVIII**, f. 4 (1966), 412—420.
6. Browder F. B. - Petryschyn W. V., *Construction of Fixed Points of Nonlinear Mappings in Hilbert Space.* „Journal of Math. Analysis and Appl.", **20** (1967), 197—228.
7. Kaciurovski P. I., *Monotonnîe nelineinîe operatorî v Banachovîh prostranstvah.* „D.A.N. S.S.S.R.", **163**, nr. 3 (1965), 559—562.
8. Kaciurovski P. I., *O monotonnîh operatorah i vîpuklîh funkționalah.* „Uspehi Mat. Nauk.", **XV**, v. 4(94), 1960, 213—215.
9. Kolozsi E. - Kolumbán J., *Ecuații cu operatori potențiali și monotoni.* „Studii și Cerc. de Mat." (to appear).
10. Langenbach A., *O primenenii variaționovo prințipa k nekotorîm nelineinîm uravneniiam.* „D.A.N. S.S.S.R.", **121**, nr. 2(1958).
11. Liașko A. D., *O variationom metode dlia nelineinîh operatornîh uravnenii.* „Funkț. Ana liz. teoria funkții. Zbornik", **3** (1966) 95—101.
12. Minty G. I., *Monoton (nonlinear) operators in Hilbert Space.* „Duke Mathemat. Journal", **29**, nr. 3 (1962), 341—346.
13. Vainberg M. M., *Variaționnîe metodî issledovania nelineinîh operatorov.* G.I.T.T.L., Moskva, 1956.

ECUAȚII FUNCȚIONALE NELINIARE ÎN SPAȚII BANACH

(Rezumat)

În lucrare se studiază rezolvabilitatea ecuației funcționale

$$A(u) = f$$

unde A este un operator definit pe o varietate liniară $D(A)$ densă în spațiul Banach E și cu imaginea în spațiul E^*, folosind metoda variațională. Se dau condiții care asigură existența și unicitatea soluției. Rezultatele obținute constituie o generalizare a rezultatelor lui M. M. Veinberg [13], A. D. Liasko [11] și G. I. Minty [12].

НЕЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Резюме)

В статье изучается разрешимость функционального уравнения

$$A(u) = f$$

где A — оператор, определённый на множестве D(A), линейном и плотном в Банаховом пространстве E и со значениями в пространстве E*, применяя вариационный метод. Даются условия, обеспечивающие существование и единственность решения. Полученные результаты являются обобщением результатов М.М. Вейнберга [13], А. Д. Ляшко [11] и Г. И. Минти [12].

METODA MONTE-CARLO ÎN EVALUAREA FUNCȚIEI DENSITATE DE PROBABILITATE A UNEI VARIABILE ALEATOARE

de

ELENA FRĂȚILĂ

Problema evaluării funcției densitate de probabilitate a unei variabile aleatoare a preocupat, mai ales în ultima vreme, o serie de autori: E. Parzen (1962), M.S. Bartlett (1963), I. Văduva (1963), J. Chambers (1967) și alții, aceasta fiind una din problemele capitale ale statisticii matematice.

E. Parzen [5], I. Văduva [6], M.S. Bartlett [1], folosesc de fapt un procedeu Monte-Carlo pentru evaluarea funcției de densitate. J. Chambers [2], construiește un algoritm pentru evaluarea funcției de densitate folosind funcția caracteristică și transformata Fourier.

În acest articol vom căuta să evaluăm funcția de densitate prin aproximarea funcției caracteristice cu ajutorul unei selecții și apoi aplicarea transformatei Fourier. Toate procedeele prezentate sînt de tip Monte-Carlo.

1. *Estimarea funcției caracteristice.* Fie ξ o variabilă aleatoare a cărei densitate de probabilitate $\rho(x)$, $x \in I$, I interval finit, dorim să o evaluăm și $x_1, \ldots, x_n$ o selecție asupra acesteia, $x_i \in I$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Funcția caractristică a lui ξ este

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_I e^{itx}\, dF(x)$$

F fiind funcția de repartiție.

O funcție de aproximare a lui $\varphi(t)$ evaluată cu ajutorul selecției date este

$$\varphi_{n\ m}(t) = \sum_{j=0}^{m} \frac{(it)^j}{j\,!} a_j \tag{1}$$

definită pentru orice t finit, a_j fiind momentul de selecție de ordin j.

Media de selecție

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{itx_j} \tag{2}$$

a variabilei aleatoare $e^{it\xi}$

este de asemenea o funcție de aproximare pentru $\varphi(t)$, rezultînd din definirea lui φ ca o valoare medie.

TEOREMA 1. *a) Funcţia* $\varphi_{n,m}(t)$ *este un estimator asimptotic nedeplasat pentru* $m \to \infty$, *a funcţiei caracteristice* $\varphi(t)$, *în ipoteza că variabila aleatoare corespunzătoare admite momente finite de orice ordin.*

b) Funcţia $\varphi_n(t)$ *este un estimator nedeplasat şi consistent al lui* $\varphi(t)$.

Demonstrarea teoremei este imediată, aplicînd lui (1), (2), operatorul E şi ţinînd cont de proprietăţile acestuia. Consistenţa lui $\varphi_n(t)$ rezultă din calculul dispersiei $D^2\varphi_n(t)$.

O altă funcţie de aproximare a lui $\varphi(t)$ obţinută pe baza selecţiei date este:

$$\bar{\varphi}_n(t) = \int_I e^{itx}\, dF_n(x) \tag{3}$$

$F_n(x)$ fiind funcţia de repartiţie de selecţie. Integrala din (3) se calculează astfel: Se ordonează crescător valorile de selecţie x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, $x_1, \ldots, x_n$ şi fie $I = [a, b]$, $a = x_0$, $b = x_{n+1}$. Deoarece $F_n(x)$ este o funcţie în scară, constantă pe intervalele $[a, x_1)$, (x_1, x_2), $\ldots$, $(x_n, b]$ avem:

$$\bar{\varphi}_n(t) = e^{ita}[F_n(a+0) - F_n(a)] + \sum_{j=1}^{n} e^{itx_j}[F_n(x_j+0) - F_n(x_j-0)] + $$
$$+ e^{itb}[F_n(b) - F_n(b-0)].$$

unde $F_n(x) = \frac{\nu(x)}{n}$, $\nu(x)$ fiind numărul valorilor de selecţie mai mici decît x.

TEOREMA 2. *Funcţia* $\bar{\varphi}_n(t)$ *converge uniform relativ la* t, *cu probabilitate* 1, *pentru* $n \to \infty$, *la* $\varphi(t)$, *cu condiţia* $F(x) \geqslant F_n(x)$, *pentru orice* $x \in R$.

Demonstraţie.

$$|\varphi(t) - \bar{\varphi}_n(t)| \leqslant \int_I |d(F(x) - F_n(x))| = \int_I d|F(x) - F_n(x)|.$$

Ultima egalitate rezultă din faptul că F şi F_n sînt funcţii de repartiţie, $F - F_n \geqslant 0$ şi $F - F_n$ derivabilă pe intervalele (x_j, x_{j+1})

Atunci

$$|\varphi(t) - \bar{\varphi}_n(t)| \leqslant \{|F(x) - F_n(x)|\}_{x=b}^{x=a} \quad \text{pentru orice } t \text{ real.}$$

Dar

$$|F(x) - F_n(x)|_{x\in R} \leqslant \operatorname*{supr}_{x\in R} |F(x) - F_n(x)|$$

prin urmare:

$$-\operatorname*{supr}_{x\in R} |F(x) - F_n(x)| \leqslant \varphi(t) - \bar{\varphi}(t) \leqslant \operatorname*{supr}_{x\in R} |F(x) - F_n(x)|.$$

Iar la limită

$$\lim_{n\to\infty} (-\operatorname*{supr}_{n\in R} |F(x) - F_n(x)|) < \lim_{n\to\infty} (\varphi(t) - \bar{\varphi}_n(t)) < \lim_{n\to\infty} \operatorname*{supr}_{x\in R} |F(x) - F_n(x)|.$$

Conform Teoremei lui Glivenko [4]:

$$P\,(\lim_{n\to\infty} \operatorname{supr}_{x\in R} |F(x) - F_n(x)| = 0) = 1$$

şi de asemenea

$$P(\lim_{n\to\infty} (-\operatorname{supr}_{x\in R} |F(x) - F_n(x)|) = 0) = 1$$

evenimentele considerate in cele două probabilităţi fiind echivalente.

Pe de altă parte rezultă din teoria şirurilor, că:

$$\lim_{n\to\infty} (\varphi(t) - \bar{\varphi}_n(t)) = 0$$

în sensul convergenţei considerate. De fapt evenimentele

$$A_1 = \lim_{n\to\infty} (-\operatorname{supr}_{x\in R} |F(x) - F_n(x)|) = 0$$

$$B = \lim_{n\to\infty} (\varphi(t) - \bar{\varphi}_n'(t)) = 0$$

$$A_2 = \lim_{n\to\infty} \operatorname{supr}_{x\in R} |F(x) - F_n(x)| = 0$$

se găsesc în ordonarea $A_1 \subset B \subset A_2$. Cum $P(A_1) = P(A_2) = 1$, rezultă $P(B) = 1$ Adică

$$P(\lim_{n\to\infty} (\varphi(t) - \bar{\varphi}_n(t)) = 0) = 1$$

şi teorema este demonstrată.

Eroarea estimatorului (1) se poate evalua în medie patratică, în condiţiile teoremei 1, şi se obţine:

$$E\{|\varphi(t) - \varphi_{n,m}(t)|^2\} \leqslant \frac{1}{n} Q_{2m}(t) + \frac{t^{2m+2}}{(m+1)!} M_{2m+2}$$

unde

$$Q_{2m}(t) = \sum_{j=1}^{m} \frac{|t|^{2j}}{j!^2} (M_{2j} - M_j)^2 + \sum_{\substack{j,l=1\\ j\neq l}}^{m} \frac{|t|^{j+l}}{j!\,l!} Da_j Da_l.$$

În cazul estimatorului $\varphi_n(t)$ pentru care $D^2\varphi_n(t) = \frac{1}{n} D^2 e^{it\xi}$, rezultă conform procedeului Monte-Carlo [3], că eroarea cu probabilitate mai mare ca $1 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ şi arbitrar de mic, nu depăşeşte $De^{it\xi}(\varepsilon n)^{-1/2}$.

2. *Estimarea funcţiei de densitate* $\rho(x)$ cu ajutorul estimatorilor (1), (2) sau (3) se face prin formula de inversare [4]:

$$\rho(x) = \frac{1}{2\pi} \int_R e^{-itx} \varphi(t)\, dt$$

care are sens, dacă $|\varphi(t)|$ este integrabilă pe R. Din (1) se obţine:

$$\rho_{n,m,c}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{m} \frac{a^j}{j!} \int_{-c}^{c} (it)^j e^{-itx}\, dt \tag{4}$$

unde c este suficient de mare, dar finit.

TEOREMA 3. Funcţia $\rho_{n,m,c}(x)$ este o estimaţie asimptotic nedeplasată pentru $m, c \to \infty$, a lui $\rho(x)$ în orice punct x în care aceasta există, cu condiţia ca variabila aleatoare corespunzătoare lui $\rho(x)$ să admită momente finite de orice ordin.

Demonstraţie.

$$E\rho_{m,n,c}(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{j=0}^{m}\int_{-c}^{c}\frac{(it)^j}{j!}e^{-itx}M_j\,dt$$

Iar la limită

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ c\to\infty}} E\rho_{m.n,c}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx}\varphi(t)\,dt = \rho(x)$$

deoarece în ipoteza că M_j există şi este finit pentru orice j întreg, pozitiv:

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{j=0}^{m}\frac{(it)^j}{j!}M_j = \varphi(t).$$

Estimatorul (2) prin aplicarea formulei de inversiune nu permite evaluarea lui $\varphi(x)$, deoarece integrala

$$\int_R e^{-it(x-x_j)}dt$$

nu există.

Din (3), cu condiţia $|\overline{\varphi}_n(t)|$ integrabilă pe R, se obţine:

$$\overline{\rho}_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_R e^{-itx}\overline{\varphi}_n(t)\,dt \tag{5}$$

TEOREMA 4. *Funcţia* $\overline{\rho}_n(x)$ *converge cu probabilitate* 1, *la* $\rho(x)$ *în orice punct* $x \in I$.

Demonstraţie. Se observă că

$$|\rho(x) - \overline{\rho}_n(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_R |\varphi(t) - \overline{\varphi}_n(t)|\,dt,$$

adică

$$-\frac{1}{2\pi}\int_R |\varphi(t) - \overline{\varphi}_n(t)|\,dt \leqslant \rho(x) - \overline{\rho}_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_R |\varphi(t) - \overline{\varphi}_n(t)|\,dt$$

Din teorema 2 rezultă că $[\varphi(t) - \overline{\varphi}_n(t)]$ converge cu probabilitate 1, la zero, pentru $n \to \infty$, prin urmare $\rho(x) - \overline{\rho}_n(x)$ converge cu probabilitate 1 la zero, şi teorema este demonstrată.

3. Un *procedeu Monte-Carlo pentru evaluarea lui* $\overline{\rho}_n(x)$. Din faptul că $|\overline{\varphi}_n(t)|$ este integrabilă pe R, adică:

$$\int_R |\overline{\varphi}_n(t)|\,d = \lambda,\ \lambda \text{ finit},$$

presupunînd $\lambda \neq 0$, funcţia $\frac{1}{\lambda}|\varphi_n(t)|$ se poate considera ca o densitate de probabilitate a unei variabile aleatoare ξ definită pe R. Iar

$$\bar{\rho}_n(x) = \frac{\lambda}{2\pi}\int_R e^{-itx}\frac{\bar{\varphi}_n(t)}{|\bar{\varphi}_n(t)|}|\bar{\varphi}_n(t)|\,dt.$$

este valoarea medie a variabilei aleatoare

$$\eta(x,\ \xi) = e^{-ix\xi}\frac{\bar{\varphi}(\xi)}{|\bar{\varphi}_n(\xi)|}.$$

Prin urmare $\bar{\rho}_n(x)$ poate fi evaluat de media de selecţie a variabilei aleatoare $\eta(x,\ \xi)$. Pentru calculul mediei de selecţie, folosind un şir de numere aleatoare $u_1, \ldots u_n$ uniforme pe $[0,\ \lambda]$, prin formula [3]:

$$u_j \equiv \int_{-\infty}^{Y_j}|\bar{\varphi}_n(t)|\,dt, \quad 1 \leqslant j \leqslant r$$

care se rezolvă faţă de Y_j, se obţine o selecţie asupra variabilei aleatoare ξ. Cu acestea, valoarea medie de selecţie este

$$\bar{\eta}(x) = \frac{1}{r}\sum_{j=1}^{r} e^{-ixY_j}\bar{\varphi}_n(Y_j)\cdot[|\bar{\varphi}_n(Y_j)|)^{-1}$$

Evident această medie de selecţie $\bar{\eta}(x)$ converge pentru $r \to \infty$, în probabilitate la $\bar{\rho}_n(x)$.

(Intrat în redacţie la 21 iunie 1969)

BIBLIOGRAFIE

1. Bartlett. M.S., *Statistical estimation of density functions.* „Sanknya", Ser. A, 1963, 25, 245—254.
2. Chambers, J.M., *On :metods of asymptotic approximation for multivariate distributions.* „Biometrika", 1967, 54, 367.
3. Hammersley, J.M., Handscomb, D.C., *Monte Carlo Methods.* London, 1964.
4. Iosifescu, M., Mihoc, G., Theodorescu, R., *Teoria Probabilităţilor şi statisticamatematică.* Bucureşti, 1966.
5. Parzen E., *On estimation of a probability density fonction and mode.* „Ann. Math. Stat"., 1962, 33, 1065—1067.
6. Văduva, I., *On estimation of the density of a sum of independent variables.* „Com. Acad. R.P.R."., 1963, 13, 583—588.

МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО В ОЦЕНКЕ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ ОДНОГО СЛУЧАЙНОГО ПЕРЕМЕННОГО

(Резюме)

Автор приводит несколько приёмов типа Монте-Карло для оценки функции плотности вероятности одного случайного переменного путём приближения характерной функции на основе селекции и применения трансформанты Фурье. Исследуется ошибка приёмов и сходимость приведённых оценок.

LA MÉTHODE MONTE-CARLO DANS L'ÉVALUATION DE LA FONCTION DENSITÉ DE PROBABILITÉ D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

(Résumé)

L'article a pour but de présenter quelques procédés de type Monte-Carlo pour l'évaluation de la densité de probabilité d'une variable aléatoire par approximation de la fonction caractéristique sur la base d'une sélection et par application de la transformée Fourier. On recherche l'erreur des procédés et la convergence des estimations présentées.

APPROXIMATION PROPERTIES OF A CLASS OF LINEAR POSITIVE OPERATORS

by

D. D. STANCU

1. In our previous paper [6] we introduced and studied a new linear operator $P_m^{[\alpha]}$ $(m = 1, 2, \ldots)$, depending on a parameter α, mapping the linear space of functions defined and bounded on $[0, 1]$ into the linear space of polynomials $\mathfrak{P}_m$ of degree m, namely for any f defined and bounded on $[0, 1]$ this operator was defined in the following way

$$(P_m^{[\alpha]} f)(x) = \sum_{k=0}^{m} w_{m,k}^{[\alpha]}(x) f\left(\frac{k}{m}\right), \tag{1}$$

where

$$w_{m,k}^{[\alpha]}(x) = \binom{m}{k} \frac{x(x+\alpha)\ldots(x+\overline{k-1}\alpha)(1-x)(1-x+\alpha)\ldots(1-x+\overline{m-k-1}\alpha)}{(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots(1+\overline{m-1}\alpha)}, \tag{2}$$

α being a real parameter which may depend only on m, so that we have:

$$(1+\alpha)(1+2\alpha)\ldots(1+\overline{m-1}\alpha) \neq 0.$$

We remarked that if $\alpha = -1/m$ then this operator becomes the Lagrange interpolation operator corresponding to the equally spaced nodes k/m, while if $\alpha = 0$ it reduces, obviously, to the Bernstein operator B_m, defined by

$$(B_m f)(x) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k} f\left(\frac{k}{m}\right). \tag{3}$$

It is a surprising fact that these quite different operators belong to the same class of operators.

2. Now, at first, we shall make the remark that the fundamental polynomials (2) can be expressed in a more convenient form by means of the notion of generalized factorial.

The generalized factorial of degree n (a positive integer) and increment h (a real number) of u is defined by $u^{(n,h)} = u(u-h)\ldots(u-\overline{n-1}h)$. If $n = 0$ and $u \neq 0$ we set $u^{(0,h)} = 1$, while if $h = 1$ we shall write, for brevity, $u^{(n)}$, in place of $u^{(n,1)}$. Note that for $h = 0$ we have $u^{(n,0)} = u^n$.

We mention the usual rules for operating with the generalized factorial: $u^{(-n,h)} = 1/u^{(n,h)}$, $u^{(-n,-h)} = 1/u^{(n,-h)} = 1/(u + \overline{n-1}h)^{(n,h)}$, $u^{(-n,0)} = u^{-n}$ $(u \neq 0)$.

After these preliminaries it is readily seen that we can give the following representation for the polynomials (2):

$$w_{m,k}^{[\alpha]}(x) = 1^{(-m,-\alpha)} \binom{m}{k} x^{(k,-\alpha)} (1-x)^{(m-k,-\alpha)}.$$

It should be observed that in the same way that the Bernstein polynomial $B_m f$ can be constructed by starting from the identity

$$(x + 1 - x)^m = 1 = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^k (1-x)^{m-k},$$

our polynomial $P_m^{[\alpha]} f$ can be obtained with the aid of the following identity

$$(x + 1 - x)^{(m,-\alpha)} = 1^{(m,-\alpha)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x^{(k,-\alpha)} (1-x)^{(m-k,-\alpha)},$$

based upon the Vandermonde formula

$$(a + b)^{(m,h)} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} a^{(k,h)} b^{(m-k,h)}. \tag{4}$$

In our paper [6] we studied in detail these linear operators in the very important case: $\alpha = \alpha_m \geqq 0 (m = 1, 2, \ldots)$, when they are of positive type. The principal theorem proved in that paper is

THEOREM 1. *If $f \in C\ [0,1]$ and $0 \leqq \alpha = \alpha_m \to 0$ as $m \to +\infty$, then the sequence $(P_m^{[\alpha]} f)$ converges to f uniformly on $[0, 1]$.*

3. In a recent paper [8] we obtained the operator $P_m^{[\alpha]}$ by a probabilistic method. In essence it involves the Markov-Pólya distribution, at which one can easily arrive by using the following urn model.

An urn contains a white and b black balls. One draws one ball at random. Then it is replaced and one adds c balls of the same color. This procedure is repeated m times. Assuming that X is the random variable which takes on the value k $(0 \leqq k \leqq m)$ if during m trials one obtains exactly k times a white ball, then

$$P(X = k) = \binom{m}{k} \frac{a(a+c)\ldots(a+\overline{k-1}c)\, b(b+c)\ldots(b+\overline{m-k-1}\,c)}{(a+b)(a+b+c)\ldots(a+b+\overline{m-1}c)} \tag{5}$$

gives the probability function of X.

This scheme has been encountered by A. A. Markov [4], F. Eggenberger-G. Pólya [2] and G. Pólya [5]. If, in particular, one chooses $c = 0$ then we have the classic case of Bernoulli scheme.

If c is an integer less than zero, then in the preceding urn scheme after each drawing we do not replace the ball drawn and moreover we shall eliminate from the urn $-(c+1)$ balls of the same color as the ball just drawn. Consequently we make the remark that if c is a negative integer, then in order that we can perform all the m trials in the Markov-Pólya scheme, we should assume that

$$a + mc \geqq 0, \quad b + mc \geqq 0. \tag{6}$$

Now let us introduce the notations: $\frac{a}{a+b} = x$, $\frac{c}{a+b} = \alpha$. Since $\frac{b}{a+b} = 1 - x$, we see that the probability (5) is expressible in the following form: $P(X = k) = w_{m,k}^{[\alpha]}(x)$. Considering the random variable $Y_m = f\left(\frac{X}{m}\right)$, we observe that the mean value of it is just $(P_m^{[\alpha]}f)(x)$.

In accordance with (6) we assume that $x + m\alpha \geqq 0$, $1 - x + m\alpha \geqq 0$, that is

$$-m\alpha \leqq x \leqq 1 + m\alpha. \tag{7}$$

One observes that this interval, on which the linear operator $P_m^{[\alpha]}$ is positive, has a positive length if $-m\alpha < \frac{1}{2}$.

Since above x and α appear as rational numbers, we should notice that we can arrive at (1) if we consider that, more generally, the Markov-Pólya probability function of X is defined by $P(X = k) = w_{m,k}^{[\alpha]}(x)$, x and α being real numbers satisfying the foregoing inequalities.

In [8] we proved, by using the Vandermonde formula (4), that we have the following expansion by means of finite differences of f:

$$(P_m^{[\alpha]})(x) = f(0) + \sum_{j=1}^{m} \binom{m}{j} 1^{(-j, -\alpha)} x^{(j, -\alpha)} \Delta_{\frac{1}{m}}^{j} f(0), \tag{8}$$

which in the case $\alpha = 0$ it is well known (see, e.g., G. G. Lorentz [3]).

In the case $\alpha > 0$ this has been established by us in [6], by taking into account that when $x \in (0, 1)$ we can give the representation

$$(P_m^{[\alpha]}f)(x) = \frac{1}{B\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{1-x}{\alpha}\right)} \int_0^1 t^{\frac{x}{\alpha}} (1 - t)^{\frac{1-x}{\alpha}} (B_m f)(t) dt,$$

where B_m is the m^{th} Bernstein operator and $B(a, b)$ denotes the beta function, while for $x = 0$ and $x = 1$ we have respectively

$$(P_m^{[\alpha]}f)(0) = f(0), \; (P_m^{[\alpha]}f)(1) = f(1).$$

Formula (8) enables us to find immediately that for the functions f_j, where $f_j(t) = t^j (j = 0, 1, 2)$ for all t in the basic interval $[0, 1]$, we obtain

$$(P_m^{[\alpha]}f_j)(x) = x^j \quad (j = 0, 1), \qquad (P_m^{[\alpha]}f_2)(x) = \frac{1}{1+\alpha}\left[\frac{x(1-x)}{m} + x(x + \alpha)\right]. \tag{9}$$

Consequently, according to the well known theorem of Bohman-Korovkin we can state the following theorem.

THEOREM 2. *Assuming that* $\alpha = \alpha_m$ *is a non-positive number depending on* m *so that* $-m\alpha_m \leqq \varepsilon$ $(m = 1, 2, \ldots)$, *where* $0 \leqq \varepsilon < \frac{1}{2}$, *then if* $f \in C[0, 1]$ *the sequence* $(P_m^{[\alpha]}f)$ *converges uniformly to* f *on the interval* $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, *when* m *tends to plus infinity.*

Since for the function g_x, defined as follows: $g_x(t) = (t - x)^2$ for all t in the basic interval, x being any fixed point in $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, we obtain*)

$$(P_m^{[\alpha]}g_x)(x) = \frac{1+\alpha m}{1+\alpha} \cdot \frac{x(1-x)}{m} \leqq \frac{1+\alpha m}{4(1+\alpha)m},$$

we see that the rapidity of convergence of $(P_m^{[\alpha]}f)$ to f can be expressed by the following inequalities established in our paper [6]:

$$\|f - P_m^{[\alpha]}f\| \leqq \frac{3}{2}\,\omega(f;\, \delta_m), \quad \|f - P_m^{[\alpha]}f\| \leqq \frac{3}{4}\,\delta_m \omega(f';\, \delta_m),$$

corresponding respectively to the cases $f \in C[0, 1]$, $f \in C^1[0, 1]$, where $\|\cdot\|$ stands for the uniform norm, ω is the modulus of continuity and $\delta_m = [(1+\alpha m)/(m + \alpha m)]^{1/2}$.

It should be noticed that the remainder $R_m^{[\alpha]}f$ of the approximation formula $f = P_m^{[\alpha]}f + R_m^{[\alpha]}f$ has the same expression as in the case when α is a positive parameter and the method used in [6] for deducing it, is also vaild when α is negative.

In [6] we have also stated and proved a theorem concerning an asymptotic estimate, of Voronovskaja type, for this remainder. It is easily seen that this theorem is also valid if $\alpha = \alpha_m$ is non-positive and $x \in [\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

We have

THEOREM 3. *If* $\alpha = \alpha_m$ *is a non-positive number depending on* m *so that* $-m\alpha_m \leqq \varepsilon$, *where* $0 \leqq \varepsilon < \frac{1}{2}$, *for* m *any natural number, then assuming that* f *is bounded on* $[0, 1]$ *and that* f'' *exists at a point* x *of* $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$, *we have*

$$(R_m^{[\alpha]}f)(x) = f(x) - (P_m^{[\alpha]}f)(x) = -\frac{1+\alpha m}{1+\alpha} \cdot \frac{x(1-x)}{2m} f''(x) + \frac{\varepsilon_m^{[\alpha]}(x)}{m}, \tag{10}$$

where $\varepsilon_m^{[\alpha]}(x)$ *tends to 0 when* m *tends to* $+\infty$.

The proof is completely analogous to that of Theorem 7.1 from [6]. The key lies in showing that according to the Taylor formula and to the relations (9) we obtain immediately

$$-(R_m^{[\alpha]}f)(x) = \frac{1+\alpha m}{1+\alpha} \cdot \frac{x(1-x)}{2m} f''(x) + \rho_m^{[\alpha]}(x),$$

where

$$\rho_m^{[\alpha]}(x) = \sum_{k=0}^{n} w_{m,k}^{[\alpha]}(x) \left(\frac{k}{m} - x\right)^2 \varphi\left(\frac{k}{m}\right),$$

φ being a function defined on $[0, 1]$ so that if y tends to x then $\varphi(y)$ tends to zero.

---

* More general formulas of this type have been given in [9].

Further it is convenient to take into account the fact that equivalent to the conditions of having uniformly on $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$:

$$\lim_{m\to+\infty} (P_m^{[\alpha]} f_j)(x) = x^j \quad (j = 0, 1, 2),$$

for the convergence of $(P_m^{[\alpha]} f)$ to f, are the following relations (see, e.g., [1]):

$$\lim_{m\to+\infty} \sum_{\left|\frac{k}{m}-x\right| < \delta} w_{m,k}^{[\alpha]}(x) = 1, \qquad \lim_{m\to+\infty} \sum_{\left|\frac{k}{m}-x\right| \geq \delta} w_{m,k}^{[\alpha]}(x) = 0$$

for each $\delta > 0$, uniformly with respect to x in $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$.

Employing the procedure described in [6] and the foregoing relations, one finds that for any $\eta > 0$ we have $m|\rho_m^{[\alpha]}(x)| < \eta$ whenever m is greater than a certain positive integer $N(\eta)$, and therefore $\varepsilon_m^{[\alpha]}(x)$ from (10) tends to zero as m tends to plus infinity.

If we assume further that $m\alpha_m \to a \left(a > -\frac{1}{2}\right)$, then (10) permits us to write the relation

$$\lim_{m\to+\infty} m\left[f(x) - (P_m^{[\alpha]} f)(x)\right] = -(1+a)\frac{x(1-x)}{2} f''(x).$$

(Received May 5, 1969)

REFERENCES

1. Butzer P. L. and Berens H., *Semi-Groups of Operators and Approximation.* Springer-Verlag, Berlin, 1967.
2. Eggenberger F. und Pólya G., *Über die Statistik verketteter Vorgänge.* „Zeitschr. Angew. Math. u. Mech.", 3 (1923), 279–289.
3. Lorentz G. G., *Bernstein polynomials,* Univ. of Toronto Press, 1953.
4. Markov A. A., *On Some Limit Formulas of Probability Calculus* (Russian), "Izvestiah Akad. Nauk", **11** (1917), 177–186.
5. G. Pólya, *Sur quelques points de la théorie des probabilités,* "Ann. Inst. H. Poincaré", 1 (1930–1931), 117–161.
6. Stancu, D. D., *Approximation of Functions by a New Class of Linear Polynomial Operators,* "Rev. Roum. Math. Pures et Appl.", **13** (1968), 1173–1194.
7. Stancu D. D., *On a New Positive Linear Polynomial Operator,* "Proc. Japan Acad.", **44** (1968), 221–224.
8. Stancu D. D., *Use of Probabilistic Methods in the Theory of Uniform Approximation of Continuous Functions,* "Rev. Roum. Math. Pures et Appl.", **14** (1969), 673–691.
9. Stancu D. D., *Recurrence Relations for the Central Moments of some Discrete Probability Laws.* "Studia Univ. Babeş-Bolyai", **15** (1970), 55–62.

PROPRIETĂŢI DE APROXIMARE ALE UNEI CLASE DE OPERATORI LINIARI POZITIVI

(R e z u m a t)

Operatorul $P_m^{[\alpha]}$, introdus anterior în [6], se reprezintă cu ajutorul factorialului generalizat şi se studiază proprietăţile de bază de aproximare a funcţiilor continue cu ajutorul acestui operator în cazul cînd parametrul α depinde de m şi ia valori negative. Astfel se completează rezultatele obţinute în [6] şi [8] relative la studiul acestui operator.

СВОЙСТВА ПРИБЛИЖЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Р е з ю м е)

Оператор $P_m^{[\alpha]}$, введенный раньше в [6] представляется с помощью обобщённого факториала и изучаются основные свойства приближения непрерывных функций с помощью этого оператора, в случае когда параметр α зависит от m и принимает отрицательные значения. Таким образом пополняются результаты, полученные в [6] и [8] относительно изучения этого оператора.

ASUPRA UNOR FORMULE OPTIMALE DE CUADRATURĂ

de

GH. COMAN

Fie H o clasă de funcții definite pe segmentul $[0, 1]$ și m un număr natural Se consideră formula de cuadratură

$$\int_0^1 f(x)dx = \sum_{i=0}^{m} C_i f(x_i) + R_{m+1}(f) \tag{1}$$

unde $f \in H$ iar abscisele nodurilor satisfac condițiile $0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_m \leqslant 1$. Dacă $x_0 = 0$ și $x_m = 1$, atunci formula de cuadratură (1) se numește de tip închis.

Se pune problema ca dintre toate formulele de cuadaratură de tipul (1) să se determine aceea pentru care marginea superioară

$$E_{m+1}(H,\ C_i,\ x_i) = \sup_{f\in H} |R_{m+1}(f)| \tag{2}$$

extinsă la toate funcțiile f din clasa H, are valoarea cea mai mică. Se notează această valoare cu $E_{m+1}(H)$, adică

$$E_{m+1}(H) = \min_{C_i,\, x_i} (H,\ C_i,\ x_i) \tag{3}$$

Formula de cuadratură de tipul (1) ai cărei coeficienți C_i și noduri x_i sint astfel alese încît $E_{m+1}(H)$ să fie atins, se numește optimală pentru clasa de funcții H.

Se pot obține diverse variante ale problemei propuse, dacă se caută formula de cuadratură optimală printre formulele ale căror coeficienți și noduri nu sînt arbitrare, ci sînt supuse unor legături dinainte date.

Astfel de probleme au fost studiate de A. Sard [10], S. M. Nikolski [8], G. Ia. Doronin [3]. T. A. Saidaeva [11] și alții, pentru anumite clase de funcții.

În lucrarea de față se studiază formula de cuadratură de tip închis optimală pentru clasa $W_{L_p}^{(r)}(M_{pr};0,1)$, a funcțiilor definite pe segmentul $[0, 1]$, avînd derivata de ordinul $r-1$ absolut continuă și derivata de ordinul r, $f^{(r)}(x)$ cu proprietatea

$$\left(\int_0^1 |f^{(r)}(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \leqslant M_{pr}, \tag{4}$$

pentru $p = 1, 2$; $r = 1, 2$, în cazul în care formula de cuadratură are gradul de exactitate egal cu $r-1$.

Studiul formulelor optimale în cazurile amintite se va face folosind metoda Prof. D. V. I o n e s c u descrisă în lucrarea [5].

Pentru $p = 1$, se va scrie $W^{(r)}(M_{1r}; 0,1)$ în loc de $W^{(r)}_{1,1}(M_{1r}; 0,1)$, iar condiția (4) se înlocuiește cu condiția $|f^{(r)}| \leqslant M_{1r}$.

1. Cazul $p = 1$, $r = 1$. Să considerăm integrala

$$I = \int_0^1 f(x)\, dx, \tag{1.1}$$

unde $f \in W^{(1)}(M_{11}; 0,1)$. Fie $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$ o diviziune a intervalului $[0,1]$. Fiecărei subdiviziuni $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 1, \ldots, m)$ i se atașează o funcție φ_i integrală a ecuației diferențiale corespunzătoare

$$\varphi_i'(x) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{1.2}$$

Integrala (1.1) se va scrie

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^{x_1} \varphi_1'(x) f(x)\, dx + \sum_{i=2}^{m-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'(x) f(x)\, dx + \int_{x_{m-1}}^1 \varphi_m'(x) f(x)\, dx$$

și aplicînd formula de integrare prin părți, avem

$$\int_0^1 f(x)\, dx = -\varphi(0) f(0) + \sum_{i=1}^{m-1} [\varphi_i(x_i) - \varphi_{i+1}(x_i)]\, f(x_i) + \varphi_m(1) f(1) -$$

$$- \int_0^1 \varphi(x) f'(x)\, dx, \tag{1.3}$$

unde funcția φ coincide pe rînd cu funcțiile $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ în intervalele $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{m-1}, 1]$. Dar, conform lui (1.2), funcțiile $\varphi_i(x)$ trebuie să aibă forma

$$\varphi_i(x) = x - \sum_{k=0}^{i-1} C_i, \quad (i = 1, 2 \ldots, m, \tag{1.4}$$

unde C_i sînt constante arbitrare.

Se observă că formula (1.3) este de tipul formulei (1), unde

$$C_0 = -\varphi_1(0),\ C_i = \varphi_i(x_i) - \varphi_{i+1}(x_i) \ \ (i = 1, 2, \ldots, m-1),\ C_m = \varphi_m(1) \tag{1.5}$$

iar

$$R_{m+1}(f) = -\int_0^1 \varphi(x) f'(x)\, dx. \tag{1.6}$$

Din (1.6) rezultă că

$$\sup_{f \in W^{(1)}(M_{11};\, 0,\, 1)} |R_{m+1}(f)| \leqslant M_{11} \int_0^1 |\varphi(x)|\, dx. \tag{1.7}$$

Dacă se alege funcția f astfel încît $f'(x) = M_{11} \operatorname{sign} \varphi(x)$, atunci $f \in W^{(1)}(M_{11}; 0,1)$ iar în (1.7) are loc semnul egal. Prin urmare, avînd în vedere (2), se obține

$$E_{m+1}(W^{(1)}(M_{11};\ 0,1),\ C_i,\ x_i) = M_{11} \int_0^1 |\varphi(x)|\, dx. \tag{1.8}$$

În felul acesta, problema obținerii formulei de cuadratură optimală pentru clasa de funcții $W^{(1)}(M_{11};\ 0,1)$ s-a redus la determinarea nodurilor x_i și a parametrilor C_i, astfel încît integrala

$$J_{11} = \int_0^1 |\varphi(x)|\, dx \tag{1.9}$$

să ia valoarea cea mai mică.

Avînd în vedere definiția funcției φ se obține

$$J_{11} = \int_0^{x_1} |x - C_0|\, dx + \sum_{i=2}^{m-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| x - \sum_{k=0}^{i-1} C_k \right| dx + \int_{x_{m-1}}^{1} \left| x - \sum_{k=0}^{m-1} C_k \right| dx,$$

sau

$$J_{11} = \sum_{i=1}^{m} I_i, \tag{1.10}$$

unde

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left| x - \sum_{k=0}^{i-1} C_k \right| dx, \quad (x_0 = 0,\ x_m = 1).$$

LEMA 1. *Minimul integralei*

$$G = \int_{a-h}^{a+h} |x - A|\, dx \quad (h > 0)$$

printre polinoamele de gradul întîi cu coeficientul lui x *egal cu unu și* A *arbitrar, este atins pentru polinomul unic* $T_1(x) = x - a$ *și*

$$\int_{a-h}^{a+h} |x - a|\, dx = h^2.$$

Demonstrație. Avem $\frac{\partial G}{\partial A} = 2(A - a) = 0$, de unde rezultă că $A = a$. Cum $\frac{\partial^2 G}{\partial A^2} = 2 > 0$, iar efectuînd calculul, $\int\limits_{a-h}^{a+h} |x - a|\, dx = h^2$, lema este demonstrată.

Conform lemei, integrala I_i ia valoarea minimă în raport cu $C_i (i = 0, 1, \ldots m - 1)$ atunci și numai atunci cînd

$$\sum_{k=0}^{i-1} C_k = \frac{x_{i+1} + x_i}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{1.11}$$

Substituind valorile obținute pentru C_i în (1.10) și efectuînd calculele se obține

$$\bar{J}_{11} = \min_{C_i} J_{11} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1})^2.$$

Determinăm acum minimul funcției $\bar{J}_{11}$ în raport cu $x_i (i = 1, 2, \ldots, m - 1)$. Se obține

$$\frac{\partial \bar{J}_{11}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{x_1^2}{4} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{4} + \ldots + \frac{(x_i - x_{i-1})^2}{4} + \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{4} + \ldots + \frac{(1 - x_{m-1})^2}{4} \right\} =$$
$$= \frac{x_i - x_{i-1}}{2} - \frac{x_{i+1} - x_i}{2} = 0$$

sau

$$x_i - x_{i-1} = x_{i+1} - x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m - 1).$$

Rezultă că funcția $\bar{J}_{11}$ își atinge valoarea minimă, în raport cu parametrii x_i $(i = 1, 2, \ldots, m - 1)$, în cazul unic în care subdiviziunile $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ au aceeași lungime.

Avem, deci

$$x_i = \frac{i}{m} \quad (i = 1, 2, \ldots, m - 1), \tag{1.12}$$

iar

$$\min_{x_i} \bar{J}_{11} = \frac{1}{4m} \tag{1.13}$$

Din (1.11) și din faptul că formula de cuadratură care gradul de exactitate egal cu zero $\left(\sum_{i=0}^{m} C_i = 1 \right)$ se obține

$$C_0 = C_m = \frac{1}{2m}, \; C_i = \frac{1}{m} \quad (i = 1, 2, \ldots, m - 1) \tag{1.14}$$

În sfîrșit, din (3) și (1.13) rezultă că

$$E_{m+1}(W^{(1)}(M_{11}; 0, 1)) = \frac{1}{4m} M_{11}. \tag{1.15}$$

În felul aceasta s-a demonstrat următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *Formula de cuadratură de tipul* (1), *optimală pentru clasa de funcții* $W^{(1)}(M_{11}; 0,1)$, *este formula trapezului cu restul dat de expresia* (1.5).

Revenind la funcţia φ se observă că funcţiile φ_i corespunzătoare formulei de cuadratură optimală au expresiile

$$\varphi_i(x) = x - \frac{2i-1}{2m} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

iar graficul ei este dat de fig. 1.

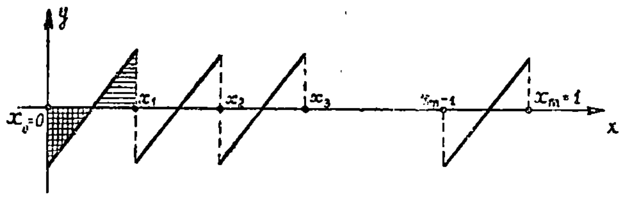

Fig. 1.

Observaţie. Funcţia φ corespunzătoare formulei de cuadratură optimală se bucură de proprietatea că aria domeniului haşurat situat deasupra axei ox este egală cu aria domeniului haşurat situat sub axa ox.

2. Cazul $p = 1$, $r = 2$. Se consideră integrala

$$I = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2.1}$$

unde $f \in W^{(2)}(M_{12}; 0,1)$ şi o diviziune $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$ a segmentului $[0, 1]$. Fiecărei subdiviziuni i se ataşează o funcţie φ_i, integrală a ecuaţiei diferenţiale corespunzătoare

$$\varphi_i''(x) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{2,2}$$

Scriind integrala (2.1) sub forma

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i''(x) f(x)\,\mathrm{d}x.$$

şi aplicînd formula generalizată de integrare prin părţi, se obţine

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\varphi_1'(0)f(0) + \sum_{i=1}^{m-1} [\varphi_i'(x_i) - \varphi_{i+1}'(x_i)] f(x_i) + \varphi_m'(1) f(1) +$$

$$+ \varphi_1(0) f'(0) - \sum_{i=1}^{m-1} [\varphi_i(x_i) - \varphi_{i+1}(x_i)] f'(x_i) - \varphi_m(1) f'(1) + \int_0^1 \varphi(x) f''(x)\, dx.$$

unde funcţia φ coincide pe rînd cu funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ în intervalele $[0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, $\ldots$, $[x_{m-1}, 1]$.

Punînd condiţiile

$$\varphi_1(0) = 0, \ \varphi_i(x_i) = \varphi_{i+1}(x_i), \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1), \ \varphi_m(1) = 0 \tag{2.3}$$

se obţine

$$\int_0^1 f(x)dx = -\varphi_1(0) f(0) + \sum_{i=1}^{m-1} [\varphi_i'(x_i) - \varphi_{i+1}'(x_i)] f(x_i) + \varphi_m(1) f(1) + $$
$$+ \int_0^1 \varphi(x) f''(x)\, dx, \tag{2.4}$$

care este o formulă de cuadratură de tipul (1), unde

$$C_0 = -\varphi_1'(0), \ C_i = \varphi_i'(x_i) - \varphi_{i+1}'(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, m-1), \ C_m = \varphi_m(1) \tag{2.5}$$

iar restul

$$R_{m+1}(f) = \int_0^1 \varphi(x) f''(x)\, \mathrm{d}x. \tag{2.6}$$

Pentru a fi satisfăcute condiţiile (2.2) şi (2.3) este suficient să luăm funcţiile φ_i sub următoarea formă

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= \frac{x^2}{2} - C_0 x, \\
\varphi_2(x) &= \frac{x^2}{2} - C_0 x - C_1(x - x_1), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_{m-1}(x) &= \frac{x^2}{2} - C_0 x - C_1(x - x_1) - \ldots - C_{m-2}(x - x_{m-2}), \\
\varphi_m(x) &= \frac{x^2}{2} - C_0 x - C_1(x - x_1) - \ldots - C_{m-2}(x - x_{m-2}) - C_{m-1}(x - x_{m-1}).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Avînd în vedere că formula are gradul de exactitate egal cu unu, adică $\sum_{i=0}^{m} C_i = 1, \ \sum_{i=0}^{m} C_i x_i = \frac{1}{2}$, funcţia $\varphi_m(x)$ se mai poate scrie

$$\varphi_m(x) = \frac{(1-x)^2}{2} - C_m(1 - x).$$

Cu această observaţie, condiţiile (2.2) şi (2.3) se verifică fără nici-o greutate. Din (2.6) se obţine

$$\sup_{f \in W^{(2)}(M_{12};\, 0,1)} |R_{m+1}(f)| \leqslant M_{12} \int_0^1 |\varphi(x)|\, dx,$$

unde, pentru funcţia f astfel aleasă încît $f''(x) = M_{12} \operatorname{sign} \varphi(x)$, are loc semnul egal. Cum funcţia f, astfel definită, aparţine clasei $W^{(2)}(M_{12}; 0,1)$, rezultă că

$$E_{m+1}(W^{(2)}(M_{12}; 0,1), C_i, x_i) = M_{12}\int_0^1 |\varphi(x)|cx. \tag{2.8}$$

Problema s-a redus în felul acesta la minimizarea integralei

$$J_{12} = \int_0^1 |\varphi(x)|\, dx.$$

în raport cu parametrii C_i şi x_i.

Avem

$$J_{12} = \int_0^{x_1}\left|\frac{x^2}{2} - C_0 x\right| dx + \sum_{i=2}^{m-1} I_i + \int_{x_{m-1}}^{1}\left|\frac{(1-x)^2}{2} - C_m(1-x)\right| \mathrm{d}x, \tag{2.9}$$

unde

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|\frac{x^2}{2} - \sum_{k=0}^{i-1} C_k(x - x_k)\right| \mathrm{d}x.$$

LEMA 2. *Minimul integralei* $\int_{a-h}^{a-h}\left|\frac{x^2}{2} - Ax - B\right| dx$ $(h > 0)$ *printre polinoamele* $\frac{x^2}{2} - Ax - B$ *de gradul al doilea, cu coeficientul lui* x^2 *egal cu* $\frac{1}{2}$ *şi coeficienţii* A *şi* B *arbitrari, este atins pentru polinomul unic* $T_2(x) = \frac{x^2}{2} - ax - \left(\frac{h^2}{8} - \frac{a^2}{2}\right)$. *Acest minim este* $\int_{a-b}^{a+b} |T_2(x)|\, dx = \frac{h^3}{4}$.

Demonstraţia acestei leme este dată în [8].

Conform lemei 2, pentru ca integralele $I_i (i = 1, 2, 3, \ldots, m-1)$ să ia valoarea minimă este necesar ca

$$\sum_{k=0}^{i-1} C_k = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \qquad (i = 1, \ldots, m-1). \tag{2.10}$$

Parametrii C_0 şi C_m, care minimizează prima, respectiv ultima din integralele (2.9), se determină din ecuaţiile

$$\frac{d}{dC_0}\left\{\int_0^{x_1}\left|\frac{x^2}{2} - C_0 x\right| \mathrm{d}x\right\} = 0, \qquad \frac{d}{dC_m}\left\{\int_{x_{m-1}}^{1}\left|\frac{(1-x)^2}{2} - C_m(1-x)\right| \mathrm{d}x\right\} = 0.$$

şi se obţine

$$C_0 = \frac{x_1}{2\sqrt{2}}, \quad C_m = \frac{1 - x_{m-1}}{2\sqrt{2}}. \tag{2.11}$$

Introducînd valorile lui C_i din (2.10) şi (2.11) în (2.9) se obţine

$$\overline{J}_{12} = \min_{C_i} J_{12} = \frac{\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}} x_1^3 + \frac{1}{32}\sum_{i=2}^{m-1} (x_i - x_{i-1})^3 + \frac{\sqrt{2}-1}{6\sqrt{2}} (1 - x_{m-1})^3.$$

Folosind notaţia

$$U = \sum_{i=2}^{m-1} (x_i - x_{i-1})^3,$$

se determină în primul rînd, minimul funcţiei U în raport cu parametrii $x_2, x_3, \ldots$ $\ldots, x_{m-2}$. Se obţine

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\{(x_2 - x_1)^3 + \ldots + (x_i - x_{i-1})^3 + (x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots + (x_{m-1} - x_{m+1})^3\}$$

$$= 3(x_i - x_{i-1})^2 - 3(x_{i+1} - x_i)^2 = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, m-1).$$

De aici rezultă că funcţia U ia valoarea minimă în unicul caz în care

$$x_i - x_{i-1} = \frac{x_{m-1} - x_1}{m-2} \qquad (i = 2, 3, \ldots, m-1), \tag{2.12}$$

adică subdiviziunile $[x_1, x_2]$, $[x_2, x_3]$, $\ldots$, $[x_{m-2} - x_{m-1}]$ au aceeaşi lungime.

Avem de asemenea

$$\min_{x_2, \ldots, x_{m-2}} U = \frac{(x_{m-1} - x_1)^3}{(m-2)^2}$$

şi în consecinţă

$$\overline{\overline{J}}_{12} = \min_{x_2, \ldots, x_{m-2}} \overline{J}_{12} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} x_1^3 + \frac{(x_{m-1} - x_1)^3}{32(m-2)^2} + \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} (1 - x_{m-1})^3.$$

Vom determina acum minimul lui $\overline{\overline{J}}_{12}$ în raport cu x_1 şi x_{m-1}. Avem

$$\frac{\partial \overline{\overline{J}}_{12}}{\partial x_1} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} x_1^2 - \frac{3(x_{m-1} - x_1)^2}{32(m-2)^2} = 0$$

$$\frac{\partial J_{12}}{\partial x_{m-1}} = \frac{3(x_{m-1} - x_1)^2}{32(m-2)^2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} (1 - x_{m-1})^2 = 0$$

Rezolvînd acest sistem se obţine ca unică soluţie posibilă

$$x_1 = 1 - x_{m-1} = \mu\sqrt{3}, \text{ unde } \mu = \frac{1}{2\left[\sqrt{3} + (m-2)\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\right]},$$

iar

$$\min_{x_1, x_{m-1}} \overline{\overline{J}}_{12} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}} \mu^2. \tag{2.13}$$

Din (2.12) se obţin pentru abscisele nodurilor optimale expresiile

$$x_i = [\sqrt{3} + 2(i-1)\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}]\mu (i = 1, 2, \ldots, m-1), \; x_0 = 0, \; x_{m-1} = 1 \tag{2.14}$$

iar din (2.10) şi (2.11) şi condiţia $\sum_{i=0}^{m} C_i = 1$, se obţin pentru coeficienţii optimali expresiile

$$C_0 = C_m = \frac{\sqrt{6}}{4}\mu, \; C_1 = C_{m-1} = \frac{4\sqrt{3} - \sqrt{6} + 4\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}{4}\mu,$$
$$C_i = 2\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}\mu \quad (i = 2, 3, \ldots, m-2). \tag{2.15}$$

În sfîrşit, din (2.8) şi (2.13) rezultă că

$$E_{m+1}(W^{(2)}(M_{12}; 0, 1)) = \frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} \mu^2 M_{12}. \tag{2.16}$$

Avînd în vedere faptul că nodurile optimale şi coeficienţii optimali sînt unic determinaţi şi că pentru valorile lor date de (2.14), respectiv (2.15) polinomul

$$T_i = \frac{x^2}{2} - \sum_{k=0}^{i-1} C_k(x - x_k) \quad (i = 2, 3, \ldots, m-2)$$

reprezintă pe segmentul corespunzător $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 2, 3, \ldots, m-2)$, polinomul care se abate în medie cel mai puţin de la zero, are loc următoarea teoremă:

TEOREMA 2. *Formula de cuadratură de tipul* (1), *avînd gradul de exactitate egal cu unu, optimală pentru clasa de funcţii* $W^{(2)}(M_{12}; 0, 1)$, *este aceea a cărei noduri şi coeficienţi sînt daţi de* (2.14) *respectiv* (2.15), *iar restul formulei este dat de* (2.16).

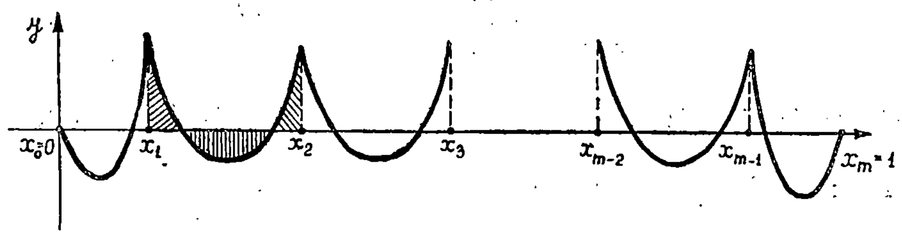

Fig. 2.

Funcţia φ corespunzătoare formulei de cuadratură optimală are graficul din fig. 2 şi se bucură de proprietatea că aria domeniului haşurat deasupra axei ox este egală cu de două ori aria domeniului haşurat sub axa ox.

3. Cazul $p = 2$, $r = 1$. În mod analog cazului 1, dacă se consideră integrala

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

unde $f \in W_{L_2}^{(2)}(M_{21}; 0,1)$, $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = 1$ o subdiviziune a intervalului $[0,1]$ şi dacă fiecărei subdiviziuni $[x_{i-1}, x_i]$ i se ataşează o funcţie φ_i integrală a ecuaţiei diferenţiale corespunzătoare

$$\varphi_i'(x) = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3.1}$$

se obţine

$$\int_0^1 f(x)\,dx = -\varphi_1(0)f(0) + \sum_{i=1}^{m-1}[\varphi_i(x_i) - \varphi_{i+1}(x_i)]f(x_i) + \varphi_m(1)f(1) - \\ - \int_0^1 \varphi(x)f'(x)\,dx, \tag{3.2}$$

unde funcţia φ coincide pe rînd cu funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ pe intervalele $[0, x_1]$, $[x_1, x_2], \ldots, [x_{m-1}, 1]$. Funcţiile φ_i datorită condiţiilor (3.1), sînt polinoame de gradul întîi cu coeficientul lui x egal cu unu şi termenul liber arbitrar, adică

$$\varphi_i(x) = x - \sum_{k=0}^{i-1} C_k \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{3.3}$$

În felul acesta formula (3.2) este o formulă de cuadratură de tipul (1), unde

$$C_0 = -\varphi_1(0),\ C_i = \varphi_i(x_i) - \varphi_{i+1}(x_i)\ (i = 1, 2, \ldots, m-1),\ C_m = \varphi_m(1) \tag{3.4}$$

iar

$$R_m(f) = -\int_0^1 \varphi(x)f'(x)\,dx. \tag{3.5}$$

Aplicînd lui (3.5) inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski se obţine

$$\sup_{f\in W_{L_2}^{(1)}(M_{21};\,0,\,1)} |R_{m+1}(f)| \leqslant M_{21}\left\{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right\}^{1/2}. \tag{3.6}$$

Dacă se ia funcţia f astfel încît $f'(x) = M_{21}\left\{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right\}^{-1/2}\varphi(x)$, atunci $f \in W_{L_2}^{(1)}(M_{21};\, 0,1)$ iar în (3.6) are loc semnul egal. Rezultă că

$$E_{m+1}(W_{L_2}^{(1)}(M_{21};\, 0,1),\ C_i,\ x_i) = M_{21}\left\{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right\}^{1/2} \tag{3.7}$$

şi problema se reduce la minimizarea integralei

$$J_{21} = \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx.$$

Integrala J_{21} se mai poate scrie

$$J_{21} = \sum_{i=1}^{m} I_i, \tag{3.8}$$

unde

$$I_i = \int_0^1 \left(x - \sum_{k=0}^{i-1} C_k\right)^2 dx.$$

LEMA 3. *Minimul integralei* $\int\limits_{a-h}^{a+h} (x - A)^2 dx \, (h > 0)$, *printre polinoamele de gradul întîi, cu coeficientul lui x egal cu unu şi A arbitrar, este atins pentru polinomul unic* $T_1(x) = x - a$, *iar* $\int\limits_{a-h}^{a+h} (x - a)^2 dx = \frac{2h^3}{3}$.

Demonstraţia acestei leme se face în mod analog cu demonstraţia lemei 1.

Conform lemei 3, rezultă că integrala I_i ia valoarea minimă în cazul unic în care

$$\sum_{k=0}^{i-1} C_k = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{3.9}$$

iar în acest caz

$$\bar{J}_{21} = \min_{C_i} J_{21} = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{m} (x_i - x_{i-1})^3.$$

Calculînd acum minimul lui $\bar{J}_{21}$ în raport cu x_i, se obţine

$$\frac{\partial J_{21}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \{(x_1 - x_0)^3 + \ldots + (x_i - x_{i-1})^3 + (x_{i+1} - x_i)^3 + \ldots + x_m - x_{m+1})^3\} =$$
$$= 3(x_i - x_{i-1})^2 - 3(x_{i+1} - x_i)^2 = 0,$$

de unde rezultă că $\bar{J}_{21}$ ia valoarea minimă în cazul unic în care $x_i - x_{i-1} = \frac{1}{m}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, sau

$$x_i = \frac{i}{m} \quad (i = 1, 2, \ldots, m - 1), \tag{3.10}$$

iar

$$\min_{x_i} \bar{J}_{21} = \frac{1}{12m^2}. \tag{3.11}$$

Din (3.10) şi $\sum_{i=0}^{m} C_i = 1$, se obţine

$$C_0 = C_m = \frac{1}{2m}, \quad C_i = \frac{1}{m} \quad (i = 1, 2, \ldots, m - 1) \tag{3.12}$$

Avînd în vedere (3.7) şi (3.11) se obţine

$$E_{m+1}(W_{L_2}^{(1)}(M_{21};\ 0,1)) = \frac{1}{2m\sqrt{3}} M_{21}. \tag{3.13}$$

Are loc

TEOREMA 3. *Formula de cuadratură de tipul* (1), *optimală pentru clasa de funcţii* $W_{L_2}^{(1)}(M_{21};\ 0,1)$ *este formula trapezului cu restul dat de expresia* (3.13).

Funcţia φ corespunzătoare formulei optimale are aceeaşi expresie ca şi în cazul 1, deci aceeaşi reprezentare grafică (fig. 1) şi se bucură de aceeaşi proprietate.

4. Cazul $p = 2$, $r = 2$. Fie $f \in W_{L_2}^{(2)}(M_{22}; 0,1)$ şi $0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_m = 1$ o subdiviziune a segmentului $[0,1]$. În mod cu totul analog cazului 2 se obţine o formulă de tipul (1) şi anume

$$\int_0^1 f(x)dx = -\varphi_1'(0)f(0) + \sum_{i=1}^{m-1}[\varphi_i'(x_i) - \varphi_{i+1}'(x_i)]f(x_i) + \varphi_m'(1)f(1) + \int_0^1 \varphi(x)f''(x)dx, \tag{4.1}$$

unde

$$C_0 = -\varphi_1'(0), \; C_i = \varphi_i'(x_i) - \varphi_{i+1}'(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1), \quad C_m = \varphi_m'(1)$$

iar

$$R_{m+1}(f) = \int_0^1 \varphi(x)f''(x)\,dx. \tag{4.2}$$

Funcţia φ coincide pe fiecare din intervalele $[x_{i-1}, x_i]$ cu φ_i, care satisfac condiţiile

$$\varphi_i''(x) = 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, m) \tag{4.3}$$

$$\varphi_1(0) = 0, \; \varphi_i(x_i) = \varphi_{i-1}(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1), \; \varphi_m(1) = 0,$$

adică sînt de forma (2.7).

Aplicînd lui (4.2) inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski se obţine

$$\sup_{f \in W_{L_2}^{(2)}(M_{22}; 0,1)} |R_{m+1}(f)| \leqslant M_{22}\left\{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right\}^{1/2},$$

inegalitate care pentru funcţia f astfel aleasă încît $f''(x) = M_{22}\left\{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right\}^{-1/2}\varphi(x)$ se transformă în egalitate şi în plus $f \in W_{L_2}^{(2)}(M_{22}; 0,1)$. Rezultă că

$$E_{m+1}(W_{L_2}^{(2)}(M_{22}; 0,1), C_i, x_i) = M_{22}\left\{\int_0^1 \varphi^2(x)\,dx\right\}^{1/2}. \tag{4.4}$$

Urmează să calculăm minimul integralei

$$J_{22} = \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx.$$

în raport cu parametrii C_i şi x_i. Se obţine

$$J_{22} = \int_0^{x_1} \left(\frac{x^2}{2} - C_0 x\right)^2 dx + \sum_{i=2}^{m-1} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{x^2}{2} - \sum_{k=0}^{i-1} C_k (x - x_k)\right]^2 dx +$$

$$+ \int_{x_{m-1}}^{1} \left[\frac{(1-x)^2}{2} - C_m (1-x)\right]^2 dx,$$

sau

$$J_{22} = \int_0^{x_1} \left(\frac{x^2}{2} - C_0 x\right)^2 dx + \sum_{i=2}^{m-1} I_i + \int_{x_{m-1}}^{1} \left[\frac{(1-x)^2}{2} - C_m(1-x)\right]^2 dx, \tag{4.5}$$

unde

$$I_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[\frac{x^2}{2} - \sum_{k=0}^{i-1} C_k (x - x_k)\right]^2 dx.$$

LEMA 4. *Minimul integralei* $\int_{a-h}^{a+h} \left(\frac{x^2}{2} - Ax - B\right)^2 dx$ $(h > 0)$, *printre polinoamele de gradul al doilea* $\frac{x^2}{2} - Ax - B$, *cu coeficientul lui* x *egal cu* $\frac{1}{2}$ *şi coeficienţii* A *şi* B *arbitrari, este atins pentru polinomul unic* $T_2(x) = \frac{x^2}{2} - ax - \left(\frac{h^2}{6} - \frac{a^2}{2}\right)$ *şi* $\int_{a-h}^{a+h} T_2^2(x)\, dx = \frac{2}{45} h^5$.

Demonstraţia este dată în [3].

Din această lemă rezultă că integrala I_i ia valoarea minimă în cazul unic în care

$$\sum_{k=0}^{i-1} C_k = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \qquad (i = 2, 3, \ldots, m-1). \tag{4.6}$$

Pentru determinarea parametrilor C_0 şi C_m avem

$$\frac{d}{dC_0}\left\{\int_0^{x_1} \left(\frac{x^2}{2} - C_0 x\right)^2 dx\right\} = 0, \quad \frac{d}{dC_m}\left\{\int_{x_{m-1}}^{1} \left[\frac{(1-x)^2}{2} - C_m(1-x)\right]^2 dx\right\} = 0$$

de unde

$$C_0 = \frac{3}{8} x_1, \qquad C_m = \frac{3}{8}(1 - x_{m-1}). \tag{4.7}$$

Introducînd valorile obținute pentru C_i în (4.5), se obține

$$\bar{J}_{22} = \min_{C_i} J_{22} = \frac{x_1^5}{320} + \frac{1}{720}\sum_{i=2}^{m-1} (x_i - x_{i-1})^5 + \frac{(1 - x_{m-1})^5}{320}.$$

Folosind notația $U = \sum_{i=2}^{m-1} (x_i - x_{i-1})^5$, avem

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\{(x_2 - x_1)^5 + \ldots + (x_i - x_{i-1})^5 + (x_{i+1} - x_i)^5 + \ldots + (1 - x_{m-1})^5\} =$$

$$= 5(x_i - x_{i-1})^4 - 5(x_{i+1} - x_i)^4 = 0 \qquad (i = 2, 3, \ldots, m - 1).$$

De aici rezultă că funcția U ia valoarea minimă în raport cu x_i $(i = 2, \ldots \ldots, m - 2)$, în cazul unic în care

$$x_i - x_{i-1} = \frac{x_{m-1} - x_1}{m - 2} \qquad (i = 2, 3, \ldots, m - 1), \tag{4.8}$$

iar

$$\bar{\bar{J}}_{22} = \min_{x_2, \ldots, x_{m-2}} \bar{J}_{22} = \frac{1}{320} x_1^5 + \frac{(x_{m-1} - x_1)^5}{720(m - 2)^4} + \frac{1}{320}(1 - x_{m-1})^5.$$

Se calculează acum minimul lui $\bar{\bar{J}}_{22}$ în raport cu x_1 și x_{m-1}. Se obține

$$x_1 = 1 - x_{m-1} = 2\mu, \qquad \mu = \frac{1}{4 + (m - 2)\sqrt{6}} \tag{4.9}$$

și

$$\min_{x_1, x_{m-1}} \bar{\bar{J}}_{22} = \frac{1}{20}\mu^4. \tag{4.10}$$

Din (4.8) și (4.9) se obțin pentru abscisele nodurilor optimale expresiile

$$x_0 = 0, \ x_i = [2 + (i - 1)\sqrt{6}]\mu \ (i = 1, 2, \ldots, m - 1), \ x_m = 1, \tag{4.11}$$

iar din (4.6), (4.7) și $\sum_{i=0}^{m} C_i = 1$, se obține

$$C_0 = C_m = \frac{3}{4}\mu, \ C_1 = C_{m-1} = \frac{5 + 2\sqrt{6}}{4}\mu, \tag{4.12}$$

$$C_i = \mu\sqrt{6} \qquad (i = 2, 3, \ldots, m - 2).$$

Din (4.4) și (4.10) se obține

$$E_{m+1}(W_{L_2}^{(2)}(M_{22}; 0,1)) = \frac{\mu^2}{2\sqrt{5}} M_{22}. \tag{4.13}$$

Cum nodurile (4.11) şi coeficienţii (4.12) sînt unic determinaţi, iar polinomul $T_2(x) = \frac{x^2}{2} - \sum_{k=0}^{i-1} C_k(x - x_k)$ $(i = 2, 3, \ldots, m-1)$ coincide, pentru aceste valori ale lui x_i şi C_i, cu polinomul care se abate cel mai puţin de la zero în metrica lui L_2 pe intervalul corespunzător $[x_{i-1}, x_i]$ $(i = 2, 3, \ldots, m-1)$, are loc

TEOREMA 4. *Formula de cuadratură de tipul* (1), *avînd gradul de exactitate egal cu unu, optimală pentru clasa de funcţii* $W_{L_2}^{(2)}(M_{22}; 0,1)$ *este aceea a căre noduri şi coeficienţi sînt daţi de expresiile* (4.11) *şi* (4.12), *iar restul formulei est dat de* (4.1).

Graficul funcţiei φ, corespunzătoare formulei de cuadratură optimale are forma din fig. 2 şi se bucură de proprietatea că aria domeniului haşurat situat deasupra axei ox este egală cu aria domeniului haşurat situat sub axa ox.

(Intrat în redacţie la 10 iulie 1969)

BIBLIOGRAFIE

1. M.B. Aksen, A.H. Tureţki, *O nailucişih kvadraturnîh formulah dlia nekotorîh klassov funkţii* Dokladî AN SSSR, 166, nr. 5, 1966, p. 1019–1021.
2. I.S. Berezin, N.P. Jidkov, *Metodî vîcislenia*, 1, Moskva, 1966.
3. G.Ja. Doronin, *K voprosu o formulah mehaniceskih kvadratur*. Sb. nauci. trudov Dneprop. inj.-str. inst., nr. 1–2, 1955, p. 210–217.
4. I.I. Ibragimov, R.M. Aliev, *Nailucişie kvadraturnîe formulî dlia nekotorîh klassov funkţii*. Dokladî AN SSSR, 162, nr. 1, 1965, p. 23–25.
5. D.V. Ionescu, *Cuadraturi numerice*. Bucureşti, 1957.
6. V.I. Krylov, *Priblijennoe vîcislenie integralov*. Moskva, 1962.
7. F. Meyers, A. Sard, *Best approximate integration formulas*, Journal of Mathematics and Physics, 29, nr. 2, 1950, p. 118–123.
8. S.M. Nikolski, *K voprosu ob oţenkah priblijenii kvadraturnîmi formulami*. Uspehi matem. nauk 5, vîp. 2 (36), 1950, p. 165–177.
9. S.M. Nikolskij, *Kvadraturnîe formulî*. Moskva, 1958.
10. A. Sard, *Best approximate integration formulas, best approximation formulas*, American Journal of Mathematics, 71, nr. 1, 1949, p. 80–91.
11. T.A. Saidaeva, *Kvadraturnîe formulî s naimenşei oţenkoi ostatka dlia nekotorîh klassov funkţii*. Trudî matem. inst. im. V.A. Steklova, 53, 1959, p. 313–341.

О НЕКОТОРЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

(Резюме)

В работе изучается квадратурная формула вида (1), замкнутого типа, оптимальная для класса $W_{L_p}^{(r)}(M_{pr}; 0,1)$ функций, определённых в промежутке [0,1] имея производную порядка $r-1$, абсолютно непрерывную, и производную порядка r, $f^{(r)}(x)$ со свойством $\|f^{(r)}(x)\|_{L_p} \leqslant M_{pr}$, в случаях 1. $p = 1$, $r = 1$; 2. $p = 1$, $r = 2$; 3. $p = 2$, $r = 1$; 4. $p = 2$, $r = 2$ в предположении, что степень точности формулы равна $r - 1$.

Доказывается, что в случаях 1. и 3. оптимальная квадратурная формула является формула трапеций с остатком, данным в (1.15), соответственно в (3.13). В случае 2. оптимальная формула имеет узлы и коэффициенты, данные в (2.14), соответственно в (2.15) и остаток в (2.16), а в случае 4. узлы и коэффициенты оптимальной формулы даны в (4. 11), соответственно в (4.12) и остаток в (4.13).

SUR CERTAINES FORMULES OPTIMALES DE QUADRATURE

(Résumé)

Dans le présent travail on étudie la formule de quadrature de forme (1), de type fermé, optimale pour la classe $W^{(r)}_{L_p}(M_{pr};\ 0, 1)$ des fonctions définies sur le segment [0, 1], ayant la dérivée d'ordre $r-1$ absolument continue et la dérivée d'ordre r, $f^{(r)}(x)$ avec la propriété $||f^{(r)}(x)||_{Lp} \leqslant M_{pr}$, dans les cas 1. $p = 1$, $r = 1$; 2. $p = 1$, $r = 2$; 3. $p = 2$, $r = 1$; 4. $p = 2$, $r = 2$; et dans l'hypothèse où le degré d'exactitude de la formule est égal à $r - 1$.

On démontre que dans les cas 1. et 3. la formule de quadrature optimale est la formule du trapèze avec le reste donné respectivement par (1.15) et (3. 13). Dans le cas 2. la formule optimale a les noeuds et les coefficients donnés respectivement par (2.14) et (2.15) et le reste par (2.16); enfin, dans le cas 4. les noeuds et les coefficients de la formule optimale sont donnés respectivement par (4.11) et (4.12), et le reste par (4.13).

UN PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA PROGRAMMATION LINÉAIRE A PLUSIEURS FONCTIONS ÉCONOMIQUES

par

I. MARUŞCIAC et M. RĂDULESCU

1. Dans les problèmes économiques dans lesquels nous sommes conduits à maximiser simultanément plusieurs fonctions économiques soumises aux restrictions linéaires, on peut poser le problème de l'efficacité économique sous divers points de vue. Ainsi, par exemple, on peut demander que la plus petite parmi les fonctions économiques soit, sous les restrictions données, la plus grande possible. Un tel problème a été abordé par S. I. Zuhovitzi [6] et E. I. Remez, A. S. Steinberg [5], qui ont donné de même un algorithme fini pour ce problème, basé sur la méthode simplexe.

Mais cette manière de poser le problème de la programmation mathématique n'a pas toujours une justification économique, parce que les fonctions économiques ne peuvent pas être toujours comparables, comme on le voit, par exemple, dans le problème de la programmation linéaire, dans lequel il faut maximiser le volume de la production et minimiser le prix de revient, simultanément. On voit qu'ici les deux fonctions économiques (le volume de la production et le prix de revient) ne peuvent pas être comparées directement. Mais on peut trouver certains indicateurs grâce auxquels les deux fonctions économiques peuvent être comparées et par conséquent on peut utiliser l'algorithme de Zuhovitzki. Cependant cette méthode comporte d'autres difficultés pratiques ; voilà pourquoi elle devient parfois difficile à appliquer effectivement.

Dans certaines conditions, on peut établir une relation entre les fonctions économiques, et alors le problème de la programmation mathématique revient au problème d'optimisation de la fonction ainsi obtenue, soumise aux restrictions données.

Une autre manière de poser le problème, qui paraît la plus naturelle, a été formulée pour la première fois par A. Charnes et W. Cooper [2, 3]: elle consiste dans la détermination d'un tel appel à des programmes efficients. Le problème consiste dans la détermination des points du domaine des solutions des restrictions, qui ont certaines propriétés d'efficacité. Plus tard, en 1963 ce problème a été repris par P. Bod [1] qui donne de même un algorithme pour la détermination des programmes efficients.

Dans cette note nous donnons un nouvel algorithme pour la détermination des „points efficients" des inégalités auxquelles les variables indépendantes sont soumises. Cet algorithme part d'un point arbitraire de ce domaine et permet d'obtenir toujours un ensemble de points efficients.

2. Considérons les vecteurs-fonctions

$$y = Cx, \tag{1}$$

où $y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)$ et $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sont des vecteurs-colonnes de R^p et R^n respectivement, et C est une matrice numérique donnée d'ordre $p \times n$. Les vecteurs (points) sont soumis aux restrictions

$$Ax \leqslant b, \tag{2}$$

où A est une matrice numérique donnée d'ordre $m \times n$, et $b = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ — un vecteur colonne donné de R_m.

Soit

$$\overline{\Omega} = \{x | Ax \leqslant b\}$$

et

$$Y = \{y | y = Cx\,;\; x \in \overline{\Omega}\}.$$

On introduit dans l'ensemble Y la relation d'ordre naturel, c'est à dire,

$$y' \leqslant y''$$

si

$$\forall k,\; k \in \{1, 2, \ldots, p\},\; y'_k \leqslant y''_k.$$

On a $y' < y'$ si $y' \leqslant y''$ et

$$\exists j,\; j \in \{1, 2, \ldots, p\},\; y'_j < y''_j.$$

DÉFINITION 1. *Un point* $x^0 \in \overline{\Omega}$ *s'appelle efficient par rapport à* Y, *si pour chaque point* $x \in \overline{\Omega}$, *de*

$$y = y(x) \geqslant y^0 = y(x^0),$$

où

$$y = Cx, \quad y^0 = Cx^0,$$

il résulte

$$y = y^0.$$

Par conséquent, $x^0 \in \overline{\Omega}$ est un point efficient s'il n'existe aucun point $x \in \overline{\Omega}$ dans lequel toutes les fonctions $y_k(x)$, $k = (1, 2, \ldots, p)$, sont au moins égales à $y_k(x^0)$, $(k = 1, 2, \ldots, p)$, au moins l'une d'elles $y_{k_0}(x)$ étant strictement plus grande que $y_{k_0}(x^0)$.

a) Considérons maintenant le problème suivant: trouver un point $x^0 \in \overline{\Omega}$ tel que

$$\forall x,\; x \in \overline{\Omega},\; f(x^0) \geqslant f(x), \tag{3}$$

où

$$f(x) = \min_{1 \leqslant k \leqslant p} y_k(x).$$

DÉFINITION 2. *Un point $x^0 \in \overline{\Omega}$ dans lequel (3) a lieu s'appelle optimal par rapport à Y.*

THÉORÈME 1. *Chaque point optimal par rapport à $Y: x^0 \in \overline{\Omega}$ est aussi un point efficient par rapport à Y.*

En effet, si x^0 est un point optimal, alors de la définition 2. il résulte que (3) est satisfaite. Si x^0 n'est pas un point efficient, alors il résulte de la définition 1, qu'il existe un point x tel que $y(x) > y(x^0)$, c'est-à-dire

$$\forall k,\ k \in \{1, 2, \ldots, p\},\ y_k(x) \geqslant y_k(x^0)$$

et

$$\exists i,\ i \in \{1, 2, \ldots, p\},\ y_i(x) > y_i(x^0).$$

Mais alors, on a

$$f(x) = \min_{1 \leqslant k \leqslant p} y_k(x) > \min_{1 \leqslant k \leqslant p} y_k(x^0) = f(x^0),$$

ce qui contredit le fait que x^0 est un point optimal par rapport à Y.

b) Considérons maintenant une application

$$F : R^p \rightarrow R,$$

continue et monotone-croissante par rapport à la relation d'ordre partiel introduite dans Y, c'est-à-dire, si

$$y' < y'' \Rightarrow F(y') < F(y'').$$

DÉFINITION 3. *Un point $x^0 \in \overline{\Omega}$ s'appelle extrémal pour la fonction F, si*

$$\forall x, x \in \overline{\Omega} \Rightarrow F(y) \leqslant F(y_0). \tag{4}$$

THÉORÈME 2. *Chaque point extrémal $x^0 \in \overline{\Omega}$ pour une fonction F continue et monotone — croissante dans Y est aussi un point efficient.*

En effet, si $x^0 \in \overline{\Omega}$ est un point extrémal pour la fonction F monotone dans Y, alors (4) est vérifiée. Si nous supposons que x^0, n'est pas efficient, alors il résulte qu'il existe $x \in \overline{\Omega}$ tel que on a $y(x) > y(x^0)$. Mais du fait que F est monotone — croissante dans Y, il résulte qu'on a $F(y) > F(y^0)$ ce qui contredit le fait que x^0 est un point extrémal pour F.

Remarque 1. La fonction du point a)

$$f(x) = \min_{1 \leqslant k \leqslant p} y_k(x)$$

est évidemment monotone — croissante. De même la fonction-moyenne pondérée de l'ordre $2q + 1$:

$$g(y) = \left(\sum_{k=1}^{p} \mu_k\, y^{2q+1}\right)^{\frac{1}{2q+1}}$$

où q est un entier non négatif et $\mu_k > 0$, avec

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_p = 1,$$

est aussi monotone-croissante, comme on peut immédiatement le vérifier.

On voit par les Théorèmes 1 et 2 que le problème de la détermination des points efficients est un problème très général qui englobe la majorité des problèmes extrémaux rencontrés dans la programmation mathématique appliquée à l'économie. Voilà pourquoi nous nous proposons dans cette note de donner un algorithme fini qui permette la détermination de l'ensemble des points efficients de $\overline{\Omega}$.

D'abord nous donnons deux théorèmes qui constituent les critères d'efficience pour les programmes économiques et sur lesquels est basé notre algorithme.

THÉORÈME 3. *Un point $x \in \Omega$ est efficient par rapport à Y si et seulement si le système des inégalités*

$$ug^k - \varepsilon \geqslant 0, \quad k = 1, 2, \ldots, p \tag{5}$$

est incompatible, quel que soit $\varepsilon > 0$, où

$$g^k = (c_{k1}, c_{k2}, \ldots, c_{kn}), \qquad k = 1, 2, \ldots, p$$

et $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in R^n$.

Nécessité. Soit $x^0 \in \Omega$ un point efficient par rapport à Y. Alors il résulte que pour chaque point $x \in \overline{\Omega}$, de

$$y > y_0 \Rightarrow y = y_0,$$

c'est-à-dire dans la direction $u = [x^0, x]$ au moins une fonction économique $y_k(x)$ décroit. Par conséquent, il existe $k_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$, tel que

$$ug^{k_0} < 0. \tag{6}$$

Parce que (6) a lieu quel que soit $x \in \overline{\Omega}$, c'est-à-dire, quel que soit $u = [x^0, x]$, il résulte que le système (5) est incompatible si $\varepsilon > 0$.

Suffisance. Supposons que le système (5) soit incompatible quel que soit $\varepsilon > 0$. Soit $x^0 \in \Omega$ et $x \in \overline{\Omega}$ deux points arbitraires. On considère la direction $u = [x_0, x]$. Parce que le système (5) est incompatible, quelque soit $\varepsilon > 0$, il résulte qu'il existe $k_0 \in \{1, 2, \ldots, p\}$, de sorte que la relation (6) a lieu, c'est-à-dire

$$y_{k_0}(x) < y_{k_0}(x^0).$$

Par conséquent, de

$$y(x) \geqslant y(x^0) \Rightarrow y(x) = y(x^0).$$

Donc $x^0 \in \Omega$ est un point efficient.

Soit

$$\Gamma_q \{= x | a^i x = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, q\,;\ a^j x < b_j, \ j > q\}.$$

Il est évident que $\Gamma_q \subset \Omega$. Nous avons pour les points $x \in \Gamma_q$ le critère suivant.

THÉORÈME 4. *Un point $x^0 \in \Gamma_q$ est efficient par rapport à Y si et seulement si le système des inégalités*

$$ug^k - \varepsilon \geqslant 0, \ k = 1, 2, \ldots, p \tag{7}$$

$$ua_i \leqslant 0, \ i = 1, 2, \ldots, q \tag{8}$$

où

$$a^i = (a_{i1}, a_{\ 2}, \ldots, a_{in}), \quad i = 1, 2, \ldots, q$$

est incompatible quel que soit $\varepsilon > 0$.

Nécessité. Si $x^0 \in \Gamma_q$ est efficient par rapport à Y, alors d'un raisonnement analogue à celui de la démonstration du Théorème 3, il résulte que le système (7)—(8) est incompatible quel que soit $\varepsilon > 0$.

Suffisance. Supposons que le système (7)—(8) correspondant pour le point $x_0 \in \Gamma_q$ est incompatible quel que soit $\varepsilon > 0$. Alors x étant un point arbitraire de $\overline{\Omega}$, considérons la direction $u = [x^0, x]$. Parce que $x^0 \in \Gamma_q$ et $x \in \overline{\Omega}$, il résulte que le système (7) est incompatible quel que soit $\varepsilon > 0$. Mais alors du Théoreme 3 il résulte que x_0 est un point efficient.

Remarque 1. Des Théorèmes 3 et 4 il résulte que si un point $x \in \Omega$ (strictement intérieur de Ω) est efficient, alors tout le domaine fermé $\overline{\Omega}$ est formé des points efficients. Si $x^0 \in \Gamma_q$ est efficient alors chaque point $x \in \Gamma_q$ est aussi efficient. Ceci parce que le système (7)—(8) ne dépend pas du point $x^0 \in \Gamma_q$, mais seulement de l'arête Γ_q sur laquelle est situé le point x^0. De cette remarque il résulte de même que si un point intérieur $x \in \Omega$, n'est pas efficient, alors l'ensemble des points d'efficience est situé sur la frontière de Ω.

Soit $\Gamma = fr(\overline{\Omega})$ et $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, où Γ_1 est l'ensemble des points efficients par rapport à Y et Γ_2 l'ensemble des points non efficients. Evidemment

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \Phi$$

et nous avons le

THÉORÈME 5. *L'ensemble des points efficients Γ_1 est un ensemble simplement connexe.*

En effet, on peut évidemment supposer que $\Gamma_2 \neq \emptyset$, car autrement la propriété est évidente. Mais si $\Gamma_2 \neq \emptyset$, alors il résulte que les points intérieurs de Ω ne sont pas efficients et par conséquent le systéme des inégalités

$$ug^k \geqslant \varepsilon > 0 \qquad k = 1, 2, \ldots, p$$

a au moins une solution u^0 c'est-à-dire

$$u^0 g^k \geqslant \varepsilon, \quad k = 1, 2 \ldots, p.$$

Soit U^0 l'ensemble des droites orientées paralèllement au vecteur u^0. Un point $x \in \Gamma$ s'appelle *point d'appui pour la famille* U^0 s'il existe une droite $u \in U^0$ telle que $x \in u \cap \overline{\Omega}$ et $u \cap \Omega = \emptyset$. Désignons par $\Gamma^0 = \Gamma(U^0)$ l'ensemble de points d'appui pour U^0. Si $u \in U^0$ pour lequel $u \cap \Omega = \emptyset$, alors la droite u, parce que $\overline{\Omega}$ est un domaine convexe, pique la frontière Γ en deux points x^- et x^+, où le vecteur $[x^-, x^+]$ a la même orientation que u^0.

Soient $\Gamma^- = \Gamma^-(U^0)$ et $\Gamma^+ = \Gamma^+(U^0)$ les ensembles des points x^- et x^+, respectivement correspondants aux vecteurs $u \in U^0$. Evidemment que

$$\Gamma = \Gamma^- \cup \Gamma^0 \cup \Gamma^+$$

et les ensembles Γ^-, Γ^0. Γ^+ sont disjoints deux par deux. Nous allons montrer que Γ^+ est un ensemble simplement connexe. En effet, soit $\overline{x}^+, \overline{\overline{x}}^+ \in \Gamma^+$. A ces deux points correspondent deux points $\overline{x}^-, \overline{\overline{x}}^- \in \Gamma^-$. Si nous prenons $x' \in [\overline{x}^-, \overline{x}^+] \cap \Omega$, $x'' \in [\overline{\overline{x}}^-, \overline{\overline{x}}^+] \cap \Omega$, alors, quand le point z parcourt le segment $[x', x'']$ le point z^+ décrit une courbe plane sur Γ^+ entre les points $\overline{x}^+$ et $\overline{\overline{x}}^+$ Ce qui montre que l'ensemble Γ^+ est simplement connexe.

Maintenant, étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, désignons par U l'ensemble des solutions du système des inégalités

$$ug^k \geqslant \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

et par

$$\Gamma_1 = \bigcap_{u \in U} \Gamma^+(u).$$

Il est évident que Γ_1, étant une intersection des ensembles simplement connexes, est un ensemble simplement connexe. Nous allons montrer encore que Γ_1 coïncide avec l'ensemble des points efficients par rapport à Y.

En effet, si $x \in \Gamma_1$ alors il résulte que $x \in \Gamma^+(u)$ quel que soit u pour lequel $ug^k - \varepsilon \geqslant 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Mais parce que le domaine Ω est convexe, il résulte qu'il existe au moins un hyperplan $P_{i_0} \ni x$ tel que

$$ua^{i_0} > 0.$$

Par conséquent le système

$$ug^k \geqslant \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, p$$

$$ua_{i_0} \leqslant 0$$

est incompatible, donc x est un point efficient par rapport à Y. On peut vérifier aussi que chaque point efficient par rapport à Y est contenu dans Γ_1 et ainsi le théorème 5 est démontré.

3. Dans ce qui suit nous allons donner un algorithme fini, basé sur les Théorèmes 3 et 4, qui permette toujours la détermination d'un ensemble de points efficients par rapport à Y.

1°. Il faut d'abord vérifier la compatibilité du système (5). Si ce système est incompatible quel que soit $\varepsilon > 0$, alors tous les points $x \in \bar{\Omega}$ sont efficients. Si le système (5) est compatible, alors on procède comme au point 2°.

2°. Soit $x_0 \in \Gamma_q$, $q \in \{0, 1, \ldots, p\}$, un point arbitraire. On considère le système (7)—(8) correspondant au point x^0. Si ce système est incompatible quel que soit $\varepsilon > 0$, alors chaque point x de l'arête Γ_q est efficient. Il est évident que si Γ_q est un sommet de Ω et si le système (7)—(8) est incompatible, alors l'ensemble des points efficients se réduit à un seul point.

Si le système (7)—(8) est compatible, alors on résoud le problème de la programmation linéaire

$$\max z, \qquad z = \varepsilon$$

où $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ vérifie les inégalités (7)—(8) et

$$|u_k| \leqslant M, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

M étant un nombre réel donné.

Si $u^0 = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0)$ est une solution du problème de la programmation linéaire considérée, soit

$$x = x^0 + tu^0, \qquad t > 0.$$

Puis on calcule les valeurs t_j des égalités

$$a^j x^0 + t_j a^j u^0 = b_j\,; \qquad j > q.$$

Soit

$$\tau = \min_{(t_j > 0)} t_j.$$

Le nouveau point d'approximation sera $x^1 = x^0 + \tau u^0$. Dans ce cas, puisque

$$\forall i, \quad i \in \{1, 2, \ldots, p\} : u^0 g^k \geqslant \varepsilon > 0,$$

on a

$$y(x^1) > y(x^0).$$

On remarque aussi que x^1 appartient à la frontière de $\overline{\Omega}$, c'est pourquoi l'algorithme consiste en un nombre fini de pas, comme dans le cas de la méthode de simplexe. L'algorithme consiste dans la détermination des points d'approximation successive indiquée dans le point 2°. Après un nombre fini de pas on peut toujours obtenir un point efficient et, simultanément, en conformité avec la Remarque 1, un ensemble de points efficients.

Pour l'application effective de la méthode de simplexe on ajoute aux restrictions (7), (8) et (9) l'inégalité

$$\varepsilon \geqslant \varepsilon_0,$$

où $\varepsilon_0 > 0$ est un nombre suffisamment petit, qui dépend de la précision du calcul.

4. Pour illustrer la méthode proposée nous allons donner deux exemples.

Exemple 1. Trouver le maximum des fonctions [1]

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + x_2 \\ y_2 &= 2x_1 + 5x_2 \\ y_3 &= x_1 + 3x_2 \end{aligned} \tag{10}$$

où $x = (x_1, x_2)$ vérifie les inégalités

$$\begin{aligned} 10x_1 + 5x_2 &\leqslant 800 \\ 10x_1 + 25x_2 &\leqslant 1200 \\ x_1 - 50 &\geqslant 0 \\ x_2 - 20 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Ces restrictions peuvent être écrites encore sous la forme

$$\overline{\Omega}: \quad \begin{aligned} -10x_1 - 5x_2 + 800 &\geqslant 0 \\ -10x_1 - 25x_2 + 1200 &\geqslant 0 \\ x_1 \qquad - 50 &\geqslant 0 \\ x_2 - 20 &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Soit $x^0 = (50,20)$ un point de $\overline{\Omega}$. On a

$$g^1 = (1,1), \qquad g^2 = (2,5), \qquad g^3 = (1,3).$$

Les restrictions supplémentaires que nous ajoutons seront :

$$\varepsilon > \frac{1}{100}, \quad |u_k| \leqslant 100, \quad k = 1, 2, 3.$$

Alors, parce que

$$\Gamma_2 = \{x | x_1 = 50,\ x_2 = 20 ;\ 10x_1 + 5x_2 < 800,\ 10x_1 + 25x_2 < 1200\},$$

il faut résoudre le problème de la programmation linéaire :

$$\max z, \qquad z = \varepsilon,$$

dans les conditions

$$\begin{array}{rrrr} u_1 + & u_2 - & \varepsilon & \geqslant 0 \\ 2u_1 + & 5u_2 - & \varepsilon & \geqslant 0 \\ u_1 + & 3u_2 - & \varepsilon & \geqslant 0 \\ -u_1 & & + 100 & \geqslant 0 \\ & -u_2 & + 100 & \geqslant 0 \\ & 100\varepsilon - & 1 & \geqslant 0 \\ u_1 & & & \geqslant 0 \\ & u_2 & & \geqslant 0 \end{array} \tag{13}$$

Avec la méthode de simplexe, on trouve que ce problème a une solution :

$$\varepsilon = 200, \qquad u = (100,\ 100).$$

Si on calcule les valeurs des t_j, on a respectivement

$$t_1 = \frac{2}{15}, \quad t_2 = \frac{2}{35}, \quad t_3 = t_4 = 0,$$

d'où

$$\tau = \frac{2}{35}$$

et par conséquent

$$x_1^1 = 50 + \frac{40}{70} = \frac{390}{7}$$

$$x_2^1 = 20 + \frac{40}{70} = \frac{180}{7}.$$

En écrivant le système (7)—(8) correspondant à x^1, on a

$$\begin{aligned}
u_1 + u_2 - \varepsilon &\geqslant 0 \\
2u_1 + 5u_2 - \varepsilon &\geqslant 0 \\
u_1 + 3u_2 - \varepsilon &\geqslant 0 \\
-2u_1 - 5u_2 &\geqslant 0 \\
-u_1 + 100 &\geqslant 0 \\
-u_2 + 100 &\geqslant 0 \\
100\varepsilon - 1 &\geqslant 0 \\
u_1 &\geqslant 0 \\
u_2 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Mais ce système est incompatible parce que l'inégalité $2u_1 + 5u_2 - \varepsilon \geqslant 0$ contredit les inégalités $-2u_1 - 5u_2 \geqslant 0$, $100\varepsilon - 1 \geqslant 0$. Par conséquent x^1 est un point efficient et simultanément le segment de droite

$$-10x_1 - 25x_2 + 1200 = 0$$

de $\overline{\Omega}$, sur lequel se trouve x^1. Puisque $x' = (50,28)$, $x'' = (70,20)$ sont les extrémités de ce segment, il résulte que l'ensemble des points efficients est

$$x = \lambda x' + (1 - \lambda)x'', \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Exemple 2. Maximiser les fonctions

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2x_1 - x_2 \\
y_2 &= -2x_1 - x_2 \\
y_3 &= x_1 + 3x_2
\end{aligned}$$

sous les restrictions

$$\begin{aligned}
x_1 &\geqslant 0 \\
x_2 &\geqslant 0 \\
x_1 + 2x_2 - 2 &\geqslant 0 \\
x_1 - x_2 + 11 &\geqslant 0 \\
-x_1 + 3 &\geqslant 0 \\
-2x_1 + x_2 + 8 &\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Nous avons

$$g^1 = (2, -1), \quad g^2 = (-2, -1), \quad g^3 = (1, 3).$$

Donc (7) devient

$$\begin{aligned} v_1 &= & & 100\varepsilon - 1 \geqslant 0 \\ v_2 &= 2u_1 - u_2 - & & \varepsilon \geqslant 0 \\ v_3 &= -2u_1 - u_2 - & & \varepsilon \geqslant 0 \\ v_4 &= u_1 + 3u_2 - & & \varepsilon \geqslant 0. \end{aligned} \tag{14}$$

En écrivant le tableau de simplexe

	$-u_1$	$-u_2$	$-\varepsilon$	1
$v_1 =$	0	0	-100	-1
$v_2 =$	-2	1	1	0
$v_3 =$	2	1	1	0
$v_4 =$	-1	-3	1	0

et en effectuant trois pas d'élimination Jordan, on obtient

	$-v_3$	$-v_2$	$-v_4$	1
$v_1 =$	700	7600	1600	-64
$u_2 =$	1	12	-16	0
$u_1 =$	1	-4	0	0
$\varepsilon =$	7	20	16	0

ce qui montre que de $v_2 \geqslant 0$, $v_3 \geqslant 0$, $v_4 \geqslant 0$ il résulte toujours, $v_1 < 0$. Par conséquent le système (14) est incompatible. Donc chaque point $x \in \bar{\Omega}$ est efficient.

(Manuscrit reçu le 9 mai 1969

BIBLIOGRAPHIE

1 Bod P., *Lineáris programozás több egyidejüleg adott célfüggvény szerint.* „Magy. Tud. Akad. Mat. Kut. Intéz. Közlem.", VIII, b. 4 (1963), 541–556.
2. Charnes A. – Cooper W., *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming.* „Management Science", 4 (1957), 38–92.
3. Charnes A. – Cooper W., *Management Models and Industrial Application of Linear Programming,* I–II. John. Wiley, New York, 1961.
4. Maruşciac I. – Rădulescu M., *Un problème de la programmation quadratique à plusieurs fonctions.* „Studia Univ. Babeş-Bolyai" 1, (1970), 81–89
5. Remez E. Ia. – Steinberg A. C., *Pro deiaki ekstremalni zadaci uzagalneno-cebişovskovo tipu ta pro metod zrivnialnih spuskiv,* Dopovidi A.N.U.P.S.P., 8 (1961), 983–987.
6. Zuhoviţkii S. I., *Algoritm dlia reşenia odnoi obobşcionnoi zadaci lineinovo programmirovania,* D.A.N.S.S.S.R., 133, 1 (1960).
7. Zuhoviţkii S. I. – Avdeeba L. I., *Lineinoe i vîpukloe programmirovanie.* Moscova, 1964

O PROBLEMĂ GENERALĂ DE PROGRAMARE LINIARĂ CU MAI MULTE FUNCȚII DE SCOP

(Rezumat)

Se dă un algoritm pentru găsirea unei mulțimi de puncte eficiente pentru o problemă generală de programare liniară cu mai multe funcții de scop. Printr-un punct eficient se înțelege un punct din domeniul $\bar{\Omega}$ al soluțiilor sistemului de inegalități (2) pentru care funcțiile de scop sînt toate maxime într-un anumit sens precizat de Definiția 1. Pentru ilustrarea algoritmului se dau două exemple. Într-un caz întreg domeniul $\bar{\Omega}$ este format din puncte eficiente, iar în celălalt mulțimea punctelor eficiente se află pe o muchie a frontierei lui Ω.

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Резюме)

Даётся алгоритм для нахождения одного множества эффективных точек для общей задачи линейного программирования с несколькими целевыми функциями. Под эффективной точкой понимаем точку из области $\bar{\Omega}$ решений системы неравенств (2), для которой целевые функции являются все максимальными в определённом смысле, уточнённом определением 1. Для иллюстрации алгоритма даются 2 примера. В одном случае вся область $\bar{\Omega}$ составлена из эффективных точек, а в другом случае множество эффективных точек находится на грани границы Ω.

CONTRIBUTIONS TO THE INTERPRE TATIONOF THE LIGHT CURVES OF THE CLOSE BINARY SYSTEMS. IV.

The ellipticity effect and the reflection effect

by

VASILE URECHE

In the present paper, which is a continuation of three previous papers* [7], [8], [9], we will deal with the light variation of the close binary system during the orbital movement, variation which is independent of eclipses (''ellipticity effect'') and with the light variation due to reflection (''reflection effect'').

A. Ellipticity effect

1. *The luminosity of a component at a given moment.* If we extend the integral (III.8) over the whole visible ''hemisphere'', at a given moment of the considered component (let's say the primary component), then we will obtain the luminosity $L(\psi)$ of this component at the corresponding moment. In this case the domain of the integration is the interior of the ellipse having the equation (II.10). The functions $D_k^j(x)$ defined in Paper III take a simple form, and the integration in the formulae (III.19), (III.20) can be effected exactly. The result is the following

$$L(\psi) = (1-u)L^U(\psi) + uL^D(\psi), \tag{1}$$

where (in the limits of the accuracy considered in Papers I, II and III)

$$L^U(\psi) = \pi b^2 H_0 \left\{ 1 - (1+\tau)\left[\frac{3}{2} l_3^2 w^{(2)} - \frac{1}{2} n_3^2 v^{(2)} - \frac{1}{2} w^{(2)} + \frac{1}{6} v^{(2)}\right] + w^{(2)} - \frac{1}{3} v^{(2)} \right\}, \tag{2}$$

$$L^D(\psi) = \frac{2}{3}\pi b^2 H_0 \left\{ 1 - \frac{8}{5}(1+\tau)\left[\frac{3}{2} l_2^3 w^{(2)} - \frac{1}{2} n_3^2 v^{(2)} - \frac{1}{2} w^{(2)} + \frac{1}{6} v^{(2)}\right] + w^{(2)} - \frac{1}{3} v^{(2)} \right\}. \tag{3}$$

Introducing the expression (2) and (3) in (1) we obtain

$$L(\psi) = \frac{3-u}{3}\pi b^2 H_0 \left\{ 1 - \frac{15+u}{5(3-u)}(1+\tau)\left[\frac{3}{2} l_3^2 w^{(2)} - \frac{1}{2} n_3^2 v^{(2)} - \frac{1}{2} w^{(2)} + \frac{1}{6} v^{(2)}\right] + w^{(2)} - \frac{1}{3} v^{(2)} \right\} \tag{4}$$

---

* Hereafter these papers will be called ''Paper I'', ''Paper II'' and ''Paper III'' respectively. A formula from these papers will be indicated by the corresponding order number preceded by the number of paper.

Thus we have recovered in (4) the results obtained by R u s s e l l [5] and then by K o p a l [1], [4]. The presence of the last two terms is explained by the fact that we have effected the computations in function of the mean semiaxes b of the corresponding ellipsoid, while Kopal has effected the computations in function of the radius of the sphere having the volume equal to the volume of the actual star.

The equation (4) shows us that the luminosity of the considered component varies with phase angle (which enters in l_3), having the maximum value $L_{\max} = L(\pi/2) = L(3\pi/2)$. We will name this value the luminosity of the considered component: L. Because $n_3 = \cos i$ we have

$$L = \frac{3-u}{3}\pi b^2 H_0\left\{1 + \frac{15+u}{5(3-u)}(1+\tau)\left[\frac{1}{2}v^{(2)}\cos^2 i + \frac{1}{2}w^{(2)} - \frac{1}{6}v^{(2)}\right] + w^{(2)} - \frac{1}{3}v^{(2)}\right\}. \tag{5}$$

From the equation (5) we can obtain the quantity H_0 (if the other quantities are known from a preliminary orbit computation) in order to be used in the equations (III.19), (III.20). With considered accuracy we have

$$H_0 = \frac{3}{3-u}\cdot\frac{L}{\pi b^2}h(u,\tau), \tag{6}$$

where

$$h(u,\tau) = 1 - \frac{15+u}{5(3-u)}(1+\tau)\left[\frac{1}{2}v^{(2)}\cos^2 i + \frac{1}{2}w^{(2)} - \frac{1}{6}v^{(2)}\right] - w^{(2)} + \frac{1}{3}v^{(2)}. \tag{7}$$

Then from the equations (4) and (5) we obtain (with the same accuracy)

$$L(\psi) = L\left\{1 - \frac{15+u}{5(3-u)}(1+\tau)\cdot\frac{3}{2}l_3^2 w^{(2)}\right\}. \tag{8}$$

The equation (8) describes the variation of the luminosity of the primary component during the orbital movement, variation which is independent of eclipses. The formulae above obtained can also be applied to the secondary component, if we use the data concerning this component (then we obtain L', H_0', etc.).

2. *The light variation of the system during the orbital movement.* Taking, as usually, the sum of the luminosities of components as luminosity unit: $L + L' = 1$, and taking into account that $l_3 = \cos\psi \sin i$, for total luminosity of the system $L_{\text{tot}}(\psi)$ on the basis of the equation (8) we obtain

$$L_{\text{tot}}(\psi) = 1 - C\cos^2\psi, \tag{9}$$

where C, "ellipticity factor", is given by

$$C = \frac{3}{2}\left\{\frac{15+u}{5(3-u)}(1+\tau)w^{(2)}L + \frac{15+u'}{5(3-u')}(1+\tau')w'^{(2)}L'\right\}\sin^2 i. \tag{10}$$

Thus for the variation of the luminosity of the system during the orbital movement (because of distortion of components) we have found again the known classical equation.

3. *The mean surface brightenings of the components.* In the second part (B) of the paper we will need the mean surface brightenings of the components. The corresponding expressions for distorted components obviously differ from the expressions for spherical model (sometimes this difference is omitted).

By mean surface brightening of one component (let's say the primary component) at a given moment, $J_{\mathrm{med}}(\psi)$, we will understand the quantity

$$J_{\mathrm{med}}(\psi) = \iint J \cos \gamma \, d\sigma \Big/ \iint_{\Sigma} \cos \gamma \, d\sigma, \tag{11}$$

the integrals being extended over the whole visible "hemisphere", at the given moment, of the considered component.

The numerator of the fraction (11) represents the luminosity of the considered component (at that moment) given by the equation (8), and the denominator represents the projection area of the considered component on the plane perpendicular to the line of sight (at the same moment) given by the equation (II.15).

Thus we obtain (with considered accuracy)

$$J_{\mathrm{med}}(\psi) = \frac{L}{\pi b^2}\left\{1 - \frac{15+u}{5(3-u)}(1+\tau) \cdot \frac{3}{2} l_3^2 w^{(2)} - \frac{3}{2} l_1^3 w^{(2)} + \frac{1}{2}(n_1^2 + n_2^2) v^{(2)}\right\}. \tag{12}$$

The equation (12) shows that the mean surface brightening varies with time (in contrast with the case of spherical model). If we use the equation (4), the equation (11) leads us to

$$J_{\mathrm{med}}(\psi) = \frac{3-u}{3} H_0 \left\{1 - \frac{15+u}{5(3-u)}(1+\tau)\left[\frac{3}{2} l_2^3 w^{(2)} - \frac{1}{2} n_3^2 v^{(2)} - \frac{1}{2} w^{(2)} + \frac{1}{6} v^{(2)}\right] + \right.$$
$$\left. + w^{(2)}\left[1 - \frac{3}{2} l_1^2\right] - \frac{1}{3} v^{(2)}\left[1 - \frac{3}{2}(n_1^2 + n_2^2)\right]\right\}. \tag{13}$$

The equation (13) shows the relation between $J_{\mathrm{med}}(\psi)$ and H_0. For spherical model J_{med} reduces to the known expression

$$\frac{3-u}{3} H_0 = \frac{L}{\pi b^2}.$$

The above equations are also valid for the secondary component introducing the data concerning this component.

B. Reflection effect

4. *The variation of the light by reflection, independently of eclipses.* The existence of the reflection effect at the close binary systems has been put in evidence by Dugan. A detailed analysis of this phenomenon has been effected by Kopal [3]. He has shown that since reflection effect has a small amplitude, the components of the binary system can be considered spherical, for his study. Transcribing the Kopal's results with the notations of the present work we have (with accuracy considered in Paper I)

$$L^*(\psi) = L'f\left\{\left[\frac{2}{3\pi} b^2 - \frac{1}{8} b^3\right] + \left[\frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{4} b^3\right] l_3 + \left[\frac{1}{3\pi} b^2 + \frac{3}{8} b^3\right] l_3^2\right\}, \tag{14}$$

$$L'^*(\psi) = Lf'\left\{\left[\frac{2}{3\pi} b'^2 - \frac{1}{8} b'^3\right] - \left[\frac{1}{3} b'^2 + \frac{1}{4} b'^3\right] l_3 + \left[\frac{1}{3\pi} b'^2 + \frac{3}{8} b'^3\right] l_3^2\right\}, \tag{15}$$

where $L^*(\psi)$ and $L'^*(\psi)$ represent the quantities of reflected light by primary component and by secondary component, respectively, in spectral range in which we have obtained the photometric observations; f and f' being the corresponding luminous efficiencies.

Kopal shows that if "reflection" consists of absorbtion and reemission, the luminous efficiencies are given by the formulae**

$$f = \left(\frac{J}{J'}\right)_\lambda \left(\frac{T'}{T}\right)^4, \; f' = 1/f, \tag{16}$$

where T and T' are the effective (mean) temperatures of the two components (which can be deduced from the corresponding spectres), while J_λ and J'_λ are the corresponding mean surface brightenings of the two components in the spectral range of photometric observations (with isofoto wavelength λ). Kopal recommends to deduce the ratio $(J/J')_\lambda$ starting from Planck's law, or using the "rectified" depth of the minima.

In order to avoid the errors which could proceed from the deviation of stellar radiation from laws of black body, or from unaccuracy of the "rectification" methods, we propose to deduce the ratio $(J/J')_\lambda$ starting from formula (12) which gives the mean surface brightening for a certain "hemisphere" of considered component.

Then for mutual illuminated "hemispheres" we shall have

$$\left(\frac{J}{J'}\right)_\lambda = \frac{J_{\mathrm{med}}\,(\psi = 0,\; i = \pi/2)}{J'_{\mathrm{med}}\,(\psi = \pi,\; i = \pi/2)}, \tag{17}$$

where, from (12)

$$J_{\mathrm{med}}(\psi = 0,\; i = \pi/2) = \frac{L}{\pi b^2}\left\{1 - \frac{15 + u}{5(3 - u)}\,(1 + \tau) \cdot \frac{3}{2}\,w^{(2)} + \frac{1}{2}\,v^{(2)}\right\}, \tag{18}$$

$J'_{\mathrm{med}}(\psi = \pi,\; i = \pi/2)$ being given by an expression analogous with (18), but which contains the data concerning the secondary component. Thus the ratio $(J/J')_\lambda$ will be computed with (17) using the elements of a preliminary orbit.

Introducing $l_3 = \cos\psi \sin i$ in the formulae (14) and (15), summing the two equations and ordering the result after the powers of the vos ψ, we obtain for total quantity of light reflected by the components of the binary system at a given time moment $L^*_{\mathrm{tot}}(\psi) = L^*(\psi) + L'^*(\psi)$ — the expression

$$L^*_{\mathrm{tot}}(\psi) = \alpha - \beta\cos\psi + \gamma\cos^2\psi, \tag{19}$$

where in accordance with Kopal's notations

$$\alpha = Lf'\left[\frac{2}{3\pi}\,b'^2 - \frac{1}{8}\,b'^3\right] + L'f\left[\frac{2}{3\pi}\,b^2 - \frac{1}{8}\,b^3\right], \tag{20}$$

$$\beta = \left\{Lf'\left[\frac{1}{3}\,b'^2 + \frac{1}{4}\,b'^3\right] - L'f\left[\frac{1}{3}\,b^2 + \frac{1}{4}\,b^3\right]\right\}\sin i, \tag{21}$$

$$\gamma = \left\{Lf'\left[\frac{1}{3\pi}\,b'^2 + \frac{3}{8}\,b'^3\right] + L'f\left[\frac{1}{3\pi}\,b^2 + \frac{3}{8}\,b^3\right]\right\}\sin^2 i. \tag{22}$$

** If at the basis of the reflection there is electron scattering (this is the case for the stars of early spectral type), then $f = f' = 1$.

Thus the equation (19) describes the variation of the light reflected by the components of the binary system, variation which is independent of eclipses.

5. *The total variation of light of the close binary system between eclipses.* The total luminosity (intrinsic plus reflected) of the close binary system at a given time moment (between eclipses) will be

$$\mathfrak{L}(\psi) = L_{tot}(\psi) + L^*_{tot}(\psi) = 1 + \alpha - \beta \cos \psi - (C - \gamma) \cos^2 \psi. \tag{23}$$

For practical computation it is advantageous to normalize the quantity $\mathfrak{L}$ by division of the equation (23) with maximum value of $\mathfrak{L}$ which is attained at the quadratures***

$$\mathfrak{L}_{max} = \mathfrak{L}(\pi/2) = \mathfrak{L}(3\pi/2) = 1 + \alpha. \tag{24}$$

Because the reflection coefficients are small, we can neglect their squares and the joint products, so that from the equations (23) and (24) we obtain, noting $\mathfrak{L}(\psi)/\mathfrak{L}_{max} = l(\psi)$,

$$l(\psi) = 1 - \beta \cos \psi - [C(1 - \alpha) - \gamma] \cos^2 \psi, \tag{25}$$

considering that the product αC, generally is not negligible (C being usually with one order of size larger than the reflexion coefficients).

The equation (25) describes the variation of the luminosity of the close binary system between eclipses.

6. *The determination of the mass ratio from the variation of the light between eclipses.* The computation of the theoretical light curve starting from the formulae given in Paper III require the kowledge of the mass ratio of the components. This ratio can be determined from spectroscopic observations, in the case when both spectres can be observed. Otherwise the mass ratio can be determined from the variation of the light between eclipses with the method elaborated by K o p a l [4]. In what follows this method will be a little modified.

Thus, the variation of the light between eclipses is described by the equation (25) which gives us the quantity $l(\psi) = l_c$ (computed luminosity) at the considered time moment. On the other hand the observed luminosity between eclipses can be represented by equation

$$l_{obs} = c_0 - c_1 \cos \psi - c_2 \cos^2 \psi \tag{26}$$

where the coefficients c_0, c_1, c_2 are determined by the least squares method.

Normalizing the observed luminosity (by division of the equation (26) with c_0) and identifying the coefficient of term in $\cos^2 \psi$ with the coefficient of the corresponding term from equation (25) we obtain (taking into account that the higher powers of α as well as the product $\alpha\gamma$ are negligible)

$$C = \gamma + \frac{c_2}{c_0}(1 + \alpha) \tag{27}$$

*** Rigorously speaking

$$\mathfrak{L}_{max} = 1 + \alpha + \frac{\beta^2}{4(C - \gamma)}$$

the value attained at the phase angle ψ_{max} determinated by the equation $\cos \psi_{max} = -\beta/2(C - \gamma)$. Because $\beta \ll 2C$ (the principal term from the denominator) the maxima are attained in the time moments near the quadratures and $\mathfrak{L}_{max} \cong 1 + \alpha$. However it must not be forgotten that especially for eclipsing variables of Algol type, $\mathfrak{L}_{max}$ can exceed the quantity $1 + \alpha$ a little, and therefore l_{max} can exceed the unit a little.

Using the equation (10) and the expressions of distortion coefficients given in Paper I (the case of Roche model), the equation (27) becomes

$$\frac{3}{2}\left\{\frac{15+u}{5(3-u)}(1+\tau)Lqb^3+\frac{15+u'}{5(3-u')}(1+\tau')\ L'q'b'^3\right\}\sin^2 i=\gamma+\frac{c_2}{c_0}(1+\alpha) \quad (28)$$

Because $q' = 1/q$ the equation (28) appears as an algebraic equation of second degree in q, if the other quantities are known (the elements of the close binary system are known from a preliminary orbit computation, and the ratio c_2/c_0 from the observation between eclipses). But the reflexion coefficients α, γ, containing the luminous efficiencies computed in function of the ratio (17), also enter in the equation (28). The ratio (17) contains the distortion coefficients including the mass ratio which is unknown. Therefore we propose to solve the equation (28) by successive approximations, starting the computation of the ratio (17) (for the reflection coefficients) with initial approximation $q_0 = 1$.

7. *The comparison of the theoretical luminous efficiences with those observed.* The luminous efficiencies are computed with formulae (16). We shall name these values theoretical luminous efficiencies. On the other hand the luminous efficiencies can be deduced, as shown by Kopal [4], from the variation of the light between eclipses. Comparing the coefficients of the terms in $\cos\psi$ of the equation (24) and (26) we obtain

$$\beta = c_1/c_0 \quad (29)$$

Introducing the expression (21) of β in equation (29) we have

$$\left\{\left[\frac{1}{3}b'^2+\frac{1}{4}b'^3\right]Lf'-\left[\frac{1}{3}b^2+\frac{1}{4}b^3\right]L'f\right\}\sin i=\frac{c_1}{c_0} \quad (30)$$

Because $f = 1/f'$, the equation (30) appears to be an algebraic equation of second degree in f', if the other quantities are known. The values of the luminous efficiencies thus determined will be named the observed luminous efficiencies.

The comparison of the theoretical and observed luminous efficiences is important for checking up the reflection theory. If large differences appear between the theoretical values of the luminous efficiencies and those observed, during the improvement of the elements of the close binary system, then the last are preferable for the ulterior computations.

8. *The eclipse of the reflected light.* During the eclipses of the components of the close binary system it is lost (for terrestrial observer) not only a part from own (intrinsic) light of the eclipsed star, but also a part from the light reflected by the eclipsed star.

The loss of light through the eclipse of the reflected light has been computed by Kopal [1], [4]. Thus denoting by $\Delta L^*(\psi)$ the corresponding loss of light for a component (let's say the primary component), then, after Kopal [1], we have

$$\Delta L^*(\psi) = \{\alpha_1^0 + (3\alpha_2^0 - \alpha_0^0)r + \ldots\}r^2 fL' \quad (31)$$

where α_k^0 ($k = 0, 1, 2, \ldots$) are the α-associate functions of order 0 and index k, defined by Kopal [2], and r is the radius of the sphere having the volume equal to the volume of the considered component.

The relation (I.26) for the Roche model becomes

$$a_0 \equiv r = b\left\{1+\frac{1}{2}w^{(2)}-\frac{1}{6}v^{(2)}\right\} \quad (32)$$

On the other hand $\Delta L^*(\psi)$ is a small quantity of the order of b^2. Taking into account this fact and comparing the definition of the functions α_k^0 (Kopal [1], [2], [4]) with the definition of the functions $D_k^0(x)$ [9], there results that the equation (31) can be written thus [6]

$$\Delta L^*(\psi) = L'b^2 f \int_{x_1}^{x_2} \{D_1^0(x) + b[3D_2^0(x) - D_0^0(x)]\} \, dx \tag{33}$$

where the integration limits are those given in Paper III.

The loss of light by the eclipse of the light reflected by the secondary component will be computed with a formula analogous with (33) that contains the data corresponding to this component.

9. *Acknowledgements.* The author is indebted to Prof. dr. doc. Gheorghe Chiș for valuable advice and stimulating discussions.

(Received September 26, 1969)

REFERENCES

1. Kopal, Z., *An Introduction to the Study of Eclipsing Variables*, Cambridge, 1946.
2. Kopal, Z., „Harv. Circ.", nr. 450 (1947).
3. Kopal, Z., „Monthly Not. Roy. Astr. Soc.", **114** (1954), 101.
4. Kopal, Z., *Close Binary Systems*, London, 1959.
5. Russel, H. N., „Astrophysical J.", **90** (1939), 641.
6. Ureche, V., Thesis, 1968 (unpublished).
7. Ureche, V., „Studia Univ. Babeș-Bolyai, ser. Math.-Phys.", fasc. 1, 1969, 73.
8. Ureche, V., „Studii și Cercetări de Astronomie", **14**, nr. 1 (1969), 54.
9. Ureche, V., „Bull. Astr. Inst. Czech.", **20**, nr. 6 (1969), 312.

CONTRIBUȚII LA INTERPRETAREA CURBELOR DE LUMINĂ ALE SISTEMELOR BINARE STRÎNSE. IV

Efectul de elipticitate și efectul de reflexie

(Rezumat)

Utilizînd funcțiile $D_k^j(x)$ definite în partea a III-a a acestei lucrări [9] se regăsește formula clasică pentru efectul de elipticitate. Se dă formula analitică pentru mărimea H_0 necesară în calculul curbei teoretice de lumină. Se definesc riguros strălucirile superficiale medii ale componentelor.

Teoria lui Kopal asupra reflexiei (inclusiv eclipsarea luminii reflectate) este adaptată la metoda autorului de interpretare a curbei de lumină.

De asemenea se indică un procedeu iterativ de determinare a raportului maselor componentelor din variația de lumină dintre eclipse.

Rezultatele obținute sînt utile pentru determinarea elementelor unui sistem binar strîns.

К ВОПРОСУ ОБ ИНТЕРПРЕТАЦИИ КРИВЫХ БЛЕСКА ТЕСНЫХ ДВОЙНЫХ СИСТЕМ. IV.

Эффект эллиптичности и эффект отражения

(Резюме)

Используя функции $D_k^j(x)$, определённые в III-ьей части настоящей работы [9], автор приходит к классической формуле эффекта эллиптичности. Даётся аналитическая формула для величины H_0, необходимая при вычислении теоретической кривой блеска. Строго определяются средние поверхностные излучения составляющих.

Теория Копала об отражении (включительно затмевание отражённого света) применяется к методу автора для интерпретации кривой блеска.

Также приводится итеративный метод определения отношения масс составляющих по изменению блеска между затмениями.

Полученные результаты пригодны для определения элементов тесной двойной системы.

CALCULUL SCHIMBULUI DE CĂLDURĂ DIN VECINĂTATEA PUNCTULUI CRITIC AL UNUI CORP DE ROTAȚIE A CĂRUI SUPRAFAȚĂ ARE TEMPERATURA VARIABILĂ

de

P. BRĂDEANU și **E. BALOGH**

Notații

x, y,	coordonatele stratului limită (axa x se ia pe meridiana corpului, axa y este perpendiculară pe x)
u,	proiecția vitezei pe axa x
p, ρ,	presiunea, densitatea
T,	temperatura absolută
$i = c_p T$,	entalpia unității de masă
i_0,	entalpia de stagnare în stratul limită
i_{10},	entalpia de stagnare în mișcare exterioară
g,	entalpia de stagnare adimensională
c_p,	căldura specifică la presiune constantă
μ, λ,	coeficienți de vîscozitate dinamică și conductibilitate termică
σ, Nu, Re	numerele lui Prandtl, Nusselt, Reynolds
δ,	grosimea stratului limită
r,	distanța unui punct din stratul limită la axa de simetrie a corpului de rotație

Indici

w,	indică valori pe suprafața corpului
1,	indică valori pe frontiera exterioară a stratului limită
ξ, η,	indică derivate în raport cu ξ și, respectiv, η

Problema calculului schimbului de căldură dintre un corp și curentul fluid interesează în mod special aplicațiile practice ale hidroaerodinamicii. Pentru rezolvarea acestei probleme se fac diferite presupuneri. Astfel, se admite existența unui strat limită plan, se consideră temperatura suprafeții corpului constantă sau variabilă, se neglijează disipația, prin frecare, a energiei cinetice etc. Aceste presupuneri de ordin fizic simplifică metodele matematice de rezolvare a problemei, permit obținerea unor soluții automodelate [2], [4] etc.

În această lucrare se renunță la unele dintre ipotezele de mai sus, considerîndu-se un strat limită axial-simetric în presupunerea că nu se neglijează disiparea energiei cinetice și că temperatura suprafeții corpului este variabilă. Este indicat că în aceste condiţii, mai generale, există soluţii automodelate care se determină, efectiv, prin integrări numerice. Rezultatele numerice primite se folosesc, apoi, pentru calculul fluxului de căldură.

1. *Ecuaţiile şi formulele generale ale problemei.* Ecuaţiile mişcării şi energiei în stratul limită incompresibil axial-simetric, din planul auxiliar $0\xi\eta$, după cum este arătat şi în [1], sînt de forma

$$f_{\eta\eta\eta} + ff_{\eta\eta} = 2\xi(f_\eta f_{\eta\xi} - f_\xi f_{\eta\eta}) + 2\xi\frac{u_{1\xi}}{u_1}(f_\eta^2 - 1) \tag{1}$$

$$\begin{aligned} G_{\eta\eta} + \sigma f G_\eta &= 2\sigma\xi(f_\eta G_\xi - f_\xi G_\eta) + 2\sigma\xi\left[\frac{g_{w\xi}}{g_w - 1} + \frac{(\theta_1^2)_\xi}{1 + \theta_1^2}\right]f_\eta G - \\ &- (\sigma - 1)\frac{2\theta_1^2}{(1 + \theta_1^2)(g_w - 1)}(f_\eta f_{\eta\eta})_\eta \end{aligned} \tag{2}$$

$$f(\xi, 0) = f_\eta(\xi, 0) = 0,\ f_\eta(\xi, \infty) = 1;\ G(\xi, 0) = 1,\ G(\xi, \infty) = 0 \tag{3}$$

unde

$$f(\xi, \eta) = \int_0^\eta \frac{u}{u_1} d\eta, \quad g = \frac{i_0}{i_{10}} = \frac{\frac{i}{i_1} + \theta_1^2 f_\eta}{1 + \theta_1^2} = 1 + (g_w - 1)G(\xi, \eta) \tag{4}$$

$$\theta_1 \equiv \frac{u_1^2}{2i_1}, \ (\theta_1)_\eta = \frac{u_1 u_{1\xi}}{i_1}, \ \rho = \text{const.}, \ \mu = \text{const.}, \ i_1 = \text{const.} = i_\infty$$

$$\frac{\delta(x)}{r_w(x)} \ll 1, \ p_\xi + \rho u_1 u_{1\xi} = 0$$

$$\xi = \mu\rho\int_0^x u_1 r_w^2 dx, \quad \eta = \frac{\rho u_1 r_w}{\sqrt{2\xi}} y \tag{5}$$

$$\left(u_1 = u_1(x), \ i_{10} = i_1 + \frac{u_1^2}{2}, \ i_0 = i + \frac{u^2}{2}, \ g_w = \frac{i_w(x)}{i_{10}}, \ r(x, y) \approx r_w(x)\right)$$

unde necunoscutele principale sînt funcţiile $f(\xi, \eta)$ şi $G(\xi, \eta)$. Ecuaţiile stratului limită axial-simetric (1)—(2) au aceeaşi formă ca şi în cazul stratului limită plan. De aceea, ca şi în lucrarea [1], ecuaţiile (1)—(2) admit soluţiile automodelate $f(\eta)$ şi $G(\eta)$, dependente numai de variabila η, dacă sînt îndeplinite condiţiile

$$g_w \neq \text{const.}, \ D = \frac{2\theta_1^2}{(1 + \theta_1^2)(g_w - 1)} \neq 0, \ u_1 = c_1\xi^n, \ g_w = 1 + \frac{B_0\xi^k}{1 + \theta_1^2} \tag{6}$$

$$k = 2n$$

$$c_1 = \text{const.}, \ B_0 = \text{const.}, \ D = \frac{c_1^2}{B_0 i_\infty}, \ \theta_1 \neq 0$$

unde c_1 şi B_0 sînt constante arbitrare de integrare. Soluţii automodelate se pot obţine, evident, şi în alte condiţii, după cum rezultă din ecuaţiile (1) şi (2), care au fost studiate de diferiţi autori. Noi ne oprim asupra condiţiilor de automodelare (6) care, după cum se constată, reprezintă influenţa disipaţiei şi variaţiei temperaturii suprafeţei corpului în jurul căruia are loc mişcarea axial-simetrică.

Tensiunea de frecare locală pe suprafaţa corpului τ_w şi fluxul (q_w) de căldură local, care străbate unitatea din suprafaţa corpului în unitatea de timp, se vor calcula, conform legilor lui Newton şi Fourier, cu ajutorul formulelor

$$\tau_w = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{\mu\rho u_1^2 r_w}{\sqrt{2\xi}} f_{\eta\eta}(\xi, 0) \tag{7}$$

$$q_w = -\lambda\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = -\frac{i_{10}}{\sigma}\frac{\mu\rho u_1 r_w}{2\xi}(g_w - 1)(G(\xi, 0) \tag{8}$$

2. *Trecerea la planul fizic Oxy*. Vom folosi ecuaţiile de mai sus pentru a studia mişcarea şi a calcula fluxul de căldură în vecinătatea punctului critic al corpului de rotaţie. În vecinătatea punctului critic $0(x = 0)$ al corpului de rotaţie sînt valabile, după cum este cunoscut, următoarele legi [2], [4]

$$r_w = R\sin\frac{x}{R} \approx x, \quad u_1 = cx, \quad T_w = T_\infty + ax^\gamma \tag{9}$$

unde c, T_∞, a şi γ sînt constante date şi s-a presupus că în vecinătatea punctului critic suprafaţa corpului de rotaţie poate fi aproximată printr-o suprafaţă sferică cu raza R.

Formulele de transformare (5) vor avea forma

$$\xi = \frac{\mu\rho c}{4}x^4, \quad \eta = y\sqrt{\frac{2\rho c}{\mu}} \tag{10}$$

Expresiile vitezei exterioare u_1 şi temperaturii suprafeţei corpului T_w, care asigură soluţii automodelate, date de (6), se vor putea scrie acum în planul fizic Oxy în forma

$$u_1 = c_1\xi^n = c_1\left(\frac{\mu\rho c}{4}\right)^n x^{4n} \tag{11}$$

$$T_w = T_\infty + \left(\frac{c_1^2}{2c_p} + B_0T_\infty\right)\xi^{2n} = T_\infty + \left(\frac{c_1^2}{2c_p} + B_0T_\infty\right)\left(\frac{\mu\rho c}{4}\right)^{2n}\xi^{8n}$$

Expresiile (11) trebuie să fie identice cu expresiile date (9). Această situaţie va avea loc dacă vom lua

$$n = \frac{1}{4}, \qquad 8n = \gamma, \qquad \gamma = 2 \tag{12}$$

$$c_1\left(\frac{\mu\rho c}{4}\right)^{1/4} = c \quad \text{sau} \quad c_1 = c^{3/4}\left(\frac{\mu\rho}{4}\right)^{-1/4} \tag{13}$$

$$\left(\frac{c_1^2}{2c_p} + B_0T_\infty\right)\left(\frac{\mu\rho c}{4}\right)^{1/2} = a \quad \text{sau} \quad B_0 = \frac{1}{T_\infty}\left(\frac{2a}{\sqrt{\mu\rho c}} - \frac{c^{3/2}}{c_p\sqrt{\mu\rho}}\right) = \frac{2ac_p - c^2}{c_pT_\infty\sqrt{\mu\rho c}} \tag{14}$$

Prin urmare, date fiind constantele c, a, c_p, μ, ρ, T_∞ se vor putea calcula, cu (13)—(14), constantele de integrare c_1 şi B_0.

3. *Rezolvarea ecuaţiilor şi calculul fluxului de căldură* q_w. Ecuaţiile soluţiilor automodelate, în condiţiile de automodelare (6), asociate cu formulele (9)—(14) şi formula fluxului de căldură (8) primesc forma

$$F''' + 2FF'' + 1 - F'^2 = 0 \tag{15}$$

$$K'' + 2\sigma FK' - 2\sigma F'K = (1 - \sigma)D(F'F'')' \tag{16}$$

$$F(0) = F'(0) = 0,\ F'(\infty) = 1;\ K(0) = 1,\ K(\infty) = 0 \tag{17}$$

$$q_w = -\frac{i_{10}}{\sigma\sqrt{2}}\frac{\mu\rho u_1 r_w}{\sqrt{2\xi}}(g_w - 1)K'(0) \tag{18}$$

unde

$$F' = \frac{dF}{d\eta},\ K' = \frac{dK}{d\eta},\ f(\eta) = \sqrt{2}F(\eta^*),\ G(\eta) = K(\eta^*),\ \eta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\eta \tag{19}$$

Ecuaţia mişcării (15) a fost integrată numeric de H o m a n n F. şi, ceva mai tîrziu, de F r ő s s l i n g. Rezultatele sînt date în Tab. 2.

Pentru integrarea ecuaţiei energiei (16) se foloseşte metoda diferenţelor finite cu pasul 0,2 în intervalul [0 ; 4,6] considerînd că $\sigma = 0{,}7$ şi $D = 1$. Se obţine sistemul algebric din Tab. 1. Soluţiile acestui sistem, obţinute cu maşina de calcul DACIC—1 Cluj, sînt date în Tab. 2. În Tab. 2 poate fi citită şi valoarea, care interesează în mod special, $K'(0) = -0{,}8995$. În Tab. 2 sînt date, de asemenea, şi valorile derivatei funcţiei $K(\eta^*)$. În fig. 1 este reprezentat graficul funcţiei $K(\eta^*)$.

Fluxul caloric, care străbate în unitatea de timp unitatea de suprafaţă a corpului, este dat, după (18), de formula

$$q_w(\xi) = 0{,}8995\frac{i_{10}}{\sigma\sqrt{2}}\frac{\mu\rho u_1 r_w}{\sqrt{2\xi}}(g_w - 1) \tag{20}$$

sau

$$q_w = 0{,}8995\frac{i_{10}\sqrt{\mu\rho c}}{\sigma}(g_w - 1) = 0{,}8995\,\lambda\sqrt{\frac{\rho c}{\mu}}(T_w - T_{10}) \tag{21}$$

$$\left(T_{10} = T_1 + \frac{u_1}{2c_p} = T_\infty + \frac{c^2x^2}{2c_p}\right)$$

Vom introduce, aşa după cum se obişnuieşte, numărul lui Nusselt cu ajutorul formulei

$$Nu(x) = \frac{q_w}{T_w - T_{10}}\frac{x}{\lambda} = 0{,}8995\sqrt{\frac{\rho c}{\mu}}x = 0{,}8995\sqrt{R_{ex}},\ R_{ex} = \frac{\rho u_1 x}{\mu}, \tag{22}$$

unde R_{ex} este numărul lui Reynolds.

Numărul lui Nusselt se poate calcula în fiecare punct de abscisă x din moment ce parametrii fluidului (μ, ρ) şi vitezei (c) sînt daţi. Cunoscînd numărul lui Nusselt $Nu(x)$ se poate calcula, pentru diferenţa de temperatură $T_w - T_{10}$ dată (λ fiind de asemenea dat), fluxul termic $q_w(x)$.

Pentru a calcula fluxul de căldură se poate folosi şi numărul lui Stanton, care se defineşte şi se calculează cu formula

$$St(x) = \frac{q}{T_w - T_{10}} \frac{1}{\rho u_1 c_p} = 0{,}8995 \frac{1}{\sigma \sqrt{R_{ex}}} . \tag{23}$$

Avem

$$\sigma \sqrt{R_{ex}}\, St(x) = 0{,}8995 \tag{23'}$$

4. *Aplicaţie.* Se consideră o sferă cu raza $R = 0{,}1$ m atacată de un curent incompresibil de aer care la infinit are viteza $u_\infty = 100$ m/sec. şi temperatura $t_\infty = 50\,°C$. Mişcarea în jurul sferei este axial-simetrică.

Viteza pe sferă, considerată într-un curent ideal, este, după cum se cunoaşte din mecanica fluidelor, dată de formula

$$u_s = \frac{3}{2} u_\infty \sin \alpha$$

Viteza exterioară stratului limită care se formează în vecinătatea punctului critic (oprire) va fi

$$u_1 = u_s = \frac{2}{3} u_\infty \sin \alpha \approx \frac{3u_\infty}{2R} x$$

unde α reprezintă unghiuri la centru pentru puncte aşezate în imediata apropiere a punctului critic.

Vom avea pentru c şi vom lua pentru a următoarele valori

$$c = \frac{3u_\infty}{2R} = \frac{3}{2} 10^3 \frac{1}{\text{sec}}, \quad a = 5.10^3 \frac{°\text{C}}{\text{m}^2}$$

Găsim, atunci, expresiile $([x] = \text{metri})$

$$u_1 = \frac{3}{2} 10^3 x \frac{\text{m}}{\text{sec}}, \; R_{ex} = 635.10^5 x^2, \; Nu(x) = 7160x, \; q_w = 670.10^3 x^2$$

pentru

$$\sigma = 0{,}7 ; \; \lambda = 0{,}0241 \frac{\text{kcal}}{\text{m oră °C}} ; \; \rho = \frac{1}{8} \frac{\text{kgf} \cdot \text{sec}^2}{\text{m}^4} ; \; \frac{\mu}{\rho} = 2{,}36 \cdot 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{sec}} .$$

$$c_p = 0{,}24 \frac{\text{kcal}}{\text{kg °C}} = 0{,}24 \times 427 \times 9{,}81 \frac{\text{m}^2}{\text{grad sec}^2}$$

De exemplu, pentru $x = 0{,}05$ m avem valorile

$u_1 = 75$ m/sec; $T_w = 335{,}5$ °K; $R_{ex} = 158.750$; $Nu(x) = 358$

$$q_w = 1675 \frac{\text{kcal}}{\text{m}^2 \text{ oră}}$$

În fig. 2 este reprezentată grafic funcţia $q_w(x)$ pentru sferă.

(Intrat în redacţie la 8 octombrie 1969)

Tabel 1

$$
\begin{aligned}
1{,}0018K_2 &- 2{,}0098K_1 &&= -0{,}9829\\
1{,}0068K_3 &- 2{,}0185K_2 + 0{,}9932K_1 &&= 0{,}0088\\
1{,}0148K_4 &- 2{,}0261K_3 + 0{,}9852K_2 &&= 0{,}0041\\
1{,}0252K_5 &- 2{,}0327K_4 + 0{,}9748K_3 &&= 0{,}0034\\
1{,}0377K_6 &- 2{,}0381K_5 + 0{,}9623K_4 &&= -0{,}0024\\
1{,}0520K_7 &- 2{,}0426K_6 + 0{,}9480K_5 &&= -0{,}0042\\
1{,}0678K_8 &- 2{,}0462K_7 + 0{,}9322K_6 &&= -0{,}0051\\
1{,}0846K_9 &- 2{,}0491K_8 + 0{,}9154K_7 &&= -0{,}0052\\
1{,}1024K_{10} &- 2{,}0512K_9 + 0{,}8976K_8 &&= -0{,}0049\\
1{,}1208K_{11} &- 2{,}0528K_{10} + 0{,}8792K_9 &&= -0{,}0042\\
1{,}1396K_{12} &- 2{,}0539K_{11} + 0{,}8604K_{10} &&= -0{,}0034\\
1{,}1588K_{13} &- 2{,}0547K_{12} + 0{,}8412K_{11} &&= -0{,}0026\\
1{,}1783K_{14} &- 2{,}0552K_{13} + 0{,}8217K_{12} &&= -0{,}0019\\
1{,}1978K_{15} &- 2{,}0555K_{14} + 0{,}8022K_{13} &&= -0{,}0013\\
1{,}2175K_{16} &- 2{,}0557K_{15} + 0{,}7825K_{14} &&= -0{,}0009\\
1{,}2372K_{17} &- 2{,}0558K_{16} + 0{,}7628K_{15} &&= -0{,}0006\\
1{,}2570K_{18} &- 2{,}0559K_{17} + 0{,}7430K_{16} &&= -0{,}0003\\
1{,}2768K_{19} &- 2{,}0559K_{18} + 0{,}7232K_{17} &&= -0{,}0002\\
1{,}2965K_{20} &- 2{,}0560K_{19} + 0{,}7035K_{18} &&= -0{,}0001\\
1{,}3163K_{21} &- 2{,}0560K_{20} + 0{,}6837K_{19} &&= -0{,}0001\\
1{,}3361K_{22} &- 2{,}0560K_{21} + 0{,}6639K_{20} &&= 0\\
&- 2{,}0560K_{22} + 0{,}6441K_{21} &&= 0
\end{aligned}
$$

Tabel 2

η^*	F	$F' = \frac{dF}{d\eta^*}$	$F'' = \frac{d^2F}{d\eta^{*2}}$	K	$K' = \frac{dK}{d\eta^*}$
0,0	0	0	1,3120	1	−0,8995
0,2	0,0127	0,1755	1,1705	0,8201	−0,8392
0,4	0,0487	0,3311	1,0298	0,6643	−0,7218
0,6	0,1054	0,4669	0,8910	0,5314	−0,6105
0,8	0,1799	0,5833	0,7563	0,4201	−0,5008
1,0	0,2695	0,6811	0,6283	0,3311	−0,4045
1,2	0,3717	0,7614	0,5097	0,2583	−0,3298
1,4	0,4841	0,8258	0,4031	0,1992	−0,2670
1,6	0,6046	0,8761	0,3100	0,1515	−0,2150
1,8	0,7313	0,9142	0,2315	0,1132	−0,1715
2,0	0,8627	0,9422	0,1676	0,0829	−0,1348
2,2	0,9974	0,9622	0,1175	0,0593	−0,1040
2,4	1,1346	0,9760	0,0798	0,0413	−0,0785
2,6	1,2733	0,9853	0,0523	0,0279	−0,0578
2,8	1,4131	0,9912	0,0331	0,0182	−0,0408
3,0	1,5536	0,9949	0,0202	0,0116	−0,0280
3,2	1,6944	0,9972	0,0120	0,0070	−0,0188
3,4	1,8356	0,9985	0,0068	0,0041	−0,0118
3,6	1,9769	0,9992	0,0037	0,0023	−0,0072
3,8	2,1182	0,9996	0,0020	0,0012	−0,0042
4,0	2,2596	0,9998	0,0010	0,0006	−0,0025
4,2	2,4010	0,9999	0,0006	0,0002	−0,0012
4,4	2,5423	0,9999	0,0003	0,0001	−0,0005
4,6	2,6837	1,0000	0,0001	0,0000	−0,0005

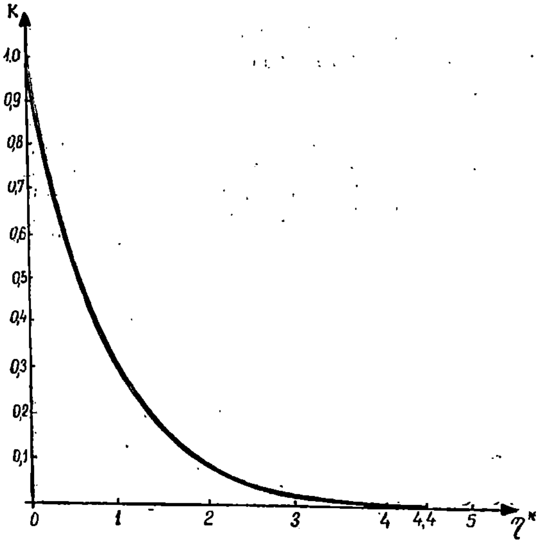

Fig. 1.

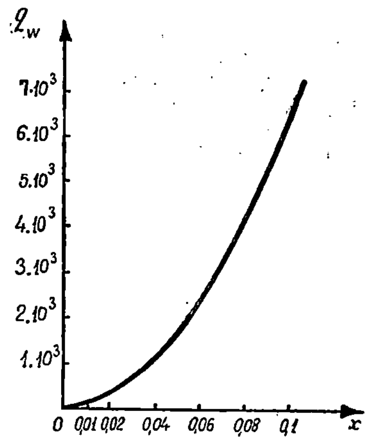

Fig. 2.

BIBLIOGRAFIE

1. Brădeanu P. şi Balogh E., *Stratul limită disipativ pe corpuri a căror suprafeţe au temperatura variabilă* „Studii şi cercet. de mec. aplicată", Bucureşti (sub tipar).
2. Schlichting H., *Teoria pogranicinogo sloia*, Izd. Inost. Lit., Moskva, 1956 (traducere din l. germană).
3. Collatz L., *Cislennîe metodî reşenia differenţialnîh uravnenii*, Izd. Inost. Lit., Moskva, 1953 (traducere din l. germană).
4. Levy S., *Heat Transfer to Property Laminar Boundary-Layer Flows with Power-Function Fre-Stream Velocity and Wall Temperature Variation.* „Journal Aeronautical Sciences", May 1952, 341—348.

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТЕПЛООБМЕНА В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ТЕЛА, ПОВЕРХНОСТЬ КОТОРОГО ИМЕЕТ ПЕРЕМЕННУЮ ТЕМПЕРАТУРУ

(Резюме)

Авторы статьи изучают движение, распределение температуры и теплообмен в несжимаемом аксиально-симметричном пограничном слое с учётом диссипации и изменения температуры поверхности тела. В окрестности критической точки определяются автомоделированные решения для уравнений пограничного слоя с помощью численного интегрирования уравнения энергии. Полученное решение применяется затем к вычислению теплового потока между нагретым телом и движущейся жидкостью.

CALCUL DE L'ÉCHANGE DE CHALEUR AU VOISINAGE DU POINT CRITIQUE D'UN CORPS DE ROTATION DONT LA SURFACE A UNE TEMPÉRATURE VARIABLE

(Résumé)

Les auteurs étudient le mouvement, la répartition de la température et l'échange de chaleur dans la couche-limite incompressible de symétrie axiale, en tenant compte de la dissipation et de la variation de la température à la surface du corps. On détermine au voisinage du point critique, des solutions automodéliques pour les équations de la couche-limite à l'aide d'une intégration numérique de l'équation de l'énergie. La solution obtenue est employée ensuite à calculer le flux de chaleur d'entre le corps chauffé et le fluide en mouvement.

ECUAȚIA DIFUZIEI CONVECTIVE PENTRU O PLACĂ VERTICALĂ ÎN MIȘCARE TRANSVERSALĂ

de

IOAN STAN și LIDIA KOZMA

Numeroase instalații ale industriei chimice au ca element principal curgerea unui fluid peste o suprafață cu care poate reacționa direct, sau care are doar rol de catalizator. În primul caz, fluidul format din un singur component, interacționează direct cu suprafața solidă, în vecinătatea ei apărînd produși de reacție. Acești produși de reacție devin o barieră în calea fluidului, care ajunge pe suprafață, în continuare, printr-un proces de difuzie, cu o viteză mai mare sau mai mică. Acest proces de difuzie face ca concentrația fluidului și a produșilor de reacție să fie variabile.

În al doilea caz, suprafața joacă doar rol de catalizator. Fluidul este compus din mai multe substanțe care interacționează între ele numai în prezența acestei suprafețe. Ca și mai sus, produșii de reacție rămîn în vecinătatea suprafeței, reacția continuînd datorită difuziei.

În literatura de specialitate se studiază difuzia pe o placă verticală scufundată într-un fluid. Datorită variației densității fluidului, ca urmare a variației concentrației, apare un fenomen de convecție. Noi considerăm că această placă este animată de o mișcare transversală, cea mai general posibilă, deducem ecuația difuziei iar apoi o aplicăm la diferite cazuri particulare. Domeniul de difuzie poartă numele de strat limită de difuzie.

În această lucrare ne propunem să deducem ecuația stratului limită de difuzie în cazul difuziei convective libere pe o placă verticală plană, animată de o mișcare transversală. Vom considera în acest scop o placă plană verticală, ce se găsește în mișcare de translație cu viteza V, într-un fluid vîscos, incompresibil, de vîscozitate μ, cu proprietăți fizice constante. Alegem un sistem de axe atașat de placă, cu abscisa X în lungul plăcii și ordonata Y perpendiculară pe ea. Placa o considerăm infinită, așa fel că fluidul este antrenat în totalitatea sa.

Densitatea fluidului ρ fiind funcție de concentrația sa c, pentru o variație lentă a densității putem scrie [1]

$$\rho(c) = \rho(c_\infty)[1 - \beta(c_\infty - c)] \qquad (1)$$

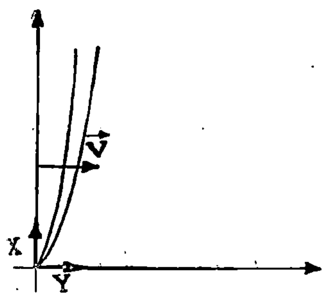

Fig. 1.

unde

$$\beta = \frac{1}{\rho(c_\infty)}\left(\frac{\partial \rho}{\partial c}\right)_{c=c_\infty}$$

îl presupunem în continuare constant, iar prin c_∞ am notat concentrația masei de fluid.

Ecuațiile impulsului, continuității și a difuziei sînt [2, 3]

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial T} + u\frac{\partial u}{\partial X} + v\frac{\partial u}{\partial Y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial X} + F_x + \mu\,\Delta u, \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial T} + u\frac{\partial v}{\partial X} + v\frac{\partial v}{\partial Y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial Y} + F_y + \mu\,\Delta v - \rho\frac{dV}{dT}, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial c}{\partial T} + u\frac{\partial c}{\partial X} + v\frac{\partial c}{\partial Y} = D\Delta\, c, \tag{5}$$

T fiind timpul, u și v componentele vitezei, p presiunea, D coeficientul de difuzie, $F_X = -\rho g$ și $F_Y = 0$ forțele de volum, iar $\rho\frac{dV}{dT}$ forța lui d'Alembert.

Întrucît difuzia are loc numai în stratul limită de difuzie, ecuația impulsului și a difuziei se simplifică [4],

$$\rho(c)\left(\frac{\partial u}{\partial T} + u\frac{\partial u}{\partial X} + v\frac{\partial u}{\partial Y}\right) = -\frac{\partial p}{\partial X} - \rho(c)g + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial p}{\partial Y} = -\rho(c)\frac{dV}{dT}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial c}{\partial T} + u\frac{\partial c}{\partial X} + v\frac{\partial c}{\partial Y} = D\frac{\partial^2 c}{\partial Y^2}. \tag{8}$$

Datele problemei permit calcularea componentei longitudinale a gradientului de presiune. Menținînd X constant și integrînd ecuația (7) în raport cu Y de la o distanță Y_1 în afara stratului limită, obținem

$$p(X, Y, T) = p(X, Y_1, T) + \int_Y^{Y_1} \rho\frac{dV}{dT}dY. \tag{9}$$

Derivînd în raport cu X, acum considerat constant, relația obținută, găsim componenta căutată a gradientului

$$\frac{\partial p}{\partial X}(X, Y, T) = \frac{\partial p}{\partial X}(X, Y_1, T) + \frac{\partial}{\partial X}\int_Y^{Y_1} \rho\frac{dV}{dT}dY. \tag{10}$$

Aici termenul $\frac{\partial p}{\partial X}(X, Y_1, T)$ este necunoscut, dar el poate fi exprimat ușor în funcție de datele problemei. Masa de fluid care este în afara stratului limită este în repaus în raport cu placa, fiind antrenat, datorită incompresibilităţii fluidului, în mişcarea transversală. Putem deci aplica, în afara stratului limită, ecuaţiile hidrostaticii, care din (2) ne dau pentru punctul (X, Y_1) la distanţă mare de placă

$$\frac{\partial p}{\partial X}(X, Y_1, T) = -g\rho(c_\infty) \tag{11}$$

Înlocuind (1) şi (11) în (10) obţinem

$$\frac{\partial p}{\partial X} = -\rho(c_\infty)g - \rho(c_\infty)\beta\frac{\partial}{\partial X}\int_Y^{Y_1}(c_\infty - c)\frac{dV}{dT}dY, \tag{12}$$

care înlocuit în (6) ne dă

$$\frac{\partial u}{\partial T} + u\frac{\partial u}{\partial X} + v\frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{\rho(c_\infty)}{\rho(c)}g\beta(c_\infty - c) + \frac{\rho(c_\infty)}{\rho(c)}\beta\int_Y^{Y_1}(c_\infty - c)\frac{dV}{dT}dY + \frac{\mu}{\rho(c)}\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}. \tag{13}$$

Atît timp cît variaţiile de concentraţie sînt mici, raportul $\frac{\rho(c_\infty)}{\rho(c)}$ este aproximativ egal cu unitatea, iar $\frac{\mu}{\rho(c)} = \nu$, poate fi considerat constant. De asemenea în afara stratului limită de difuzie $c_\infty - c$ este practic nul, ceea ce ne permite să scriem în final

$$\frac{\partial u}{\partial T} + u\frac{\partial u}{\partial X} + v\frac{\partial u}{\partial Y} = g\beta(c_\infty - c) + \beta\frac{\partial}{\partial X}\int_Y^{\infty}\frac{dV}{dT}(c_\infty - c)\,dY + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2}. \tag{14}$$

Aceasta este forma finală a ecuaţiei impulsului a stratului limită de difuzie convectivă liberă pentru o placă plană verticală, animată de o mişcare transversală de viteză V. La această ecuaţie se mai adaugă ecuaţia continuităţii (4) şi a difuziei în stratul limită (8). Problema se rezolvă dîndu-se modul în care se mişcă placa, precum şi condiţiile iniţiale şi la limită ale problemei studiate.

Ecuaţiile de mai sus pot fi scrise, pentru calcule, într-o formă mult mai convenabilă, introducînd funcţia de curent ψ şi o concentraţie adimensională C, prin intermediul unor noi variabile.

Distingem două cazuri. Primul este acela al unei plăci de lungime finită l, cu originea axelor de coordonate în partea inferioară a plăcii. Pentru ca ecuaţiile deduse mai sus să rămînă valabile, putem considera o placă infinită, ca să fie asigurată antrenarea fluidului în întregime, în care lungimea l e formată din substanţa care interacţionează cu fluidul, iar restul din o substanţă care nu interacţionează.

Noile variabile sînt

$$x = \frac{X}{l},\ y = \sqrt[4]{G}\,\frac{Y}{l},\ t = \frac{\nu\sqrt{G}}{l^2}T,$$

$$\psi = \frac{\psi}{\nu\sqrt[4]{G}},\ C = \frac{c_\infty - c}{c_\infty},\ G = \frac{g\beta l^3 c_\infty}{\nu^2},$$

unde G este numărul lui Grashof de difuzie. Înlocuind aceste variabile în ecuaţia impulsului (14) şi a difuziei (8) obţinem după simplificări

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^3}-\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=C+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}\int C\frac{dV}{dt}dy, \tag{15}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{1}{P_r}\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \tag{16}$$

unde $\varepsilon=\frac{c_\infty\beta}{l^2\nu c^{3/4}}$ iar $P_r=\frac{\nu}{D}$ este numărul lui Prandtl de difuzie.

Al doilea caz este acela al unui semiplan infinit, format din un semiplan infinit inferior care nu interacţionează cu fluidul şi semiplanul superior din substanţa care interacţionează cu fluidul.

Introducînd variabilele

$$x=X,\ y=\left(\frac{g\beta c_\infty}{\nu^2}\right)^{1/4}Y,\ t=\nu\left(\frac{g\beta c_\infty}{\nu^2}\right)T,\ \psi=\frac{\psi}{\nu\left(\frac{g\beta c_\infty}{\nu^2}\right)^{1/4}},$$

pe care înlocuindu-le în ecuaţiile (14) şi (8) obţinem

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}-\frac{\partial^3\psi}{\partial y^3}=C+\gamma\frac{\partial}{\partial X}\int_Y^\infty\frac{dV}{dt}C\,dy, \tag{15'}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial C}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial C}{\partial y}=\frac{1}{Pr}\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}, \tag{16'}$$

unde $\gamma=\left(\frac{\beta c_\infty}{\nu^4 g^3}\right)^{1/8}$.

Observăm că prin transformări de variabile convenabile ecuaţiile care descriu difuzia convectivă liberă a unei plăci plane verticale animată de o mişcare transversală, sînt identice. Evident la aceste ecuaţii se adaugă condiţiile iniţiale şi la limită, care apar din problema studiată.

(Intrat în redacţie la 6 noiembrie 1969)

BIBLIOGRAFIE

1. V. G. Levici, *Fizico-himiceskaia gidrodinamika*, Moskva, 1959.
2. T. W. Kao, *The Physics of Fluids*, **9**, nr. 6 1966, 1216—1221.
3. V. Blankenship, J. Clark, „Journ. of Heat Trans"., **86** (1964), 149.
H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, New York, 1960.

УРАВНЕНИЕ СВОБОДНОЙ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ В ПОПЕРЕЧНОМ ДВИЖЕНИИ

(Резюме)

Авторы статьи выводят уравнения свободной конвективной диффузии для плоской вертикальной пластинки в поперечном движении. Даются уравнения как для пластинки с конечной длиной, так и для пластинки с бесконечной длиной.

EQUATION OF THE FREE CONVECTIVE DIFFUSSION FOR A VERTICAL PLATE IN TRANSVERSAL MOTION

(Summary)

The equations of the free convective difussion are deduced for a flat, vertical plate animated by a transversal motion. The equations are given both for a plate of finite length and for one of infinite length.

CRONICĂ

CONTRIBUTIONS TO THE STUDY OF SOLVING THE EQUATIONS IN BANACH SPACES:

Abstract of the doctor thesis of Mathematical Sciences, prepared by MARTIN BALÁZS under Prof. G. Călugăreanu's guidance and maintained at the Faculty of Mathematics and Mechanics of the University of Cluj, on 9 iune 1969.

Let be the equation

$$P(x) = \theta \tag{1}$$

where P is an operator defined on a Banach space X, with values in a Banach space Y, and θ is the element zero of the Y. In studying this class of equations the following problems are considered: to find the conditions of existence and uniqueness of the solutions, to construct the approximative methods for solving the equations, to study the convergence rapidity of the method used in solving, evaluating the error, etc. In the present thesis, some results of the author are presented, in the case when the existence of Fréchet or Gateaux derivative of the operator P is not supposed.

The thesis contains four chapters. In the First Chapter, the divided differences used in solving the equation (1) are studied. The following definition is given:

$P_{u,v} \in (X \to Y)$ (where $(X \to Y)$ is the Banach space of the linear bounded operators defined on X with values in Y) is called the divided difference of the operator P in the points u and v, if

$$P_{u,v}(u - v) = P(u) - P(v)$$

for every $u \in X$, $v \in X$.

Among other used properties, we give the following:

If $P^{(i)}_{u,v}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ are divided differences for the operators $P^{(i)}: X \to Y$, and M is a multilinear operator, then the operator

$$R_{u,v} = \sum_{i=1}^{n} M\left[P^{(1)}(v)\,;\ \ldots\,;\ P^{(i-1)}(v)\,;\ P^{(i)}_{u,v}\,;\ P^{\ +1)}(u)\,;\ \ldots\,;\ P^{(n)}(u)\right]$$

is a divided difference of the operator $M[P^{(1)}; P^{(2)}; \ldots; P^{(n)}]$.

The divided differences of higher order are successively defined, and denoted by $P_{n,v,w}$; $P_{u,v,w,z}$; ...

In the Second Chapter the approximative methods of solving the equation (1) are given, by using the reccursive formula of type

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma P(x_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

where $\Gamma_n = [P_{x_n, x_{n-1}}]^{-1}$, and x_{-1}, x_0 are initial approximations. This method is called the generalized method of chord. The theorems in conditions analogical to those for Newton's generalized method are given. For example we give the following:

If, for the initial approximations $x_{-1}, x_0 \in X$, *the following conditions are satisfied*: 1° *exists* Γ_0; 2° $||\Gamma_0 P(x_0)|| \leqslant \eta_0$ *and* $||x_0 - x_{-1}|| \leqslant \eta_{-1}$ $(\eta_0 \leqslant \eta_{-1})$; 3° $||\Gamma_0 P_{u,v,w}|| \leqslant K$ *for every, u, v, w in sphere* $S(s_0, 2\eta_{n-1})$; 4° $h_0 = (\eta_0 + \eta_{-1})K < \frac{1}{4}$, *then the equation* (1) *has at least a solution* x^* *in the sphere* $S(x_0, 2\eta_{-1})$ *and* $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Finally, it is shown that the convergence rapidity of the sequence constructed by the method of chord, can be improved by using the method of Steffensen, or when P is a homogenuous operator.

The Third Chapter contains the approximative methods of solving the operator equation (1), by using divided differences of the second order. The following definition for the order of convergence is given:

The approximative method for solving the equation (1) *given by the formula*

$$x_{n+1} = F^{[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-l+1}]}(x_n) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

where the operator $F^{[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-l+1}]}$ *has the divided differences to the order k inclusively, is convergent of the order k if*:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} ||x^* - x_n|| = 0$, *where* x^* *is a solution of equation* (1) *and*

b) $F^{[x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-l+1}]}_{x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-j}} = \theta_j$ *(element zero) for* $l = 1, 2, \ldots, k-1$, *and different by zero for* $j = k$, *for every n*.

Based on the order of convergence the common origin of some approximative methods of solving the equation (1) are studied: the method of chord, the method analogical to that of tangent parabolas, and the method analogical to that of tangent hyperbolas, given respectively by the formulas:

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \overline{\Gamma}_n P(x_n)$$

where $\overline{\Gamma}_n = [P_{x_n, x_{n-2}}]^{-1}$ and

$$x_{n+1} = x - \Gamma_n [I - P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \Gamma_u]^{-1} P(x_n)$$

where I is the identity operator.

Further on, some theorems of existence and uniqueness of the solutions of the operator equations, connected with methods analogical to those of tangent parabolas and hyperbolas, are given. It is shown that the convergence rapidity of the approximation sequence can be improved, by using Steffensen's method.

In the Fourth Chapter a class of methods for solving the operator equations (1) are given, using the formula

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n P(x_n) - \Gamma_n (I + \alpha R_n)^{-1} R_n P(x_n)$$

where α is a real or complex parameter, and

$$R_n = P_{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}} \Gamma_{n-1} P(x_{n-1}) \Gamma_n$$

For this class a theorem of the existence and uniqueness of the equation (1) solution is proved. It is shown that Steffensen's method for improving the convergence rapidity of the approximation sequence, in case of this class, can be applied too.

Finally, some particular cases of this class are given, showing that for $\alpha = 0$, $\alpha = -1$, the methods analogical to these of the tangent parabolas and hyperbolas are obtained.

REVIEWERS:

Prof. dr. doc. A. HAIMOVICI, University of Iaşi
Prof. dr. E. POPOVICIU, University of Cluj
Prof. dr. B. JANKÓ, Pedagogical Institute of Baia-Mare

CONTRIBUŢII LA STUDIUL RELAŢIILOR ŞI ALGEBRELOR UNIVERSALE

Rezumatul tezei de doctorat susţinută la 3 noiembrie 1969, la Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj, de IOAN PURDEA, pentru obţinerea titlului de doctor în matematici

Lucrarea conţine o introducere şi trei capitole. În cap. I se generalizează relaţiile n-are introducîndu-se relaţiile de tipul ($\mathfrak{B}$, K) şi se studiază algebra acestor relaţii. Rezultatele principale din acest capitol au fost publicate în „Revue Roumaine de Math. Purres et Appl.", t. 14, Nr. 4, pp. 533–556, 1969. În cap. II se studiază anumite proprietăţi ale relaţiilor difuncţionale care au fost introduse de J. Riguet. Rezultatele principale din acest capitol au fost publicate în „Rend. Lincei", t. 44, pp. 720–726, 1968; t. 45, pp. 117–121, 1968. În cap. III se generalizează algebrele universale introducîndu-se algebrele de tipul $\mathfrak{B}$ şi se studiază omomorfismele relaţionale ale acestor algebre. Rezultatele din acest capitol vor fi publicate în „Studia Univ. Babeş-Bolyai" (Cluj).

COMISIA DE DOCTORAT

Preşedinte: Conf. dr. P. MOCANU, decanul Facultăţii de Matematică şi Mecanică

Conducător ştiinţific: Prof. dr. doc. GH. PIC (Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj)

Membri: Acad. prof. GR. C. MOISIL (Universitatea din Bucureşti)

Acad. prof. G. CĂLUGĂREANU (Universitatea Babeş-Bolyai din Cluj)

Conf. dr. AL. SOLIAN (Universitatea din Bucureşti)

Şedinţe de comunicări

La şedinţele de comunicări organizate în anul 1969 la Facultatea de Matematică-Mecanică s-au prezentat următoarele referate:

17 ianuarie

G. Călugăreanu, *Relaţii între torsiunile lui Goritz.*

P. Szilágyi, *Probleme Dirichlet nenoetheriene.*

14 martie

A. Turcu, *Metode şi direcţii de dezvoltare în teoria oscilaţiilor.*

I. A. Rus, *Probleme la limită neliniare.*

11 aprilie

Gh. Pic, *Impresii dintr-o călătorie în R.D.G.*

D. D. Stancu, *Metode de calcul ale momentelor centrate.*

31 octombrie

G. Călugăreanu, *Invarianţi de contracţie în grupuri.*

I. A. Rus, *Pozitivitatea funcţiei lui Green corespunzătoare problemei bilocale.*

5 decembrie

B. Orban, *Generalizarea teoremei lui Hua.*

Gh. Coman, *Formule optimale de cubatură.*

Participări la manifestări ştiinţifice internaţionale

1. *9–16 februarie,* Sesiunea ştiinţifică a Societăţii Matematice din R.D.G.
   Gh. Pic, *Eine Eigenschaft endlicher distributiver Verbande.*
   Gh. Maurer, M. Szilagyi (Tg. Mureş), *Über dual-universelle Algebren.*
2. Prof. dr. doc. Gh. Pic, la invitaţia Acad. de Ştiinţe din Berlin (R.D.G.) a ţinut la data de 19 februarie 1969 următoarea conferinţă, la Berlin: *Über difunktionnelle Relationen.*
3. *17–22 martie,* Conferinţă pentru ionosferă, Kuhlungsborn (R.D.G.). A participat ca delegat al CNCS prof. dr. doc. Gh. Chiş.
4. *24–31 martie,* Consfătuirea INTERCOSMOS, Grupa Fizică cosmică, Berlin; a articipat prof. dr. doc. Gh. Chiş.
5. *10–17 aprilie,* Cursul de perfecţionare „Mecanica cerească şi sateliţii artificiali" organizat de Institutul de perfecţionare a inginerilor din Budapesta; a ţinut lecţii conf. dr. A. Pál.
6. *25–29 mai,* Colloque sur les equations differentielles, Mons (Belgia); a participat prof. dr. doc. D. V. Ionescu cu conferinţa *Problemes aux limites sur les equations differentielles et applications aux formules fondamentales de l'analyse numerique.*
7. *21–26 iunie,* Conferinţa IVA, Varna (Bulgaria):
   Gh. Chiş, *Bestimmung der Bahnelemente der künstlichen Erdsatelliten auf Grund von weniger genauen Beobachtungen.*
   T. Oproiu, D. Chiş, P. Horedt, *Asupra determinării perioadei cvasidraconitice a satelitului Explorer — 19 (63531) folosind metodele M. Loziunski şi M. I11.*
8. *21–25 iulie,* Simpozionul internaţional de teoria aproximării şi aplicaţiile sale, Lancester (Anglia):
   D. D. Stancu, *Use of probabilistic methods in the theory of uniform approximation of continuous functions.*

9. *24 august — 3 septembrie,* Colocviul de teoria constructivă a funcțiilor, Budapesta:
M. Frenkel, *Metoda medierii pentru studiul sistemelor de ecuații diferențiale cu un parametru mic.*
I. Kolumban, *Dualitat bei Optimierungsaufgaben.*
I. Marușciac, *Sur la structure des infrapolynomes généralisés.*
T. Popoviciu, *Sur la meilleure approximation en moyenne quadratique.*
E. Popoviciu, *Sur la meilleure approximation avec des conditions suplimentaires.*
D. D. Stancu, *A new class of uniform approximating polynomial operators in two and several variables.*

10. *17—27 octombrie,* Moscova, schimb de experiență în cadrul Comitetului de Stat pentru Cultură și Artă București, în domeniul difuzării cunoștințelor astronomice. A participat prof. dr. doc. Gh. Chiș.

11. *10—24 noiembrie,* Acad. prof. dr. doc. G. Călugăreanu a făcut o vizită la Bologna (Italia) unde a ținut următoarele conferințe:
1. *Puncte de vedere asupra teoriei nodurilor*;
2. *Rezultate asupra scufundării nodurilor pe varietăți orientabile*;
3. *Metode elementare în teoria izotopiei.*

12. *16—22 noiembrie,* Colocviul „Iterationsverfahren in der numerischen Mathematik", Oberwolfach, a participat asist. W. Breckner, *Konvexe Optimierungsaufgaben*

13. *19 noiembrie—2 decembrie,* prof. emerit. dr. doc. D. V. Ionescu a făcut o vizită la Universitatea Jdanov din Leningrad și a ținut următoarele conferințe:
Sur les restes des formules de quadrature de Gauss et de Turan
Sur une formule de quadrature de type Gauss.

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A INSTITUTULUI PEDAGOGIC DIN TG. MUREȘ

9—11 mai

Gy. Maurer, M. Szilagyi, *Rezolvabilitatea unor ecuații definite peste algebre universale*

Gy. Maurer, M. Szilagyi, *Produse atașate unui sistem ordonat de elemente dintr-un grup înzestrat cu o topologie filtrantă.*

Gh. Micula, *Asupra unor formule de cuadratură optimale.*

Gh. Pic, *O problemă din teoria relațiilor.*

I. A. Rus, *Probleme diferențiale neliniare.*

I. Virag, *Subgrupuri maximale ale grupurilor finite.*

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A INSTITUTULUI PEDAGOGIC DIN ORADEA

24—25 mai

P. Brădeanu, E. Balogh, *Stratul limită disipativ pe corpuri de rotație.*

Gh. Chiș, A. Pal, *Asupra determinării perioadelor cvasidraconice la sateliți artificiali.*

Gh. Chiș, Gh. Horedt, *Determinarea perioadei de rotație a satelitului 1965—11—4.*

I. Marușciac, M. Rădulescu, *O metodă a ortogonalizării pentru rezolvarea sistemelor liniare.*

T. Oproiu, M. Trifu, *Reducerea observațiilor fotografice ale sateliților artificiali la mașinile electronice de calcul.*

T. Oproiu, D. Chiș, *Asupra simetriei coeficientului de distorsiune al cometei U UC-25/2 de la Observatorul Astronomic din Cluj.*

T. Petrilă, *Asupra mișcării generale a unui profil într-un fluid ideal.*

M. Rădulescu, *Mulțimi de multiplicitate pentru serii trigonometrice convergente aproape peste tot.*

I. Todoran, *Asupra relației dintre indicele de culoare și temperatura efectivă a unei stele.*

A. Turcu, *Oscilațiile neliniare ale unui sistem cu două grade de libertate în caz de nerezonanță.*

V. Ureche, *Perioada de bătaie a cefeidei scurt-periodice SW Piscium.*

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A INSTITUTULUI PEDAGOGIC DIN BAIA MARE

24—25 mai

Gh. Micula, *Asupra unor formule de aproximare optimale.*

Gh. Pic, *O proprietate a grupurilor p-resolubile.*

I. A. Rus, *Asupra unei probleme bilocale.*

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A UNIVERSITĂȚII „BABEȘ-BOLYAI" DIN CLUJ

26—27 mai

G. Călugăreanu, *Invarianți de absorbție în grupuri.*

Gh. Chiș, *Probleme ale dinamicii atmosferei înalte studiate cu ajutorul sateliților artificiali ai pămîntului.*

G. Coman, *Asupra unor formule optimale de cuadratură.*

D. V. Ionescu, *Asupra unor formule c cuadratură.*

I. Marusciac, *O problemă generală de programare liniară cu mai multe funcții de scop.*

P. Mocanu, *Asupra unei proprietăți de convexitate generalizată în teoria reprezentării ſucomeʌo (II).*

C. Mocanu, *Asupra unei probleme extremale privind rădăcinile unor ecuații algebrice.*
I. Munteanu, *Gradul unei transformări și aplicațiile sale în analiză.*
A. Ney, *Proprietăți sumatorii ale unor clase de funcții neconvexe, respectiv neconcave.*
Gh. Pic, *O proprietate caracteristică a algebrelor booleene.*
I. Pop, stud. Peter Árpád, *Formarea stratului limită magnetohidrodinamic plan.*
T. Popoviciu, *Asupra generalizării funcțiilor convexe de ordin superior. Nota V. (Funcții spline generalizate).*
E. Popoviciu, *Proprietăți ale lanțurilor de mulțimi interpolatoare.*
I. Purdea, *Algebre de tipul B.*
I. A. Rus. *Pozitivitatea funcției lui Green-Robin.*
D. D. Stancu, *Aplicații ale analizei numerice în calculul probabilității.*
I. Stan, *Difuzia convectivă liberă a unei plăci verticale în mișcare transversală.*
C. Tarția, *Asupra noțiunii de complexitate a algoritmilor.*
A. Tóth, *Evoluția învățămîntului matematicii la facultatea noastră în ultimii 25 de ani.*
E. Virag, *O generalizare a produsului regular.*

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ A INSTITUTULUI DE CALCUL CLUJ

20—21 iunie
T. Popoviciu, *Asupra conservării unor aluri ale șirurilor prin anumite transformări.*
E. Popoviciu, *Asupra unor scheme abstracte de interpolare.*

25—31 august Seminar romano-finlandez: Aplicații quasiconforme". A participat acad. prof. dr. doc. G. Călugăreanu, conf. dr. P. Mocanu, conf. dr. M. Țarină.

AL IV-LEA CONGRES AL MATEMATICIENILOR DE EXPRESIE LATINĂ, BUCUREȘTI-BRAȘOV

17—24 septembrie
D. V. Ionescu, *Extinderea unei formule de curbură.*
C. Kalik, *O problemă de minim, generatoare de funcții spline.*
I. Marușciac, *Infrapolinoamele generalizate de preinterpolare.*
I. Maurer, M. Szilagyi, *Asupra produselor filtrate ale grupurilor.*
P. Mocanu, *Despre o proprietate de stelaritate în teoria reprezentărilor conforme.*
Gr. Moldovan, *Despre unii operatori de tip Bernstein.*
I. Muntean, *Oscilații armonice pentru unele sisteme de două ecuații diferențiale.*
Gh. Pic, *O proprietate caracteristică a algebrelor booleene.*
E. Popoviciu, *Noțiune de convexitate în matematicile moderne.*
I. A. Rus, *Principii de maxim pentru soluțiile unui sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea.*
E. Schechter, *O metodă de delimitare globală a erorilor în integrarea numerică a ecuațiilor cu derivate parțiale.*
M. Schechter, *Cîteva proprietăți ale omomorfizmelor structurilor relaționale.*
A. Turcu, *Oscilații neliniare ale unui sistem cu două grade de libertate.*

SESIUNEA ȘTIINȚIFICĂ JUBILIARĂ DE MECANICĂ, BUCUREȘTI

12—14 decembrie
P. Brădeanu, *Asupra integrării ecuației stratului limită disipativ.*
A. Pál, *Unele rezultate privind determinarea parametrilor atmosferei înalte, la înălțimea perigeului sateliților artificiali ai Pămîntului.*
T. Petrilă, *Asupra mișcării unui profil într-un fluid ideal în prezența unui perete rectiliniu.*
I. Stan, *Ecuația generală a difuziei convective pe o placă.*
A. Turcu, *Asupra oscilațiilor neliniare ale unui sistem mecanic cu două grade de libertate în caz de rezonanță.*

SESIUNEA INSTITUTULUI POLITEHNIC CLUJ

22—23 decembrie
A. Turcu, C. Tudose, *Interacțiunea unei surse de energie neideale cu un sistem neliniar avînd două grade de libertate.*

Vizite

Prof. B. E. Pobedria, Universitatea din Moscova (U.R.S.S.) *28 februarie.*
Prof. Gh. Th. Gheorghiu, Institutul Politehnic din București, *14—18 aprilie.*
Prof. Gh. Gheorghiev, Universitatea din Iași, *22 mai.*
Prof. C. Andreianu-Cazacu, Universitatea din București, *26 mai.*
Prof. F. W. Lawvere, Dalhousie University Halifax N. S. (Canada) și E.T.H. Zürich (Elveția), *26 iunie.*

Prof. D. T a d e u s, Universitatea din Katowicze (R.P.P.), *27 iunie.*

F. S z a s z, Cercetător principal la Institutul de Matematică al Academiei R.P.U., Budapesta, *12 august.*

Prof. E. P f e u d l e r, University of Minnesota (U.S.A.), *26 august.*

Prof. G. Z a c h e r, Universita di Padova (Italia), *24 septembrie.*

Prof. F. S u c c i, Universita dele Aquila (Italia), *24 septembrie.*

Prof. G. S e s t i n i, Universita di Firenze (Italia), *25 septembrie.*

Prof. B. L e m a i r e, Universitatea din Paris (Franța), *26 septembrie.*

M. N i v a t, Université de Rennes (Franța), *1 octombrie.*

Prof. A. M o n t e i r o, Universitatea Bahia-Blanca (Argentina), *20 octombrie.*

Prof. Gr. C. M o i s i l, Universitatea din București, *4 noiembrie.*

Întreprinderea Poligrafică Cluj – 281/1971

144

În cel de al XV-lea an de apariţie (1970) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică-mecanică (2 fascicule);
fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—mineralogie (2 fascicule);
geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
sociologie;
ştiinţe economice (2 fascicule);
psihologie—pedagogie;
ştiinţe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XV году издания (1970) *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* выходит следующими сериями

математика—механика (2 выпуска);
физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—минералогия (2 выпуска);
география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
социология;
экономические науки (2 выпуска);
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XV-me année de publication (1970) les *Studia Universitatis Babeş—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—mécanique (2 fascicules);
physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie-minéralogie (2 fascicules);
géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie;
sociologie;
sciences économiques (2 fascicules);
psychologie-pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).