STUDIA
UNIVERSITATIS BABEȘ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 1

1970

CLUJ

ANUL XV 1970

STUDIA
UNIVERSITATIS BABEŞ-BOLYAI

SERIES MATHEMATICA-MECHANICA

FASCICULUS 1

Redacția: CLUJ, str. M. Kogălniceanu, 1 • Telefon: 1 34 50

SUMAR — СОДЕРЖАНИЕ — CONTENTS — SOMMAIRE

STRUCTURA ALGEBRICĂ A SPAŢIILOR METRICE

de

RENDI BÉLA

Studiul geometric al spaţiilor metrice a fost dezvoltat de: G. Birkhoff [1], H. Busemann [2], [3], L. Blumenthal [4], B. Pitcher şi M. Smilley [5]. Unele rezultate şi definiţii ale acestor autori utilizate în prezenta lucrare, vor fi date mai jos. În baza lor introducem aici două operaţii a căror natură algebrică se studiază în funcţie de proprietăţi geometrice.

DEFINIŢIA 1. Un spaţiu metric local compact X verifică proprietatea de convexitate în sens Menger dacă:

$$\forall x,\ y \in X \quad \exists z \in X \text{ astfel încît } \rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(z, y)$$

În acest caz x, y, z formează un triplet liniar şi se notează: (x, z, y) [1], [2], [3], [4], [5].

DEFINIŢIA 2. O mulţime $S(x, y)$ pentru care

a) $S(x, y) \subset B(x, y) = \{z \in X,\ (x, z, y)\}$

b) $S(x, y)$ este izometric cu segmentul $[0, a] \subset R$ unde $a = \rho(x, y)$,

se numeşte segment metric [2], [4].

Segmentul metric există pentru orice două puncte ale unui spaţiu metric, convex şi complet, dar nu este asigurată unicitatea lui.
Dacă are loc: $\forall A, B \subset X$, A, B — convexe şi închise $\Rightarrow A \cap B$ convex, atunci $\forall x, y \in X$, $S(x, y)$ este unic determinat [4].

DEFINIŢIA 1'. Un spaţiu metric local compact X verifică proprietatea de exterior convexitate dacă:

$$\forall x,\ y \in X\ \exists z \in X \text{ astfel încît } (x, y, z) \ [4].$$

DEFINIŢIA 2'. O mulţime $L(x, y)$ pentru care

a) $L(x, y) \subset \overleftrightarrow{B}(x, y) = \{z \in X,\ (x, z, y) \vee (x, y, z) \vee (z, x, y)\}$

b) $L(x, y)$ este izometric cu axa reală R,

se numeşte linie metrică [2], [4].

Spaţiul metric X verifică proprietatea celor două triplete dacă oricare două din următoarele patru afirmaţii ;

$$(a, b, c), (a, b, d), (a, c, d), (b, c, d)$$

implică celelalte două, pentru orice a, b, c, d din X.

Dacă X este un spaţiu metric convex, exterior convex, complet şi verifică proprietatea celor două triplete, atunci $\forall x, y \in X$, $L(x, y)$ există şi este unic determinat de cele două puncte x şi y [4].

Spaţiile metrice în care unicitatea segmentului metric este asigurată doar local, adică :

$\forall x \in X$ metric convex şi complet, $\exists \varepsilon > 0$ astfel încît $S(a, b)$ să fie unic determinat pentru orice $a, b \in V(x, 2\varepsilon) = \{y \in X, \ \rho(x, y) < 2\varepsilon\}$, se numesc spaţii metrice cu vecinătăţi standard [2].

Vom nota : $\overrightarrow{S(x, y)} = \{z \in V(a, 2\varepsilon), (x, y, z)\} \cup S(x,y)$

$$\overleftarrow{S(x, y)} = \{z \in V(a, 2\varepsilon), (z, x, y)\} \cup S(x,y)$$

pentru $x, y \in V(a, 2\varepsilon)$.

Definiţia 3. Spaţiul metric X verifică condiţia $\Delta(x_0)$ dacă este un spaţiu metric cu vecinătăţi standard, şi dacă oricum ar fi trei şiruri diferite $\{x_\nu\}, \{y_\nu\}, \{z_\nu\}$, $\nu \in N$, care converg către acelaşi punct x_0', din :

1. $\overrightarrow{S(x_\nu, y_\nu)}$ şi $\overrightarrow{S(x_\nu, z_\nu)}$ converg la limite diferite

2. $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{\rho(x_\nu, y_\nu)}{\rho(x_\nu, z_\nu)}$ există (admiţînd şi infinitul)

rezultă :

1'. $\overrightarrow{S(y_\nu, z_\nu)}$ este convergent

2'. $\lim\limits_{\nu\to\infty} R(y_\nu, x_\nu, z_\nu) = 1$ dacă şi numai dacă

$\lim\limits_{\nu\to\infty} \overrightarrow{S(x_\nu, z_\nu)} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \overrightarrow{S(y_\nu, z_\nu)}$ ori $\lim\limits_{\nu\to\infty} \overrightarrow{S(y_\nu, x_\nu)} = \lim\limits_{\nu\to\infty} \overrightarrow{S(y_\nu, z)}$ unde $R(x, y, z) =$

$$= \frac{\rho(x, y) + \rho(y, z)}{\rho(x, z)} \ [2].$$

Într-un spaţiu metric care verifică condiţia $\Delta(x_0)$, expresia

$$m_{x_0}(x, y) = \lim_{t\to\infty} \frac{\rho(x_t, y_t)}{t}$$

definită pentru $x, y \in V(x_0, 2\varepsilon)$ şi în care

$$x_t \in S(x_0, x) \quad \text{şi} \quad \rho(x_0, x_t) = t \cdot \rho(x_0, x)$$

$$y_t \in S(x_0, y) \quad \text{şi} \quad \rho(x_0, y_t) = t \cdot \rho(x_0, y),$$

se numeşte metrică locală [2].

Pentru $x, y, x', y' \in V(x_0, 2\varepsilon)$ segmentele $S(x, y)$, $S(x', y')$ sînt paralele (se notează $S(x, y)\|_{x_0} S(x', y')$) dacă,

$$\lim_{t\to\infty} \overleftrightarrow{S(x_t, y_t)} = \lim_{t\to\infty} \overleftrightarrow{S(x'_t, y'_t)}$$

unde $\overleftrightarrow{S(x, y)} = \overrightarrow{S(x, y)} \cup \overleftarrow{S(x, y)}$ [2].

Paralelismul astfel definit este simetric reflexiv şi tranzitiv. Avem:

— Dacă $S(x, y)\|_{x_0} S(x', y')$ şi $m_{x_0}(x, y) = m_{x_0}(x', y')$, atunci

$$S(x, x')\|_{x_0} S(y, y') \text{ şi } m_{x_0}(x, x') = m_{x_0}(y, y'), \text{ sau}$$
$$S(x, y')\|_{x_0} S(y, x') \text{ şi } m_{x_0}(x, y') = m_{x_0}(y, x').$$

— Dacă $S(x, y)\|_{x_0} S(x', y')$ atunci:

$$\overrightarrow{S(x, y)} \cap \overleftrightarrow{S(x', y')} = \emptyset \quad \text{sau} \quad \overleftrightarrow{S(x, y)} = \overleftrightarrow{S(x', y')}.$$

— Dacă $\rho(x, y) = \rho(x, z) + \rho(z, y)$ pentru $x, y \in V(x_0, 2\varepsilon)$ atunci $m_{x_0}(x, y) = m_{x_0}(x, z) + m_{x_0}(z, y)$, adică segmentele definite de cele două metrici coincid.

— Dacă $\rho(x, y) = k \cdot m_{x_0}(x, y)$ atunci $\rho(x, y) = m_{x_0}(x, y)$.

Definiţia 4. Fie X un spaţiu metric care satisface următoarea condiţie:

(A) $\forall x, y \in X$, $L(x, y)$ este unic determinat.

Fie $x_0 \in X$ şi fie $x, y \in X$. Fie $z \in L(x_0, z)$ astfel determinat încît $\rho(x_0, z') = \rho(z', z)$ şi (x_0, z', z), unde $z' \in L(x, y)$ astfel încît $\rho(x, z') = \rho(z', y)$.

Elementul z se numeşte suma lui x şi y şi se notează:

$$z = x \dot{+} y.$$

Se observă că această lege de compoziţie depinde de alegerea lui x_0 dar după ce am fixat x_0, z este unic determinat.

Au loc următoarele proprietăţi:

a) $x \dot{+} y = y \dot{+} x$ pentru orice $x, y \in X$

b) $x \dot{+} x_0 = x$ pentru orice $x \in X$

c) Ecuaţia $x \dot{+} a = b$ are soluţie unică pentru orice $a, b \in X$. Primele două proprietăţi sînt evidente. Pentru a arăta a treia se consideră $z \in S(x_0, b)$ astfel încît $\rho(x_0, z) = \rho(z, b)$. Elementul $c \in L(a, z)$ astfel ales încît (a, z, c) şi $\rho(a, z) = \rho(z, c)$ este soluţia căutată. Unicitatea rezultă imediat. S-a arătat astfel că spaţiul metric X înzestrat cu legea de compoziţie definită mai sus este un lup comutativ.

Se poate defini şi înmulţirea cu un scalar. Fie $r \in R$ şi $x \in X$. Prin rx se înţelege elementul $y \in X$ pentru care:

1. $\rho(x_0, y) = |r| \cdot \rho(x_0, x)$
2. $y = x$ dacă $r = 1$

$$(x_0, x, y) \text{ dacă } r > 1$$
$$(x_0, y, x) \text{ dacă } 0 < r < 1$$
$$(y, x_0, x) \text{ dacă } r > 0$$

Elementul y astfel determinat este unic și din 1. rezultă că $ox = x_0$ pentru orice $x \in X$.

Înmulțirea cu un scalar nu este distributivă față de adunarea definită mai sus.

DEFINIȚIA 4'. Fie X un spațiu metric care satisface următoarea condiție:

(B) $$\forall x_0 \in X \text{ și } \forall x, y \in X,\ m_{x_0}(x, y) \text{ există.}$$

Fie $x_0 \in X$ și fie $x, y \in X$. Fie $z \in L(x_0, z')$ astfel determinat încît $m_{x_0}(z, z') = m_{x_0}(z', x_0)$ și (x_0, z', z) unde $z' \in L(x, y)$ astfel încît $m_{x_0}(x, z') = m_{x_0}(z', y)$. Elementul z astfel determinat se numește suma locală a lui x și y și se notează:

$$z = x + y.$$

Spațiul metric X înzestrat cu această lege de compoziție este de asemenea un lup comutativ. Se observă că în general $x + y \neq x \dot{+} y$, dar dacă are loc una din următoarele afirmații:

$$(x_0, x, y),\ (x, x_0, y),\ (x_0, y, x)$$

atunci $x + y = x \dot{+} y$.

Se poate defini înmulțirea cu un scalar folosind metrica locală și se arată ușor că:

Înmulțirea cu un scalar definită cu $m_{x_0}(x, y)$ coincide cu cea definită cu $\rho(x, y)$, și este distributivă față de adunarea locală.

LEMA 1. *Adunarea locală este asociativă dacă și numai dacă* $(x + y) + z = \left(\frac{x+z}{2} + \frac{y+z}{2}\right) + \frac{x+y}{2}$ *pentru orice* $x, y, z \in X$.

Demonstrație.

$(x + y) + z = x + (y + z) \Rightarrow (x + y) + z = \left(\frac{x+z}{2} + \frac{y+z}{2}\right) + \frac{x+y}{2}$ este evident.

Invers. Fie $(x + y) + z = \left(\frac{x+z}{2} + \frac{y+z}{2}\right) + \frac{x+y}{2}$

Se notează:

$$\frac{x+z}{2} = y_1,\quad \frac{y+z}{2} = x_1,\quad \frac{x+y}{2} = z_1$$

Avem: $(x_1 + y_1) + z_1 = \left(\frac{x_1+z_1}{2} + \frac{y_1+z_1}{2}\right) + \frac{x_1+y_1}{2}$

Continuînd procedeul obținem:

$$(x + y) + z = (x_1 + y_1) + z_1 = \ldots = (x_n + y_n) + z_n = \ldots$$

Se arată ușor că șirurile $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ $n \in N$, sînt convergente către același punct $a \in X$. Deci avem:

$$(x + y) + z = 3a \quad \text{și} \quad x + (y + z) = 3a$$

De unde rezultă asociativitatea adunării locale.

LEMA 2. *Adunarea locală este asociativă dacă şi numai dacă* $\frac{x+z}{2}+\frac{y+z}{2}=z+$ $+\frac{x+y}{2}$ *pentru orice* $x, y, z \in X$.

Demonstraţie.

$$(x+y)+z=x+(y+z) \Rightarrow \frac{x+z}{2}+\frac{y+z}{2}=z+\frac{x+y}{2}$$

este evident.

Invers. Fie $\frac{x+z}{2}+\frac{y+z}{2}=z+\frac{x+y}{2}$.

Atunci avem: $\frac{x+y}{2}+\frac{x}{2}=\frac{x+y}{2}+\frac{x+x_0}{2}=x+\frac{y+x_0}{2}=x+\frac{y}{2}$.

Înmulţind relaţia obţinută cu 2 obţinem $(x+y)+x=2x+y$.

Atunci: $\left(\frac{x+z}{2}+\frac{y+z}{2}\right)+\frac{x+y}{2}=\left(\frac{x+y}{2}+z\right)+\frac{x+y}{2}=(x+y)+z$ Ceea ce, pe baza lemei 1, demonstrează asociativitatea adunării locale.

Vom cerceta cînd înmulţirea cu un scalar este distributivă faţă de adunarea definită cu metrica $\rho(x, y)$.

LEMA 1'. $\forall r \in R$ *şi* $\forall x, y \in X$ $r(x+y)=rx+ry$ *dacă şi numai dacă* $\forall x', y' \in L(x, y)$ *are loc*:

$$\rho(x, y)=k \cdot m_{x_0}(x, y) \Rightarrow \rho(x', y')=k \cdot m_{x_0}(x', y').$$

Demonstraţie. Fie $r(x+y)=rx+ry$. Deci dacă z este mijlocul segmentului $S(x, y)$ în sensul metricii $\rho(x, y)$ atunci rz este mijlocul segmentului $S(rx, ry)$ în sensul metricii $\rho(x, y)$. Are loc:

$$m_{x_0}(x, y)=m_{x_0}(x, z)+m_{x_0}(z, y)$$

ceea ce înseamnă că:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\rho(x_t, y_t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{\rho(x_t, z_t)}{t}+\lim_{t\to 0}\frac{\rho(z_t, y_t)}{t}$$

Dar $\rho(x_t, z_t)=\rho(z_t, y_t)$ căci z_t este mijlocul segmentului $S(x_t, y_t)=S(tx, ty)$. Deci are loc:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\rho(x_t, y_t)}{t}=\lim_{t\to 0} 2\cdot\frac{\rho(x_t, z_t)}{t}=\lim_{t\to 0} 2\cdot\frac{\rho(z_t, y_t)}{t}$$

adică z este mijlocul segmentului $S(x, y)$ în sensul metricii locale după cum din egalităţile de mai sus rezultă:

$$m_{x_0}(x, y)=2\cdot m_{x_0}(x, z)=2\cdot m_{x_0}(z, y).$$

Trebuie arătat că pentru $\forall(x', y' \in L(x, y)$ are loc:

$$\rho(x, y)=k\cdot m_{x_0}(x, y) \Rightarrow \rho(x', y')=k\cdot m_{x_0}(x' y').$$

În prima etapă se arată că are loc această afirmaţie pentru $y' = x$ şi x' oarecare din $S(x, y)$. Fie pentru aceasta z_1 mijlocul segmentului $S(x, y)$. Are loc:

$$\rho(x, z_1) = k \cdot m_{x_0}(x, z_1)$$

căci $\rho(x, y) = 2 \cdot \rho(x, z_1)$ şi $m_{x_0}(x, y) = 2 \cdot m_{x_0}(x, z_1)$. Deci avem şi:

$$\rho(z_1, y) = k \cdot m_{x_0}(z_1, y)$$

Dacă $x' = z_1$ atunci demonstraţia s-a terminat. Se presupune că $x' \neq z_1$ şi că $x' \in S(z_1, y)$. Fie atunci z_2 mijlocul segmentului $S(z_1, y)$.

Deoarece $\rho(z_1, y) = k \cdot m_{x_0}(z_1, y)$ rezultă că:

$$\rho(z_1, z_2) = k \cdot m_{x_0}(z_1, z_2)$$

Dar cum $\rho(x, z_1) = k \cdot m_{x_0}(x, z_1)$ rezultă că:

$$\rho(x, z_2) = k \cdot m_{x_0}(x, z_2)$$

Dacă $x' = z_2$ atunci demonstraţia s-a terminat. Presupunînd $x' \neq z_2$ şi continuînd procedeul se obţine şirul $\{z_n\}$, $n \in N$, convergent către punctul x', şi pentru care are loc;

$$\rho(x, z_n) = k \cdot m_{x_0}(x, z_n)$$

De unde prin trecere la limită se obţine:

$$\rho(x, x') = k \cdot m_{x_0}(x, x').$$

Fie acum x' şi y' oarecare din $L(x, y)$. Are loc o relaţie de forma:

$$\rho(x', y') = \varepsilon_1 \cdot \rho(x', x) + \varepsilon_2 \cdot \rho(x, y') \tag{I}$$

unde $\varepsilon_1 = \pm 1$, $\varepsilon_2 = \pm 1$.

Atunci are loc şi relaţia:

$$m_{x_0}(x', y') = \varepsilon_1 \cdot m_{x_0}(x', x) + \varepsilon_2 \cdot m_{x_0}(x, x') \tag{II}$$

Din $\rho(x, y) = k \cdot m_{x_0}(x, y)$ rezultă:

$$\rho(x, x') = k \cdot m_{x_0}(x, x') \quad \text{şi} \quad \rho(x, y') = k \cdot m_{x_0}(x, y').$$

Înmulţind (II) cu k obţinem:

$$\rho(x', y') = k \cdot m_{x_0}(x', y').$$

Invers. Fie că are loc: $\forall x', y' \in L(x, y)$ avem

$$\rho(x, y) = k \cdot m_{x_0}(x, y) \Rightarrow \rho(x', y') = k \cdot m_{x_0}(x', y').$$

Trebuie arătat că dacă z este mijlocul segmentului $S(x, y)$ în sensul metricii $\rho(x, y)$ atunci rz este mijlocul segmentului $S(rx, ry)$în sensul metricii $\rho(x, y)$. Se poate presupune că $0 < r < 1$. Are loc:

$$\rho(x, y) = k \cdot m_{x_0}(x, y) \quad \text{şi} \quad \rho(x, z) = k \cdot m_{x_0}(x, z)$$

De unde obţinem:

$$m_{x_0}(x, y) = \frac{1}{k} \rho(x, y) = \frac{2}{k} \rho(x, z) = 2 \cdot m_{x_0}(x, z)$$

adică z este mijlocul segmentului $S(x, y)$ în sensul metricii locale. Pentru calcularea metricii locale se foloseşte şirul particular $\{r^n\}$ cu $n \in N$, convergent către zero. Se obţine:

$$m_{x_0}(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho(r^n x, r^n y)}{r^n}$$

de unde rezultă

$$r \cdot m_{x_0}(x, y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\rho(r^{n-1}\cdot rx, r^{n-1}\cdot ry)}{r^{n-1}} = m(rx, ry)$$

Deci putem scrie:

$$m_{x_0}(x, y) = 2\cdot m_{x_0}(x, z) = \frac{2}{r}\cdot m_{x_0}(rx, rz) = \frac{1}{r}\cdot m_{x_0}(rx, ry).$$

Înmulţind cu k relaţia de mai sus obţinem că rz este mijlocul segmentului $S(rx,ry)$ în sensul metricii $\rho(x, y)$, de unde rezultă că înmulţirea cu un scalar este distributiv faţă de adunarea definită cu metrica $\rho(x, y)$.

CONSECINŢĂ. $r(x \dotplus y) = rx \dotplus ry$ dacă şi numai dacă

$$x \dotplus y = x + y.$$

Demonstraţia este imediată, fiindcă din lema precedentă rezultă că: $r(x \dotplus y) = rx \dotplus ry$ dacă şi numai dacă din $\rho(x, z) = \rho(z, y)$ rezultă că şi $m_{x_0}(x, z) = m_{x_0}(z, y)$.
Înmulţirea cu un scalar fiind aceeaşi pentru cele două metrici, rezultă imediat că cele două adunări coincid.

TEOREMA 1. *Într-un spaţiu metric X care verifică (A) şi (B) următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

(a) $\forall x, y \in X$ şi $\forall r \in R$, $r(x \dotplus y) = rx \dotplus ry$
(b) $\forall x, y \in X$, $x \dotplus y = x + y$
(c) $\forall x', y' \in L(x, y)$, $\rho(x, y) = k\cdot m_{x_0}(x, y) \Rightarrow \rho(x', y') = k\cdot m_{x_0}(x, y)$.

Demonstraţia acestei teoreme este evidentă pe baza lemei 1'.

TEOREMA 2. *Într-un spaţiu metric X care verifică (A) şi (B) următoarele afirmaţii sînt echivalente.*

(a) $\forall x, y, z \in X$, $(x + y) + z = x \dotplus (y + z)$
(b) $\forall x, y, z \in X$, $\left(\frac{x+y}{2} + \frac{z+y}{2}\right) + \frac{x+z}{2} = (x + z) + y$
(c) $\forall x, y, z \in X$, $\frac{x+z}{2} + \frac{y+z}{2} = \frac{x+y}{2} + z$
(d) *X este un spaţiu normat.*

Demonstraţie. Este evident pe baza lemelor demonstrate că $(a) \sim (b)$ şi $(a) \sim (c)$. Avem de arătat că $(a) \sim (d)\cdot(d) \Rightarrow (a)$ este imediată. Arătăm $(a) \Rightarrow (d)$. Pentru aceasta se observă că X este un spaţiu vectorial peste cîmpul numerelor reale. Se introduce norma:

$$||x|| = m_{x_0}(x_0, x)$$

Au loc:

(1) $||x|| \geqslant 0$, egalitatea are loc dacă şi numai dacă $x = x_0$

(2) $||rx|| = |r| \cdot ||x||$

(3) $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$

Primele două afirmaţii sînt evidente. Pentru a demonstra (3) se observă că $S(x_0, y) ||_{x_0} S(x, x + y)$ şi $m_{x_0}(x_0, y) = m_{x_0}(x, x + y)$. Afirmaţia (3) rezultă imediat din inegalitatea triunghiului ce are loc pentru metrica $m_{x_0}(x, y)$ pentru punctele x_0, x şi $x + y$. Cu aceasta am demonstrat că X este un spaţiu normat, deci teorema este demonstrată.

(Intrat în redacţie la 20 martie 1969)

BIBLIOGRAFIE

1. G. Birkhoff, *Metric foundations of geometry*. „Trans. Amer. Math. Soc.," **55**, 465—492, 1944.
2. H. Busemann, *Metric methods in Finsler spaces in the foundation of geometry*. Princeton, 1942.
3. H. Buseman, *On spaces in which two points determine a geodesic*. „Trans. Amer. Math. Soc.", **54**, 171—184, 1943.
4. L. Blumenthal, *Theory and applications of distance geometry*. Oxford, 1955.
5. B. Pitcher, M. Smilley, *Transitivites of betweennes*. „Trans. Amer. Math. Soc.," **52**, 95—127, 1942.

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Резюме)

Автор статьи, используя геометрию метрических пространств, определил две бинарные операции. Первая операция определяется используя метрику $\rho(x, y)$ метрического пространства X, а вторая — используя локальную метрику m_{x_0} (x,y), присоединенную к ρ. Определено также умножение скаляром. Определив эти операции, автор установил необходимые и достаточные условия для того, чтобы метрическое пространство X было группой по отношению к этим операциям, и показал, что в этих условиях получаем даже нормированное пространство.

ON ALGEBRIC STRUCTURE OF THE METRIC SPACES

(Summary)

Two binary operations were defined in the present paper, using the geometry of metric speces. The first operation is defined using the $\rho(x,y)$ metric of the X metric space, and the second one using the $m_{x_0}(x,y)$ local metric attached to ρ. Multiplication with a scalar was also defined and there were established the conditions necessary and sufficient for X metric space to be a group with these operations. It is also shown that even a normed linear space can be obtained in these conditions.

SPAŢII PERFECT NORMALE

de

V. CÎMPIAN

În acest articol se rezolvă două probleme puse de J. L. Kelley în [1], se stabilesc unele proprietăţi ale spaţiilor perfect normale şi se dă o teoremă de metrizabilitate a spaţiului perfect normal.

Noţiunile şi notaţiile sînt după J. L. Kelley [1]. Un spaţiu topologic e perfect normal dacă orice mulţime închisă e G_δ. Introducem următoarele definiţii:

DEFINIŢIA 1. O mulţime U dintr-un spaţiu topologic admite o descompunere normală dacă e limita unui şir monoton de mulţimi deschise (închise), încît între două mulţimi consecutive ale şirului există o mulţime închisă (deschisă) intermediară.

DEFINIŢIA 2. Descompunerea normală a elementelor unei mulţimi U e uniformă dacă oricare ar fi submulţimea U_1 a lui U şi oricare ar fi indicele n, dacă $x \notin \mathrm{U}$ atunci există o vecinătate V a lui x încît $V \cap U_n = 0$, pentru orice $U \in \mathrm{U}_1$ şi $U = \lim_{n\to\infty} U_n$.

Proprietăţi. P_1. Orice mulţime deschisă a unui spaţiu topologic perfect normal admite o descompunere normală.

Demonstraţie. Pe baza formulelor lui Morgan, într-un spaţiu perfect normal, orice mulţime deschisă e F_σ adică $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$ unde U e deschisă, iar mulţimile F_n sînt închise pentru orice n. Fie $U_1 = F_1$ şi $U_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n} F_k \cup \bar{G}_n$ pentru $n = 1, 2, \ldots$, iar mulţimile G_n sînt deschise şi supuse relaţiilor $\bar{U}_n \subset G_n \subset \bar{G}_n \subset U$, $n = 1, 2, \ldots$, relaţii ce subzistă într-un spaţiu normal. Atunci $U_n \subset G_n \subset U_{n+1}$, iar descompunerea:

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n; \quad U_n \subset G_n \subset U_{n+1} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{1}$$

este normală; U fiind limita unui şir crescător de mulţimi închise cu proprietatea că între doi termeni consecutivi există o mulţime deschisă intermediară.

P_2. Orice mulţime închisă a unui spaţiu topologic perfect normal e o zero-mulţime.

Demonstrație. Fie $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, mulțimea F fiind închisă, iar G_n deschisă pentru orice n. Atunci în baza lemei lui Uryson pentru orice pereche de mulțimi închise disjuncte F și $X - G_n$ există o funcție continuă f_n definită pe spațiul topologic X cu valori în $\left[0 ; \frac{1}{2^n}\right]$ încît $f_n(x) = 0$ pentru $x \in F$ și $f_n(x) = \frac{1}{2^n}$ pentru $x \in X - G_n$. Atunci funcția $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ e continuă și $f^{-1}(0) = F$. În adevăr, dacă $x \in F$, $f(x) = 0$, căci $f_n(x) = 0$ pentru orice n. Dacă $x \notin F$ atunci există un număr natural n încît $x \in X - G_n$ deci $f_n(x) = \frac{1}{2^n}$, iar $f(x) \geqslant \frac{1}{2^n}$ adică $f(x) \neq 0$.

COROLAR. Într-un spațiu topologic perfect normal numărul cardinal al familiilor mulțimilor închise este egal cu numărul cardinal al funcțiilor continue definite pe acest spațiu cu valori reale; dacă puterea familiei mulțimilor închise e superioară puterii continuului.

Demonstrație. Într-un spațiu topologic în care orice mulțime închisă e o zero-mulțime avem în baza lui [2] relația card $\mathcal{F}$ = card C dacă card $\mathcal{F} > \aleph$ unde $\mathcal{K}$ e familia mulțimilor închise din X; C e familia funcțiilor continue definite pe X cu valori reale.

P_3. Orice spațiu pseudometrizabil e perfect normal.

Demonstrație. Fie d pseudometrica pentru spațiul topologic X și F o mulțime închisă din X. Definim recursiv mulțimile deschise $G_n = \left\{x ; d(x, F) < \frac{1}{2^n}\right\}$ atunci $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. În adevăr, dacă $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ rezultă $d(x, F) < \frac{1}{2^n}$, pentru orice n, deci $d(x, F) = 0$ de unde rezultă că $x \in \bar{F} = F$. Incluziunea inversă e evidentă.

P_4. Un produs nenumărabil al intervalului $[0, 1]$ nu e un spațiu perfect normal (cu topologia produs).

Demonstrație. Intervalul $[0, 1]$ e un spațiu T_1, iar spațiul produs e tot T_1. În adevăr fie $x = \{x_\alpha ; \alpha \in A\}$ și $y = \{y_\alpha ; \alpha \in A\}$ două puncte ale spațiului produs, încît $y \in x$. Dacă $y \neq x$ atunci există un indice α încît $y_\alpha \neq x_\alpha$. Fie $2\delta = |y_\alpha - x_\alpha|$ atunci y nu aparține vecinătății lui x de forma $P_\alpha^{-1}(x - \delta ; x + \delta)$, deci $y \neq \bar{x}$, ceea ce contrazice presupunerea. Deci aderența oricărui punct conține numai acel punct. Să arătăm că orice intersecție numărabilă de mulțimi deschise nu se poate reduce la un singur punct. Dacă $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, atunci pentru orice n există o vecinătate $V_n(x)$ conținută în G_n. Dar în orice vecinătate intervalul $[0, 1]$ apare, în produsul cartezian, de un număr nenumărabil de ori, deci intersecția va conține termeni egali cu $[0, 1]$ și nu se poate reduce la un singur punct. Punctul fiind o mulțime închisă, rezultă că spațiul produs nu e perfect normal, cu toate că $[0, 1]$ e un spațiu perfect normal.

P_5. Orice acoperire deschisă U a unui spațiu perfect normal admite un rafinament σ-discret închis.

Demonstrație. Pentru fiecare element U al familiei U considerăm descompunerea normală (1) și fie relația $<$ care bineordonează mulțimea U. Definim pentru orice $U \in$ U şi n număr natural mulţimea închisă: $U^* = U_n - \bigcup \{G_n^{(V)}; V<U\}$, unde $G_n^{(V)}$ e o mulţime deschisă definită de descompunerea normală (1) a mulţimii V. Pentru orice n avem $U^* \cap V_n^* = 0$; căci fie $V<U$ atunci $U_n^* \cap V_n^* \subset U^* \cap V_n^* = 0$, deci familia $\mathcal{F}_n = \bigcup \{U^*;\ U \in \mathrm{U}\}$ e o familie discretă de mulţimi închise. Atunci $\mathcal{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n'$ e un rafinament σ — discret închis al acoperirii U. În adevăr dacă $x \in X$ fie U primul element din U la care x aparţine atunci există un număr natural n încît $x \in U_n$, şi $x \neq V$ pentru $V<U$, deci $x \notin G_n^{(V)}$ pentru $V<U$, adică $x \in U_n^*$, ceea ce demonstrează că $\mathcal{F}$ e o acoperire.

P_6. Orice acoperire deschisă U a unui spaţiu perfect normal, ce admite o descompunere normală uniformă, are un rafinament σ-discret deschis.

Demonstraţie. Analog cazului precedent considerăm descompunerea normală (1) pentru fiecare $U \in$ U şi relaţia care bineordonează mulţimea U. Pentru orice pereche (U, n) definim mulţimea deschisă $\tilde{U}_n' = G_n^{(U)} - \overline{\bigcup\{V_{n+1}; V<U\}}$ unde $U_n' \subset G_n^{(U)} \subset U_{n+1}$ pentru $n = 1, 2, \ldots$ Familia $\mathcal{G}_n' = \bigcup \{\tilde{U}_n;\ U \in \mathrm{U}\}$ e discretă, căci $\tilde{U}_n \cap \tilde{V}_n \subset \tilde{U}_n \cap V_{n+1} = 0$ dacă $V<U$ şi $\tilde{U}_n \cap \tilde{V}_n' \subset U_{n+1} \cap \tilde{V}_n = 0$, dacă $U<V$.

Deci pentru orice $U \neq V$ avem $\tilde{U}_n \cap \tilde{V}_n = 0$. Atunci $\mathcal{G} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{G}_n$ e σ-discretă şi formează o acoperire a spaţiului X. În adevăr dacă $x \in X$ fie $U \in \mathcal{U}$ încît $x \in U$ şi $x \notin V$ dacă $V<U$, atunci va exista un număr n încît $x \in G_n$ şi o vecinătate $V(x)$, încît $V(x) \cap V_{n+1} = 0$ dacă $V<U$ deci $x \in \tilde{U}_n$. Evident oricare $\tilde{U}_n' \subset U$, de unde rezultă că $\mathcal{G}$ e un rafinament σ-discret deschis pentru acoperirea $\mathcal{U}$.

TEOREMA. *Un spaţiu topologic perfect normal e metrizabil dacă satisface prima axiomă de numărabilitate şi orice acoperire deschisă admite o descompunere normală uniformă.*

Demonstraţie. Considerăm descompunerea normală a fiecărui punct x al spaţiului perfect normal: $x = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n(x)$. Aceasta e posibil în baza faptului că spaţiul e T_1 şi satisface prima axiomă de numărabilitate. Alegem un rafinament $\mathcal{B}_n'$, σ-discret deschis din fiecare acoperire $\mathcal{A}_n = \bigcup \{G_n(x);\ x \in X\}$. Atunci $\mathcal{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}_n$ e o bază σ-discretă a spaţiului perfect normal X. Conform criteriului de metrizabilitate din [1]; un spaţiu topologic e metrizabil dacă şi numai dacă spaţiul e T_1, regular şi topologia sa are o bază σ-discretă; teorema revine la faptul că un spaţiu topologic T_1 perfect normal e regular, ceea ce e evident.

(Intrat în redacţie la 20 aprilie 1969)

BIBLIOGRAFIE

1. J. L. Kelley, *General Topology*. New York, 1965, pp. 110—135.
2. V. Cîmpian,. *Mulţimile închise şi aplicaţiile continue*. „Studia Univ. Babeş Bolyai, seria Mat. Fiz."., fasc. 2. 1965, pp. 30—35.

СОВЕРШЕННО НОРМАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

(Резюме)

В статье вводятся понятия нормального разложения и равномерного нормального разложения, устанавливаются свойства совершенно нормального пространства и даётся теорема метризуемости.

Определение 1. Одно множество U из топологического пространства допускает нормальное разложение, если оно является пределом монотонной последовательности открытых (замкнутых) множеств, так, что между двумя последовательными множествами последовательности существует промежуточное замкнутое (открытое) множество.

Определение 2. Нормальное разложение U элементов одного множества U является равномерным, если каким бы ни было подмножество U_1 множества U и каким бы ни был индекс n, если $x \notin U$, тогда существует окрестность V элемента x, так, что $V \cap U_n = 0$ для любой $U \in \mathrm{U}_1$ и $U_n = \lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

Теорема: совершенно нормальное топологическое пространство является метризуемым, если удовлетворяет первой аксиоме счётности и любое открытое покрытие допускает равномерное нормальное разложение.

ESPACES PARFAITEMENT NORMAUX

(Résumé)

On expose dans cet article les notions de décomposition normale et de décomposition normale uniforme, on établit des propriétés de l'espace parfaitement normal et l'on donne un théorème de métrisabilité.

Définition 1. Un ensemble U d'un espace topologique admet une décomposition normale s'il est la limite d'une suite monotone d'ensembles ouverts (fermés) de sorte qu'entre deux ensembles consécutifs de la suite il existe un ensemble fermé (ouvert) intermédiaire.

Définition 2. La décomposition normale U des éléments d'un ensemble U est uniforme si, quel que soit le sous-ensemble U_1 de U et quel soit l'indice n, si $x \notin \mathrm{U}$ il existe alors un voisinage V de x tel que $\mathrm{V} \cap \mathrm{U}_n = 0$, pour $\mathrm{U}_n \in \mathrm{U}_1$ et $\mathrm{U} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{U}_n$.

Théorème: Un espace topologique parfaitement normal est métrisable s'il satisfait au premier axiome de numérabilité et si toute couverture ouverte admet une décomposition normale uniforme.

SUR LES ESPACES À CONNEXION AFFINE A_4 AVEC TORSION

par

PAVEL ENGHIŞ

1. Un espace X_n à n dimensions dans les variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$ est un espace A_n à connexion affine, d'après E. Cartan [1], si l'on peut réaliser une correspondance affine entre les espaces euclidiens tangents E_P et E_Q attachés aux points infiniment voisins P et Q. Si l'on note par X^i les coordonnées cartésiennes des points de l'espace E_P, par Y^i ceux des points de E_Q et par X_0^i les coordonnées de Q dans E_P, la correspondance entre E_P et E_Q sera donnée [2] par:

$$Y^i = X^i - X_0^i + \Gamma_{jk}^i X^j X_0^k + \ldots \tag{1,1}$$

où les termes non écrits sont du deuxième ordre au moins par rapport aux X_0^i et, Γ_{jk}^i, fonctions de $x^1, x^2, \ldots, x^n$, sont les coefficients de connexion de l'espace A_n.

Si $P(x^i)$ est un point de l'espace A_n et $Q(x^i + dx^i)$ et $R(x^i + \delta x^i)$ des points infiniment voisins à P, alors on obtient les points $S[x^i + dx^i + \delta(x^i + dx^i)]$ et $T[x^i + \delta x^i + d(x^i + \delta x^i)]$, où l'on suppose que les opérateurs du deuxième ordre δd et $d\delta$ sont définis à l'aide du transport parallèle [3] et si $\delta dx^i = \Gamma_{jk}^i\, dx^j\, \delta x^k$, les composants du vecteur TS sont $\Delta x^i = (\Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i)\, dx^j\, \delta x^k$.

On sait [2] que:

$$T_{kj}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i \tag{1,2}$$

constituent les composants d'un tenseur du troisième ordre, nommé tenseur de torsion de l'espace et s'il n'est pas nul, on peut attacher à l'espace A_n, n formes alternées

$$F^i = T_{jk}^i\, dx^j\, \delta x^k \tag{1,3}$$

qui se comportent, par suite d'une transformation des variables, comme les composantes d'un vecteur contrevariant, ces formes définissent la torsion de l'espace.

En faisant dans (1, 2) $i = j$ et en sommant, on obtient un vecteur covariant, nommé le vecteur de torsion, qui, lorsqu'il n'est pas nul, permet d'associer à l'espace A_n une forme de Pfaff, invariante, $\sigma = T_k\, dx^k$.

Si l'on considère le tenseur produit du tenseur de torsion $T_{jk}^i \cdot T_{rp}^s$, parmi les tenseurs contractés, on obtient aussi le tenseur symétrique $T_{kp} = T_{jk}^i T_{ip}^j$ nommé le tenseur quadratique de torsion et il permet d'associer à l'espace A_n la forme quadratique $\pi = T_{kp} dx^k\, dx^p$.

Si l'on introduit dans l'espace A_n un système de congruences indépendantes, dont les moments sont λ^a_i et les paramètres μ^i_a [2] alors les quantités

$$\gamma^a_{bc} = \left(\frac{\partial \lambda^a_p}{\partial x^k} + \Gamma^s_{pk}\lambda^a_s\right)\mu^p_b \mu^k_c \tag{1,4}$$

sont invariantes par rapport aux transformations de variables et sont nommées les composantes des connexions affines sur les congruences considérées. À une transformation de congruences:

$$d\bar{s}^a = c^a_b ds^b \tag{1,5}$$

où c^a_b sont des fonctions de variables $x^1, x^2, \ldots, x^n$ avec un déterminant différent de zéro, ces composantes se transforment d'après la loi:

$$\frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} = \bar{\gamma}^a_{pq} c^p_b c_q - \gamma^p_{bc} c^a_p \tag{1,6}$$

Si aux formules (1,5) on applique l'opérateur du covariant bilinéaire, on obtient [2]:

$$\frac{\partial c^a_b}{\partial s^c} - \frac{\partial c^a_c}{\partial s^b} = \bar{w}^a_{kp} c^k_b c^p_c - w^h_{bc} c^a_h \tag{1,7}$$

qui donnent les relations qui existent entre les coefficients $\bar{w}^a_{bc}$ des covariants bilinéaires des formes $d\bar{s}^a$, les coefficients w^a_{bc} des covariants bilinéaires des formes ds^a, les coefficients c^a_b de la transformation (1,5) et leurs dérivées partielles du premier ordre. Ayant en vue les formules (1,6) en (1,7) on obtient les relations:

$$\bar{t}^a_{pq} c^p_b c^q_c = t^p_{bc} c^a_p \tag{1,8}$$

où $t^a_{bc} = \gamma^a_{bc} - \gamma^a_{cb} - w^a_{bc}$ sont les composants du tenseur de torsion dans le système de congruences considéré.

A l'espace A_n avec torsion, dans le système de congruences, on associe les formes:

$$f^a = t^a_{bc} ds^b \delta s^c; \quad \sigma = t_a ds^a; \quad \pi = t_{ab} ds^a ds^b \tag{1,9}$$

où t_a sont les composants du vecteur de torsion, et t_{ab} du tenseur quadratique de torsion sur le système de congruences.

En réduisant les formes σ et π ou les formes alternées f^a à la forme canonique, à l'espace A_n on peut associer un groupe de transformations de congruences qui laisse invariantes ces formes canoniques et on obtient [2] le théorème:

Un espace A_n, dont les formes σ et π ne sont pas identiquement nulles, admet un groupe de transformations de congruences ayant moins de $n(n-1)$ fonctions arbitraires, sauf le cas où sur le c^a_b n'interviennent pas des relations supplémentaires.

2. En considérant les espaces A_4, les composants de la connexion Γ^i_{jk} sont au nombre de 64, le tenseur de torsion a 24 composants distincts, le vecteur de torsion a quatre composants et le tenseur quadratique de torsion dix composants.

Si l'on considère dans A_4 un système de congruences indépendantes et les formes associées f, σ et π données par (1,9) et si la forme σ n'est pas nulle, en la réduisant à la forme canonique, on peut prendre $\sigma = ds^1$, donc $t_1 = 1$, $t_2 = t_3 = = t_4 = 0$, et le groupe de transformations de congruences qui laisse invariante cette forme canonique est donné par:

$$d\bar{s}^1 = ds^1 ; \; d\bar{s}^h = c^h_k \, ds^k ; \; (h = 2, 3, 4) \tag{2,1}$$

Le groupe (2,1) contient douze fonctions c^h_k. Si dans les relations (1, 6) on tient compte du fait que $c^1_a = \delta^1_a$ on obtient:

$$\bar{\gamma}^1_{pf} c^p_b c^f_c = \gamma^1_{bc} \tag{2, 2}$$

Les relations (2, 2) introduisent un certain nombre de liaisons entre c^h_k sauf le cas où tous les γ^1_{bc} sont nuls excepté γ^1_{11} qui est un invariant du groupe (2, 1).

De (1,7) dans ce cas on déduit: $\bar{w}^1_{pf} c^p_b c^f_c = w^1_{bc}$ qui donnent aussi des liaisons entre c^h_k excepté le cas où w^1_{bc} sont nuls et ds^1 devient une différentielle totale exacte. Dans ce cas la forme f^1 est identiquement nulle et les autres formes f^k, $k = 2, 3, 4$ donnent des relations entre c^h_k, excepté le cas:

$$f^k = \frac{1}{3} (ds^k \, \delta s^1 - ds^1 \, \delta s^k) ; \quad (k = 2, 3, 4) \tag{2,3}$$

Si la forme σ est identiquement nulle sans que la forme π s'annule, un raisonnement analogue nous montre qu'en la réduisant à la forme canonique le groupe de transformations de congruences qui lasisse invariante cette forme canonique contient aussi douze fonctions c^h_k seulement dans le cas où π s'exprime à l'aide de la même différentielle totale ds^1.

En considérant les dérivées de l'invariant γ^1_{11}elles donnent aussi des relations entre les c^h_k, excepté le cas où il dépend seulement de s^1. Par conséquent nous avons le théorème:

Un espace A_4 dont les formes σ et π ne sont pas simultanément nulles admet un groupe de transformations de congruences ayant en général moins de douze fonctions arbitraires, le maximum étant atteint seulement dans le cas où σ et π s'expriment à l'aide de la même différentielle totale ds^1, les relations (2, 3) sont accomplies et γ^1_1 dépend seulement de s^1.

Parmi les espaces A_4 on considère par suite ceux pour lesquels

$$\Gamma^a_{4b} = \Gamma^a_{b4} \tag{2,4}$$

ou dans le système de congruences: $\gamma^a_{4b} - \gamma^a_{b4} = W^a_{4b}$ c'est-à-dire:

$$t^a_{4b} = 0 \tag{2,5}$$

Soit A^*_4 un espace A_4 qui satisfait les relations (2, 4). Pour les espaces A^*_4 le vecteur de torsion a trois composants différents de zéro, et le tenseur quadratique de torsion a six composants différents de zéro.

En considérant dans A^*_4 un système de congruences indépendantes et les formes f, σ et π associées, parmi les formes f, trois seulement sont indépendantes, et si σ et π ne sont pas identiquement nulles, en les réduisant à la forme canonique, le groupe de l'espace est aussi (2, 1) avec douze fonctions c_k^h, le maximum étant atteint dans ce cas seulement si σ et π s'expriment comme ci-dessus à l'aide de la même différentielle totale ds^1, γ_{11}^1 dépend seulement de s^1 pendant que (2, 3) devient $f^k = \frac{1}{2}(ds^k\, \delta s^1 - ds^1\, \delta s^k)$, $k = 2,3$ puisque la forme f^4 devient elle aussi nulle.

Supposons maintenant que pour A_4^*, les formes σ et π sont identiquement nulles, donc le vecteur de torsion et le tenseur quadratique de torsion sont nuls. Dans ce cas les composants du tenseur de torsion, dans le système de congruences, à côté de (2, 5) satisfera aussi les conditions:

$$t_{21}^2 + t_{31}^3 = 0\,;\; t_{12}^1 + t_{32}^3 = 0\,;\; t_{13}^1 + t_{23}^2 = 0$$
$$(t_{21}^2)^2 + (t_{31}^3)^2 + 2(t_{21}^3 \cdot t_{31}^2) = 0 \tag{2,6}$$
$$t_{12}^1 \cdot t_{21}^2 + t_{31}^3 \cdot t_{32}^3 + t_{12}^3\,(t_{23}^2 - t_{13}^1) = 0$$

et celles qui en résultent par permutation circulaire des indices 1, 2, 3.

De (2, 5) et (2,6) il résulte que le rang de la matrice des composants du tenseur de torsion

$$\begin{pmatrix} t_{12}^1 & t_{13}^1 & t_{14}^1 & t_{23}^1 & t_{24}^1 & t_{34}^1 \\ t_{12}^2 & t_{13}^2 & t_{14}^2 & t_{23}^2 & t_{24}^2 & t_{34}^2 \\ t_{12}^3 & t_{13}^3 & t_{14}^3 & t_{23}^3 & t_{24}^3 & t_{34}^3 \\ t_{12}^4 & t_{13}^4 & t_{14}^4 & t_{23}^4 & t_{24}^4 & t_{34}^4 \end{pmatrix} \tag{2,7}$$

est deux, donc parmi les formes f^i deux seulement sont indépendantes. Il existera dans A_4^* un système de congruences dans lequel deux des formes f^i soient nulles, par exemple f^2 et f^3. La forme f^1, si l'on tient compte des premières équations (2, 6), doit être de la forme:

$$f^1 = t_{23}^1\,(ds^2\,\delta s^3 - ds^3\,\delta s^2)\,;\ \text{où}\ t_{23}^1 = 1 \tag{2,8}$$

et la forme f^4 est:

$$f^4 = t_{12}^4(ds^1\,\delta s^2\, ds^2\,\delta s^1) + t_{13}^4(ds^1\,\delta s^3 - ds^3\,\delta s^1) + t_{23}^4(ds^2\,\delta s^3 - ds^3\,\delta s^2) \tag{2,9}$$

En considérant dans ces espaces A_4^* les transformations de congruences qui laissent invariante cette situation, elles sont de la forme:

$$d\bar{s}^1 = ds^1\,;\; d\bar{s}^2 = ds^2\,;\; d\bar{s}^3 = ds^3\,;\; d\bar{s}^4 = c_2^4 ds^2 + c_3^4 ds^3 + ds^4 \tag{2,10}$$

des transformations qui contiennent deux fonctions c_k^h. Dans les formules (1,6) si l'on tient compte de $c_1^1 = c_2^2 = c_3^3 = c_4^4 = 1$ et $c_1^2 = c_1^3 = c_1^4 = c_2^3 = c_3^2 = c_4^1 = c_4^2 = c_4^3 = c_2^1 = c_3^1 = 0$, on obtient:

$$\bar{\gamma}_{kq}^h c_c^q = \gamma_{kc}^p c_p^h\,;\quad \bar{\gamma}_{pq}^h c_b^p c_c^q = \gamma_{bc}^h \quad (h = 1,\ 2,\ 3,\ 4\,;\ k = 1,\ 4\,;\ b = 2,\ 3) \tag{2,11}$$

Les relations (2,11) introduisent des conditions supplémentaires sur les coefficients c_k^h du groupe (2,10) sauf le cas; $\bar{\gamma}_{pq}^h = \gamma_{pq}^h = 0$; $(h,\ p,\ q = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$ donc l'espace est euclidien. Ainsi on peut énoncer le théorème:

Un espace A_n^* avec le vecteur de torsion et le tenseur quadratique de torsion nuls, dans un système de congruences, peut avoir comme seuls composants de la torsion non-nuls, les suivants : $t_{23}^1 = 1$; t_{12}^4 ; t_{13}^4 ; t_{23}^4, et le groupe de transformations de congruences est un sous-groupe du groupe (2,10).

Si dans l'espace A_4^*, avec (2, 6) vérifiées, dans le système de congruences dans lequel (2,8) et (2,9) ont lieu, nous avons encore, par exemple :

$$t_{13}^4 = 0 \tag{2,12}$$

le groupe de transformations de congruences de l'espace est :

$$d\bar{s}^1 = c_1^1 ds^1 + c_2^1 ds^2 ; \quad d\bar{s}^2 = ds^2 \tag{2,13}$$
$$d\bar{s}^3 = c_2^3 ds^2 + c_3^3 ds^3 ; \quad d\bar{s}^4 = c_2^4 ds^2 + c_3^4 ds^3 + c_4^4 ds^4$$

avec $c_1^1 = c_3^3 = c_4^4$, groupe qui contient 5 fonctions c_k^h. Si dans (1, 6) on tient compte de $c_1^2 = c_1^3 = c_3^2 = c_3^1 = c_4^1 = c_4^2 = c_4^3 = 0$ et $c_2^2 = 1$ on obtient :

$$\bar{\gamma}_{1q}^h c_1^1 c_c^q = \gamma_{1c}^p c_p^h ; \quad (p, \ h = 2, \ 3, \ 4) ; \quad \bar{\gamma}_{4q}^j c_4^4 c_c^q = \gamma_{4c}^p c_p^j ; \quad (p, \ j = 1, \ 2, \ 3) \tag{2,14}$$
$$\bar{\gamma}_{jq}^h c_2^j c_c^q = \gamma_{2c}^p c_p^h ; \quad (p, \ h = 2, \ 3 ; \ j = 1, \ 2, \ 4) ; \quad \bar{\gamma}_{jq}^2 c_3^j c_c^q = \gamma_{3c}^2 ; \quad (1, \ 3, \ 4)$$

Les relations (2,14) introduisent des relations supplémentaires entre les coefficients c_k^h du groupe (2,13) en exceptant le cas :

$$\bar{\gamma}_{1q}^h = \gamma_{1c}^p = 0, \ (h, \ p = 2, \ 3, \ 4) ; \quad \bar{\gamma}_{4q}^j = \gamma_{4c}^p = 0, \ (j, \ p = 1, \ 2, \ 3)$$
$$\bar{\gamma}_{2q}^h = \gamma_{2c}^p = 0, \ (h, \ p = 2, \ 3) ; \quad \bar{\gamma}_{3q}^2 = \gamma_{3q}^2 = 0 \tag{2,15}$$

En calculant le tenseur dérivé du tenseur de torsion :

$$t_{kp,\,r}^h = \frac{\partial t_{kp}^h}{\partial s^r} - t_{kp}^s \gamma_{sr}^h + t_{sp}^h \gamma_{kr}^s + t_{ks}^h \gamma_{pr}^s \tag{2,16}$$

dans l'hypothèse que (2,15) sont accomplies, on obtient les composants non nuls :

$$t_{23,\,r}^1 = -\gamma_{1r}^1 + \gamma_{3r}^3 ; \quad t_{12,\,r}^4 = \frac{\partial t_{12}^4}{\partial s^r} - t_{12}^4 (\gamma_{4r}^4 - \gamma_{1r}^1) ; \quad t_{23,\,r}^4 = \frac{\partial t_{23}^4}{\partial s^r} -$$
$$- t_{23}^4 (\gamma_{4r}^4 - \gamma_{3r}^3) + t_{12}^4 \gamma_{3r}^1$$

qui par (2,13) se transforment d'après :

$$\bar{t}_{pq,\,s}^h c_2^p c_3^q c_r^s = t_{23,\,r}^j c_j^h ; \quad (h, \ j = 1, \ 4)$$
$$\bar{t}_{1q,\,s}^4 c_2^q c_r^s = t_{12,\,r}^4 \tag{2,17}$$

relations qui donnent aussi des conditions entre c_k^h, excepté le cas :

$$t_{23,\,r}^1 = t_{12,\,r}^4 = t_{23,\,r}^4 = 0 \tag{2,18}$$

Ainsi pour ce cas nous avons le théorème :

Un espace A_4^* avec le vecteur de torsion et le tenseur quadratique de torsion nuls, dans le système de congruences dans lequel (2,8) et (2,12) ont lieu, admet un groupe de transformations de congruences qui invarie cette situation, donné par (2,13), groupe qui contient tout au plus cinq fonctions arbitraires, le maximum étant atteint seulement quand (2,15) et (2,18) ont lieu.

Si dans l'espace A_4^*, avec (2,6) vérifiées dans le système de congruences dans lequel (2,8) et (2,9) ont lieu, nous avons encore:

$$t_{12}^4 = t_{13}^4 = 0 \tag{2,19}$$

alors le rang de la matrice (2,7) est un, la forme f^4 est proportionelle à f^1, et nous pouvons considérer $t_{23}^4 = 1$. Ces espaces A_4^* admettent un groupe de transformations de congruences qui laisse invariantes ces formes, groupe donné par:

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= c_1^1 ds^1 + c_2^1 ds^2 + c_3^1 ds^3 + c_4^1 ds^4 ; \quad d\bar{s}^2 = c_2^2 ds^2 + c_3^2 ds^3 \\ d\bar{s}^3 &= c_2^3 ds^2 + c_3^3 ds^3 ; \quad d\bar{s}^4 = c_1^4 ds^1 + c_2^4 ds^2 + c_3^4 ds^3 + c_4^4 ds^4 \end{aligned} \tag{2,20}$$

où $c_1^1 + c_4^1 = c_4^4 + c_1^4 = c_2^2 c_3^3 - c_3^2 c_2^3$. Ce groupe contient dix fonctions c_k^h. Si l'on tient compte, dans (1,6), du fait que $c_1^2 = c_1^3 = c_4^2 = c_4^3 = 0$ on obtient: $\bar{\gamma}_{1q}^h c_1^1 c_c^q = \gamma_{1c}^p c_p^h$, $(h, p = 2, 3)$; $\bar{\gamma}_{4q}^p c_4^4 c^q = \gamma_{4c}^r c_r^p$, $(p, r = 2, 3)$ relations qui introduisent des liaisons entre les coefficients c_k^h du groupe (2,20) excepté le cas:

$$\bar{\gamma}_{1q}^h = \gamma_{1c}^p = \bar{\gamma}_{4q}^h = \gamma_{4c}^p = 0 ; \quad (h, p = 2, 3) \tag{2,21}$$

En calculant le tenseur dérivé (2,16) du tenseur de torsion, on obtient les composants différents de zéro: $t_{23,r}^j = -\gamma_{1r}^j - \gamma_{4r}^j + \gamma_{2r}^2 + \gamma_{3r}^3$, $t_{k3,r}^j = \gamma_{kr}^2$, $t_{2k,r}^j = \gamma_{kr}^3$, $t_{23,r}^h = \gamma_{1r}^h - \gamma_{4r}^h$; $(j, k = 1, 4 ; h = 2, 3)$ qui dans le cas (2,21), se transforment par (2,20) d'après: $\bar{t}_{23,s}^j c_r^s = t_{23;r}^j$ $(j = 1, 4)$ donc elles donnent aussi des relations entre c_k^h, sauf le cas:

$$\gamma_{2r}^2 + \gamma_{3r}^3 - \gamma_{1r}^j - \gamma_{4r}^j = 0 \tag{2,22}$$

Les relations (2,21) et (2,22) ont comme conséquence l'annulation des composants du tenseur dérivé du tenseur de torsion. Ainsi nous avons le théorème:

Un espace A_4^* avec le vecteur de torsion et le tenseur quadratique de torsion nuls et pour lequel (2,8) et (2,19) ont lieu, admet un groupe de transformations de congruences donné par (2,20), groupe qui contient dix fonctions arbitraires c_k^h dans le cas (2,21) ; (2,22) ou un sous-groupe de celui-ci dans le cas général.

Si dans l'espace A_4^* avec (2,6) vérifiées, nous considérons le système de congruences dans lequel la forme f^1 est donnée par (2,8) les formes $f^2 = f^3 = 0$ et f^4 se réduisent à la forme canonique:

$$f^4 = t_{12}^4 (ds^1 \delta s^2 - ds^2 \delta s^1) \quad \text{où } t_{12}^4 = 1 \tag{2,23}$$

nous pouvons associer à l'espace un groupe de transformations de congruences qui laisse invariantes ces formes canoniques, donné par

$$\begin{aligned} d\bar{s}^1 &= c_1^1 ds^1 + c_2^1 ds^2 + c_3^1 ds^3 ; \quad d\bar{s}^2 = c_2^2 ds^2 \\ d\bar{s}^3 &= c_2^3 ds^2 + c_3^3 ds^3 ; \quad d\bar{s}^4 = c_1^4 ds^1 + c_2^4 ds^2 + c_3^4 ds^3 + c_4^4 ds^4 \end{aligned} \tag{2,24}$$

avec $c_1^4 = - c_2^2 c_3^1$, $c_4^4 = c_1^1 c_2^2$, $c_1^1 = c_2^2 c_3^3$ groupe qui contient sept fonctions c_k^h et si l'on tient compte de (1,6) et de (2,17) on déduit que ce maximum est atteint seulement dans les cas (2,15) et (2,18). Dans les autres cas le groupe de l'espace est un sous-groupe du groupe (2,24).

(Manuscrit reçu le 29 janvier 1969)

BIBLIOGRAPHIE

1. E. Cartan, *Sur les variétés à connexion affine.* „Ann. de l'Ec. N. sup"., **40**, 1923, p. 325—412.
2. G. Vrînceanu, *Lecţii de geometrie diferenţială,* I, Edit. Acad. R. P. R., 1952.
3. T. Levi-Civita, *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione Geometrica della curvature Riemanniana.* „Rend. Circ. Matem. di Palermo", **42**, 1917, p. 173—204.
4. H. Weyl, *Reine Infinitesimalgeometrie.* „Mathematische Ztschr." **2**, 1918, p. 388—411.

ASUPRA SPAŢIILOR CU CONEXIUNE AFINĂ A_4 CU TORSIUNE

(Rezumat)

În lucrare se dă întîi, pentru spaţiile cu conexiunea afină A_4 cu torsiune, rezultatul din cazul spaţiilor A_n.

Se notează apoi cu A_4^* spaţiile A_4 a căror conexiune satisface (2,4). Pentru spaţiile A_4^* se arată că în general grupul de transformări de congruenţă este (2,1) cu cel mult 12 funcţii c_k^h. Se dau şi condiţiile cînd maximul este atins. Se consideră apoi spaţiile A_4^* cu vector de torsiune şi tensor pătratic de torsiune nuli. Se arată că aceste spaţii pot admite ca grup de transformări de congruenţe pe (2,10) sau (2,13) sau (2,20) sau (2,24) cu respectiv cel mult două, cinci, zece, şapte funcţii c_k^h. Se dau în fiecare caz condiţiile ca maximul să fie atins.

О ПРОСТРАНСТВАХ С АФФИННОЙ СВЯЗЬЮ A_4 С КРУЧЕНИЕМ

(Резюме)

В работе даётся сначала для пространств с аффинной связью A_4 с кручением результат, полученный в случае пространств A_n.

Обозначается затем через A^* пространства A_4, связь которых удовлетворяет (2,4). Для пространств A_4^* показывается, что, вообще, группа преобразований конгруентностей есть (2,1) имеющая самое большее 12 функций c_k^h. Даются и условия, когда максимум достигнут. Рассматриваются затем пространства A_4^* с нулевым вектором кручения и с нулевым квадратичным тензором кручения. Показывается, что эти пространства могут допускать как группу преобразований конгруентностей на (2,10) или (2,13) или (2,20) или (2,24), имеющую, соответственно, самое большее две, пять, десять, семь функций c_k^h. В каждом случае даются условия, для того, чтобы максимум был достигнут.

L'INTÉGRALE M_*

par

M. RĂDULESCU

Comme suite à l'article [2] on donnera dans le présent article les propriétés de l'intégrale M_* d'une fonction intégrable M_* sur une base de l'intervalle $[a,b]$. On utilisera les notions et les notations de l'article mentionné, ainsi que des résultats obtenus dans [2].

1. Soit B une base de l'intervalle $[a,b]$, A un ensemble fermé tel que $A \subset \subset B$ et $D(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ une division de la base B. On désigne par $\tilde{d} = \tilde{d}(A,D)$: $<\tilde{x}_j, \tilde{y}_i>$, $\tilde{x}_j = x_{i_j}$, $\tilde{y}_j = x_{i_j+1}$, $j = \overline{1, h}$ la sous-division contenue dans D qui vérifie les propriétés suivantes:

1° Au moins un point de chaque couple $<x_{i_j}, x_{i_j+1}>$, $j = \overline{1, h}$ n'appartient pas à l'ensemble A.

2° Aucun couple $<x_{i_j}, x_{i_j+1}>$, $j = \overline{1, h}$ n'appartient au même intervalle contigu de l'ensemble A, y compris les extrémités de l'intervalle.

On apelle sous-division $\tilde{d} = \tilde{d}(A,D)$ formée avec tous les couples de points $<x_{i_j}, x_{i_j+1}>$ qui appartiennent à la division D et qui vérifient les propriétés 1° et 2°, la sous-division contenue dans D *qui couvre des points de première espèce de l'ensemble* A. Soit $<\tilde{x}_j, \tilde{y}_i> \in \tilde{d}$ un couple de la sous-division $\tilde{d}$. Nous désignerons par $[a_j, b_j]$ les intervalles contigus de l'ensemble A. Peuvent avoir lieu les trois cas suivants: 1. $\tilde{x}_j \in A$ et $a_j < \tilde{y}_j < b_j$. 2. $\tilde{y}_j \in A$ et $a_j < \tilde{x}_j < b_j$. 3. Il existe des intervalles $[a_j', b_j']$, $[a_j'', b_j'']$ de sorte que $a_j' < \tilde{x}_j < b_j'$, $a_j'' < \tilde{y}_j < b_j''$. Dans le premier cas le point a_j, dans le deuxième cas le point b_j et dans le troisième cas les points b_j', a_j'' seront appelés *points de première espèce de l'ensemble A, couverts par le couple* $<\tilde{x}_j, \tilde{y}_j>$.

Soit $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$ une suite des divisions de la base B et A un ensemble fermé. On considère la suite des sous-divisions $\tilde{d}_n = \tilde{d}(A, D_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ et soient $\Delta_n = \Delta(\tilde{d}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ les normes absolues des ces sous-divisions. On désigne par $\lambda(A, \mathfrak{D})$ la limite supérieure des nombres Δ_n: $\lambda(A, \mathfrak{D}) = \sup_n \Delta_n$.

THÉORÈME 1.1 *Soit B une base de l'intervalle $[a, b]$, $\mathfrak{B}(B_1, B_2, \ldots, B_p, \ldots)$ une suite croissante d'ensembles parfaits tels que $B_p \subset B_{p+1}$, $p = 1, 2, \ldots$, $B = \lim_p B_p$ et $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$ une suite admise*[1] *de divisions de la base B. Soit pour*

[1] Une suite de divisions est admise si δ (D_n) étant la norme de la division D_n, on a $\lim_n \delta(D_n) = 0$.

chaque indice p, $\mu_p = b - a - m(B_p)$. Dans ces conditions, pour chaque ensemble B_p il existe un parfait $\widetilde{B}_p$ de sorte que $B_p \subset \widetilde{B}_p$ et $\lambda(\widetilde{B}_p, \mathfrak{D}) < 2\mu_p$.

Démonstration. Soient $[a_i^p, b_i^p]$, $i = 1, 2, \ldots$ les intervalles contigus de l'ensemble B_p. À l'indice i correspond n_i tel que pour chaque $n > n_i$ on a

$$\delta(D_n) < \frac{\mu_p}{2^{i+1}}. \tag{1.1}$$

On désigne par A_i l'ensemble des points des divisions D_n, $n \leqslant n_i$ qui appartiennent à l'intervalle (a_i^p, b_i^p). Cet ensemble est fini. Soit p_i un indice tel que $A_i \subset B_{p_i}$; par $\widetilde{B}_{p_i}$ on désigne l'ensemble

$$\widetilde{B}_{p_i} = B_{p_i} \cap [a_i^p, b_i^p]. \tag{1.2}$$

L'ensemble B_{p_i} est fermé. Les seuls points isolés de cet ensemble peuvent être éventuellement les extrémités a_i^p et b_i^p des intervalles $[a_i^p, b_i^p]$.

Soit $\widetilde{B}_p^*$ l'ensemble

$$\widetilde{B}_p^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} \widetilde{B}_{p_i},$$

alors $\widetilde{B}_p$ est la réunion des ensembles B_p et $\widetilde{B}_p^*$; $\widetilde{B}_p = B_p \cup \widetilde{B}_p^*$. Evidemment, $B_p \subset \widetilde{B}_p$. On peut voir facilement que l'ensemble $\widetilde{B}_p$ n'a pas de points isolés. Soit $x_q \in \widetilde{B}_p$, $q = 1, 2, \cdots$ une suite convergente de points de l'ensemble $\widetilde{B}_p$ et $x = \lim\limits_q x_q$. Si une infinité des points de la suite appartiennent au même ensemble B_p ou $\widetilde{B}_{p_i}$ alors x appartient aussi à l'ensemble B_p ou $\widetilde{B}_{p_i}$. Au cas contraire les points x_q appartiennent à une infinité d'intervalles contigus $[a_{i_q}^p, b_{i_q}^p]$ et par conséquent $\lim\limits_q a_{i_q}^p = \lim\limits_q b_{i_q}^p = x$. Il résulte que $x \in \widetilde{B}_p$. Dans tous cas $x \in \widetilde{B}_p$, c'est à dire que l'ensemble $\widetilde{B}_p$ est parfait.

On remarque que les points de première espèce de l'ensemble $\widetilde{B}_p$ appartiennent aux intervalles $[a_i^p, b_i^p]$, $i = 1, 2, \ldots$. De cette observation et de (1.1) il résulte que pour chaque division $D_n \in \mathfrak{D}$, la norme absolue de la sous-division $\tilde{d}(\widetilde{B}_p, D_n)$ vérifie la relation

$$\Delta[\tilde{d}(\widetilde{B}_p, D_n)] < \sum_{i=1}^{\infty} (b_i^p - a_i^p) + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\mu_p}{2^{i+1}} + \frac{\mu_p}{2^{i+1}}\right) = \mu_p + \mu_p = 2\mu_p.$$

Autrement dit $\lambda(\widetilde{B}_p, \mathfrak{D}) < 2\,\mu_p$.

2. Dans ce qui suit on considère des fonctions réelles f définies sur une base B de l'intervalle $[a, b]$: $f \colon B \to R$. On a désigné par R l'axe réel. Pour simplifier, lorsqu'il n'y a pas de confusion à craindre, on n'écrira que la base B.

Soit f une fonction définie sur la base B et $D(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ une division de cette base. On appelle *somme intégrale* $\sigma(f, D)$ la somme suivante

$$\tilde{\sigma}(f, D) = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} (x_{i+1} - x_i).$$

Pour une sous-division $d: < x_i, y_i >$, $i = \overline{1, k}$ on désignera par $\sigma(f, d)$ la somme

$$\sigma(f, d) = \sum_{i=1}^{k} \frac{f(x_i) + f(y_i)}{2} (x_i - y_i).$$

Soit f une fonction définie sur la base B; on dira que f est *intégrable* M_* sur B s'il existe un nombre fini I_B tel que, pour chaque suite de divisions admise de la base B $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$, la limite

$$\lim_n \sigma(f, D_n) = I_B$$

existe, et si cette limite ne dépend pas de la suite considérée.

On appelle le nombre I_B intégrale M_* de la fonction f et on écrit

$$I_B = (M_*) \int_B f(x) dx.$$

Si $B = [a, b]$, on écrit

$$I_B = (M_*) \int_a^b f(x) dx.$$

Dans ce qui suit, sauf les théorèmes 4.1, 4.2, et 4.3 de l'article mentionné [2]. en donnera plusieurs propriétés qui résulteront immédiatement de la définition.

THÉORÈME 2.1. *Soient f une fonction définie et intégrable M_* sur la base B et c un nombre donné. Dans ce cas la fonction cf est intégrable M_* sur B et a lieu la relation*

$$(M_*) \int_B cf(x) dx = c(M_*) \int_B f(x) dx.$$

Démonstration. On remarque que pour chaque division D de la base B on a $\sigma(cf, D) = c\sigma(f, D)$, d'où il résulte le théorème:

THÉORÈME 2.2 *Soient f et g deux fonctions définies et intégrables M_* sur les bases B_1 et B_2 de l'intervalle $[a, b]$; alors les fonctions $f \pm g$ sont intégrables M_* sur la base $B = B_1 \cap B_2$ et*

$$(M_*) \int_B [f(x) \pm g(x)] dx = (M_*) \int_{B_1} f(x) dx \pm (M_*) \int_{B_2} g(x) dx. \tag{2.1}$$

Démonstration. On observe que pour chaque division D de la base B nous avons

$$\sigma(f \pm g, D) = \sigma(f, D) \pm \sigma(g, D) \tag{2.2}$$

Pour chaque suite admise de divisions $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$ de la base B, de (2.2), en passant à la limite, on déduit la relation (2.1).

THÉORÈME 2.3 *Soit f une fonction définie et intégrable M_* sur la base B, de sorte que f est non-négative sur un ensemble $A \subset B$, dense sur B; alors*

$$(M_*) \int_B f(x) dx \geqslant 0. \tag{2.3}$$

Démonstration. Dans ce cas il existe une suite admise de divisions de la base B $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$ telle que les points de division D_n appartiennent à l'ensemble A pour $n = 1, 2, \ldots$. Il résulte que $\sigma(f, D_n) \geqslant 0$, $n = 1, 2, \ldots$ et la relation (2.3) en résulte en passant à la limite.

Une conséquence du théorème est que si f est une fonction définie et intégrable M_* sur la base B et si A_1, A_2 sont deux ensembles denses sur B tels que $f(x) \geqslant 0$, $x \in A_1$ et $f(x) \leqslant 0$, $x \in A_2$ alors

$$(M_*) \int f(x) dx = 0.$$

THÉORÈME 2.4 *Soit f et g deux fonctions définies et intégrables M_* sur les bases B_1 et B_2 de l'intervalle $[a, b]$ telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour chaque x appartenant à un ensemble A dense sur $B = B_1 \cap B_2$ alors*

$$(M_*) \int_{B_1} f(x) dx \leqslant (M_*) \int_{B_2} f(x) \, dx.$$

Démonstration. On remarque que la fonction $h = g - f$ est intégrable M_* sur B, puis on applique les théorème 2.2 et 2.3.

Soit f une fonction définie sur la base B, on désignera par $|f|$ la fonction qui prend les valeurs $|f(x)|$.

THÉORÈME 2.5 *Soit f une fonction définie et intégrable M_* sur la base B_1 de l'intervalle $[a, b]$ telle que $|f|$ soit intégrable M_* sur la base B_2, alors*

$$|(M_*) \int_{B_1} f(x) dx| \leqslant (M_*) \int_{B_2} |f(x)| \, dx.$$

Démonstration. On remarque que pour chaque division D de la base $B = B_1 \cap B^2$ on a $|\sigma(f, D)| \leqslant \sigma(|f|, D)$.

Soient f une fonction définie sur la base B, $x \in B$ un point donné de B et $D(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ une division de B de sorte que $x \neq x_i$, $i = \overline{1, k}$. Soient $x - h_1$, $x + h_2 \in D$ des points consécutifs de la division D de sorte que $x - h_1 < x < < x + h_2$. On considère la sous-division d: $< x - h_1, x >$; $< x, x + h_2 >$ et on construit la division $D' = D \cup d$. En ce cas nous avons

$$\sigma(f, D') - \sigma(f, D) = \frac{f(x - h_1) + f(x)}{2} h_1 + \frac{f(x) + f(x + h_2)}{2} h_2 - \tag{2.4}$$

$$- \frac{f(x - h_1) + f(x + h_2)}{2} (h_1 + h_2) = \frac{1}{2} [(h_1 + h_2) f(x) - h_1(f + h_2) - h_2 f(x - h_1)].$$

THÉORÈME 2.6. *Soit f une fonction definie et intégrable M_* sur les bases B_1 et B_2, des intervalles $[a, b]$ et $[b, c)$ tels que pour $x = b$, $h_1, h_2 > 0$, $x - h_1 \in B_1$,*

$x + h_2 \in B_2$ ait lieu la limite

$$\lim_{h_1+h_2\to 0} [(h_1 + h_2)f(x) - h_1 f(x + h_2) - h_2 f(x - h_1)] = 0, \tag{2.5}$$

alors f est intégrable M_* sur la base $B = B_1 \cup B_2$ et nous avons

$$(M_*)\int_B f(x)dx = (M_*)\int_{B_1} f(x)dx + (M_*)\int_{B_2} f(x)dx.$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{D}'(D'_1, D'_2, \ldots, D'_n, \ldots)$ une suite admise de divisions de la base B de sorte que $b \in D'_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Il résulte que

$$\lim_n \sigma(f, D'_n) = (M_*)\int_{B_1} f(x)ds + (M_*)\int_{B_2} f(x)dx. \tag{2.6}$$

Soit $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$ une suite admise de divisions de la base B telle que $b \notin D_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Soit $h_{1n}, h_{2n} > 0$ de sorte que $< b - h_{1n}, b + h_{2n} > \in D_n$, $n = 1, 2, \ldots$; on considère la sous-division $d_n : < b - h_{1n}, b >; < b, b + h_{2n} >$. Nous définissons la suite de divisions $\mathfrak{D}'(D'_1, D'_2, \ldots, D'_n, \ldots)$ où $D'_n = D_n \cup d_n$, $n = 1, 2, \ldots$, En vertu des relations (2.4) et (2.5) on déduit

$$\lim_n [\sigma(f, D'_n) - \sigma(f, D_n)] = 0$$

donc de (2.6) il résulte que

$$\lim_n \sigma(f, D_n) = (M_*)\int_{B_1} f(x)dx + (M_*)\int_{B_2} f(x)dx.$$

3. Dans ce paragraphe on donnera une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction mesurable définie sur une base B soit intégrable M_* sur B.

Soit $d : < x_i, y_i >$, $i = \overline{1, k}$ une sous-division de la base B; si le nombre k des couples de la sous-division d n'est pas fini, on dit que la sous-division d est infinie. Dans ce qui suit on considère seulement des sous-divisions infinies qui ont des composantes finies. Dans ce cas les opérations entre les sous-divisions ainsi que leurs propriétés obtenues dans [2] restent vraies pour les sous-divisions infinies.

Soit f une fonction définie sur la base B; on dit que f *vérifie la propriété S_** sur B si pour chaque nombre $\varepsilon > 0$, correspond un nombre positif $\mu > 0$ de sorte que

$$|\sigma(f, d) - \sigma(f, d_r)| < \varepsilon \tag{3.1}$$

pour chaque sous-disivion f finie ou infinie de la base B pour qui $\Delta(d) < \mu$.

En conformité avec le théorème 2.2 de l'article [2], étant données deux sous-divisions d_1 et d_2 de sorte que $d_1 \leqslant d_2$ il résulte que $(d_1)_r = (d_2)_r$. Par conséquent on a de même la définition suivante équivalente à la précédente : Soit f une fonction définie sur la base B; alors f vérifie la propriété S_* sur B si à chaque nombre $\varepsilon > 0$ il correspond un nombre $\mu > 0$ de sorte que

$$|\sigma(f, d_1) - \sigma(f, d_2)| < \varepsilon \tag{3.2}$$

pour chaques sous-divisions finies ou infinies d_1 et d_2 telles que $d_1 \leqslant d_2$ et $\Delta(d_1) = \Delta(d_2) < \mu$

THÉORÈME 3.1. *Soit f une fonction définie sur B, de sorte que pour chaque nombre $\varepsilon > 0$ il existe un nombre $\mu > 0$ tel que (3.1) soit vérifiée pour chaque sous-division d finie pour qui $\Delta(d) < \mu$; alors f vérifie la propriété S_* sur B.*

Démonstration. Si d est une sous-division infinie alors d est la réunion des composantes $\bar{d}_j$, $j = 1, 2, \ldots$. Parce que $\bar{d}_j$, $j = 1, 2, \ldots$ sont finies les sous-divisions $d^n = \bigcup_{j=1}^{\infty} \bar{d}_j$ sont aussi finies. Si $\Delta(d) < \mu$ il suit que $\Delta(d^n) < \mu$, $n = 1, 2, \ldots$ et par conséquent

$$|\sigma(f, d^n) - \sigma[f, (d^n)_r]| < \varepsilon, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Il résulte que

$$|\sigma(f, d) - \sigma(f, d_r)| \leqslant \limsup_n |\sigma(f, d^n) - \sigma[f, (d^n)_r]| \leqslant \varepsilon.$$

Soit f une fonction définie sur la base B; on dit que *f vérifie la propriété S'_** sur B si pour chaque suite de sous-divisions $\mathbf{d}(d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$ de la base B qui vérifie la relation

$$\lim_n \Delta(d_n) = 0 \tag{3.3}$$

on a

$$\lim [\sigma(f, d_n) - \sigma[f, (d_n)_r]] = 0. \tag{3.4}$$

THÉORÈME 3.2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f définie sur une base B vérifie la propriété S_* sur B est que f possède la propriété S'_* sur B.*

Démonstration. Soit $\mathbf{d}(d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$ une suite de sous-divisions de la base B telle que (3.3) soit satisfaite. On supposera que f possède la propriété S_* sur B. À chaque nombre $\varepsilon > 0$ correspond $\eta > 0$ de sorte que (3.1) est satisfaite si $\Delta(d) < \eta$. Au nombre $\eta > 0$ correspond N ainsi que pour chaque $n > N$, $\Delta(d_n) < < \eta$. Il résulte que pour $n > N$, $|\sigma(f, d_n) - \sigma[f, (d_n)_r]| < \varepsilon$ et donc la relation (3.4) est prouvée.

Réciproquement, on suppose que f vérifie la propriété S'_* sur B et qu'elle ne vérifie pas la propriété S_* sur B. Alors il existe $\varepsilon > 0$ à quoi il correspond des suites de nombres positifs $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$ et des sous-divisions de la base B, $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$ telles qui $\lim_n \mu_n = 0$, $\Delta(d_n) < \mu_n$, $n = 1, 2, \ldots$ et $|\sigma(f, d_n) - - \sigma[f, (d_n)_r]| < \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$. Cette dernière inégalité contredit cependant la relation (3. 4) et donc l'hypothèse donnée est fausse.

THÉORÈME 3.3. *Soit f une fonction définie et intégrable M_* sur la base B; alors f vérifie la propriété S_* sur B.*

Démonstration. Soit $\mathbf{d}(d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$ une suite de sous-divisions finies de la base B qui satisfaite la relation (3. 3). Il existe une suite admise de divisions $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$ de la base D de sorte que $(d_n)_r \subset D_n$, $n = 1, 2, \ldots$. On considère la suite admise de divisions $\mathfrak{D}'(D'_1, D'_2, \ldots, D'_n, \ldots)$ de sorte que $D'_n = = D_n \cup d_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Parce que f est une fonction intégrable M_* sur B il résulte que $\lim_n \sigma(f, D_n) = \lim_n \sigma(f, D'_n)$, d'où l'on dédéduit que

$$\lim_n [\sigma(f, D'_n) - \sigma(f, D_n)] = \lim_n [\sigma(f, d_n) - \sigma[f, (d_n)_r]] = 0.$$

La deuxième partie de la démonstration du théorème 3.2 nous montre que f vérifie la relation (3.1) pour chaque sous-division finie de la base B. Du théorème 3.1 il résulte que f vérifie la propriété S_* sur B.

Le théorème précédent donne une condition nécessaire afin qu'une fonction f définie sur la base B soit intégrable M_* sur B. Dans le théorème suivant on montrera que cette condition est sufisante pour les fonctions f mesurables. On donnera auparavant plusieures lemmes.

LEMME 1 *Soit f une fonction linéaire sur l'intervalle $[a, b]$. Dans ce cas pour chaque division D de l'intervalle $[a, b]$ on a*

$$\sigma(f, D) = \frac{f(a) + f(b)}{2}(b - a).$$

Démonstration. En effet, si on écrit

$$f(x) = \frac{bf(a) - af(b)}{b - a} + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x$$

l'égalité précédente résulte immédiatemment par le calcul.

LEMME 2 *Soit f une fonction intégrable Riemann sur l'intervalle $[a, b]$, alors f est intégrable M_* sur $[a, b]$ et on a*

$$(M_*)\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Démonstration. Soit $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$ une suite admise de divisions de l'intervalle $[a, b]$; alors

$$\sigma(f, D_n) = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k_n-1} f(x_i^n)(x_{i+1}^n - x_i^n) + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k_n-1} f(x_{i+1}^n)(x_{i+1}^n - x_i^n)$$

où $x_i^n \in D_n$, $i = \overline{1, k_n}$. Les sommes de la deuxième partie de l'égalité précédente sont des sommes intégrales Riemann et donc

$$\lim_n \sigma(f, D_n) = \int_a^b f(x)dx.$$

LEMME 3 *Soit f une fonction définie et continue sur un ensemble parfait $A \subset [a, b]$, alors la fonction*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ f(a_i) + \dfrac{f(b_i) - f(a_i)}{b_i - a_i}(x - a_i) & x \in (a_i, b_i) \end{cases}$$

ou (a_i, b_i), $i = 1, 2, \ldots$ sont les intervalles contigus de l'ensemble A, est définie et continue sur $[a, b]$.

Démonstration. Soit x_0 un point de l'intervalle $[a, b]$. Si $x_0 \notin A$ alors dans un voisinage de x_0 f^* est linéaire et donc f^* est continue en x_0. Soit $x_0 \in A$ et x_k, $k = 1, 2, \ldots$ une suite de points tels que $\lim_k x_k = x_0$. Si $x_k \in A$, $k = 1, 2, \ldots$ par hypothèse $\lim_k f^*(x_k) = f^*(x_0)$. Mais si $x_k \in (a_{i_k}, b_{i_k})$, $k = 1, 2, \ldots$ on a

$\lim_k a_{i_k} = \lim_k b_{i_k} = x_0$, donc $\lim_k f^*(a_{i_k}) = \lim_k f^*(b_{i_k}) = f^*(x_0)$. Mais $f^*(a_{i_k}) \leqslant f^*(x_k) \leqslant \leqslant f^*(b_{i_k})$ où $f^*(a_{i_k}) \geqslant f^*(x_k) \geqslant f^*(b_{i_k})$, $k = 1, 2, \ldots$ d'où il résulte que $\lim_k f^*(x_k) = = f^*(x_0)$.

THÉORÈME 3.4 *Soit f une fonction définie et mesurable sur la base B_0, telle que f possède la propriété S_* sur B_0, alors il existe une base $B \subset B_0$ de sorte que f est intégrable M_* sur B.*

Démonstration. Soit $\nu > 0$ un nombre arbitraire; alors en vertu du théorème de Lusin il y a un ensemble parfait $B_\nu \subset B_0$ tel que

$$m(B_\nu) > b - a - \nu \tag{3.5}$$

et la restriction de f à la B_ν est une fonction continue sur B_ν. On considère une suite décroissante de nombres positifs ν_p, $p = 1, 2, \ldots$ telle que $\lim_p \nu_p = 0$, alors il existe une suite croissante d'ensembles parfaits $B_p \subset B_0$, $B_p \subset B_{p+1}$, $p = 1, 2, \ldots$ tels que (3.5) a lieu pour $\nu = \nu_p$, $p = 1, 2, \ldots$ et la restriction de f à la B_p est une fonction continue sur B_p. Soit B^* un ensemble $B^* = \bigcup_{p=1}^{\infty} B_p$ et $B = B^* \cup \cup \{a, b\}$. On va démontrer que f est une fonction intégrable M_* sur la base B.

On considère les fonctions f_p, $p = 1, 2, \ldots$ définies sur $[a, b]$ comme étant égales à f sur B_p et linéaires sur les intervalles contigus à B_p. En vertu du lemme 3 les fonctions f_p sont continues sur $[a, b]$. Donc d'après le lemme 2 il existe des intégrales

$$I_p = (M_*)\int_a^b f_p(x)dx = \int_a^b f_p(x)dx, \; p = 1, 2, \ldots. \tag{3.6}$$

Soit $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \ldots$ une suite de nombres positifs tels que $\lim_p \varepsilon_p = 0$; en vertu du théorème 4.1 de l'article [2] il existe une suite de nombres positifs $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p, \ldots$ telle que $\lim_p \eta_p = 0$ et

$$|I_p - \sigma(f_p, D)| < \varepsilon_p \tag{3.7}$$

pour chaque division D qui vérifie l'inégalité $\delta(D) < \eta_p$. Du moment que f vérifie la propriété S_* sur B, pour $\varepsilon > 0$ d'après (3.2), il existe une nombre $\mu > 0$ de sorte que

$$|\sigma(f, d'') - \sigma(f, d')| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.8}$$

pour chacune des deux sous-divisions de la base B qui vérifie $d' \leqslant d''$ et $\Delta(d') < \mu$. On considère p_0 tel que $\varepsilon_{p_0} < \frac{\varepsilon}{4}$ et $\nu_p < \mu$. Etant donnés les nombres $p_1, p_2 > p_0$ on considère la division D de la base B telle que $\delta(D) < \min(\eta_{p_1}, \eta_{p_2})$. De plus, si (a_i^s, b_i^s), $i = \overline{1, k_s}$, $s = \overline{1,2}$ sont les intervalles contigus de l'ensemble B_{p_s} tels qu'il existe des points $x_j^{si} \in D$, $j = \overline{1, k_{si}}$ pour qui $a_i^s = x_j^{si}$, $b_i^s = x_{k_{si}}$, $x_j^{si} < x_{j+1}^{si}$, $j = \overline{1, k_{si} - 1}$; alors $a_i^s, b_i^s \in D$. On peut de même exprimer la dernière condition sous la forme $\partial(B_{p_s}, D) = \emptyset$, $s = \overline{1,2}$. On considère les sous-divisions d^s: $< a_i^s, b_i^s >$, $s = \overline{1,2}$; $i = \overline{1, k_s}$ et d^{si}: $< x_j^{si}, x_{j+1}^{si} >$, $s = \overline{1,2}$; $i = \overline{1, k_s}$, $j = \overline{1, k_{si} - 1}$. Si $p_1 <$

$< p_2$ il existe la sous-division d^3 telle que $d^3 \subset D$, $d^2 \cap d^3 = \emptyset$ et $d^1 = d^2 \cup d^3$. Soit $d^4 = (d^2)_r \cup d^3$ alors $d^4 \leqslant d^1$, $(d^4)_r = (d^1)_r$ et $\Delta(d^1) < \nu_{p_1} < \eta$. D'après le lemme 1 on a

$$\sum_{i=1}^{k_s} \sigma(f_{p_s}, d^{si}) = \sigma[f, (d^s)_r].$$

On déduit donc que $\sigma(f_{p_2}, D) - \sigma(f_{p_1}, D) = \sigma(f, d^4) - \sigma[f, d^1)_r] = \sigma(f, d^4) - \sigma[f, (d^4)_r]$. En vertu de (3.7) et (3.8) il résulte

$$|I_{p_2} - I_{p_1}| \leqslant |I_{p_2} - \sigma(f_{p_2}, D)| + |\sigma(f_{p_2}, D) - \sigma(f_{p_1}, D)| +$$

$$+ |\sigma(f_{p_1}, D) - I_{p_1}| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon.$$

Par conséquent la suite I_p, $p = 1, 2, \ldots$ est convergente. Soit I la limite $I = \lim_p I_p$.

Étant donnée une suite admise de divisions $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$ de la base B, on choisit l'indice p de façon que, $[a_i^p, b_i^p]$ étant les intervalles contigus de l'ensemble B_p, aient lieu les relations

$$\sum_{i=1}^{\infty} (b_i^p - a_i^p) < \frac{\mu}{2},$$

$$|I - I_p| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.9}$$

et $\varepsilon_p < \frac{\varepsilon}{4}$. En vertu du théorème 1.1 il existe l'ensemble parfait $\widetilde{B}_p$ de sorte que $B_p \subset \widetilde{B}_p$ et $\lambda(\mathfrak{D}, \widetilde{B}_p) < \mu$. Soit $[a_i^p, b_i^p]$ un intervalle contigu de l'ensemble B_p et $\widetilde{B}_{p_i}$ l'ensemble (1.2). On désigne par $\widetilde{f}_{p_i}$ la fonction qui est égale à f_p pour $x \notin [a_i^p, b_i^p]$, qui coïncide sur $\widetilde{B}_{p_i}$ avec f et qui est linéaire sur les intervalles contigus de l'ensemble $\widetilde{B}_{p_i}$. La fonction $\widetilde{f}_{p_i}$ est continue sur l'ensemble parfait $B_p \cup \widetilde{B}_{p_i}$ et linéaire sur les intervalles contigus de cet ensemble. Il résulte du lemme 3 que la fonction $\widetilde{f}_{p_i}$ est continue sur $[a, b]$.

On considère la série

$$f_p^*(x) = f_p(x) + \sum_{i=1}^{\infty} [\widetilde{f}_{p_i}(x) - f_p(x)]. \tag{3.10}$$

Pour chaque point $x \in [a, b]$ tous les termes de cette série sont zéro sauf éventuellement un seul. Il résulte que (3.10) est une série convergente pour chaque point $x \in [a, b]$. Pour $x \in \widetilde{B}_p$, $f_p^*(x) = f(x)$ et sur les intervalles contigus de l'ensemble $\widetilde{B}_p$, $[a_j^p, b_j^p]$, $j = 1, 2, \ldots$ la fonction f_p^* est linéaire.

Etant donnée une division $D_n \in \mathfrak{D}$, soit $\bar{d}(D_n, \widetilde{B}_p)$ la sous-division contenue dans D_n qui couvre des points de première espèce de l'ensemble $\widetilde{B}_p$. Soit $< x_q^{pn}, y_q^{pn} >$, $q = \overline{1, h_{ph}}$ les couples de sous-division $\bar{d}(D_n, \widetilde{B}_p)$. A un couple $< x_q^{pn}, y_q^{pn} >$ correspond un ou deux points de première espèce de l'ensemble $\widetilde{B}_p$, qui sont couverts par le couple considéré. Dans le premier cas nous désignons par $\widetilde{a}^p_{j_q}$ le point correspondant et dans le deuxième cas nous les désignons par $\widetilde{a}^p_{j_q}$, $\widetilde{b}^p_{j'_q}$. Nous avons aussi $x^{pn}_q < \widetilde{a}^p_{j_q} < y^{pn}_q$ et $x^{pn}_q < \widetilde{a}^p_{j_q} < \widetilde{b}^p_{j'_q} < y^{pn}_q$. On considère les sous-divisions $\widetilde{d}^{pn}_q : < x^{pn}_q, \widetilde{a}^p_{j_q} >$; $< \widetilde{a}^p_{j_q}, y^{pn}_q >$ respectivement $\widetilde{d}^{pn}_q : < x^{pn}_q, \widetilde{a}^p_{j_q} >$; $< \widetilde{a}^p_{j_q}, \widetilde{b}^p_{j'_q} >$; $< \widetilde{b}^p_{j'_q}, y^{pn}_q >$, $q = \overline{1, h_{pn}}$. Soit $\widetilde{d}^{pn} = \bigcup_{q=1}^{h_{pn}} \widetilde{d}^{pn}_q$, alors

$$\Delta(\widetilde{d}^{pn}) < \mu, \; n = 1, 2, \dots . \tag{3.11}$$

Soit D'_n les sous-divisions $D'_n = D_n \cup \widetilde{d}^{pn}$, $n = 1, 2, \dots$. On observe que $\widetilde{d}(D'_n, \widetilde{B}_p) = \emptyset$ $n = 1, 2, \dots$. Nous désignons par $[\widetilde{a}^p_{i'n}, \widetilde{b}^p_{i'n}]$, $i' = \overline{1, k'_n}$ les intervalles contigus de l'ensemble $\widetilde{B}_p$ pour qu'il y ait des points $x^{ni'}_j$, $j = \overline{1, h_{i'}}$, $x^{ni'}_1 = \widetilde{a}^p_{i'n}$, $x^{ni'}_{hi'} = \widetilde{b}^p_{i'n}$ de la division D'_n qui appartiennent à ces intervalles. On considère les sous-divisions $d'_{i'p} : < x^{ni'}_j, x^{ni'}_{j+1} >$, $j = \overline{1, h_{i'} - 1}$ et aussi la sous-division $d'_p = \sum_{i'=1}^{k'_n} d'_{i'p}$. Soient $[a^p_{ni}, b^p_{ni}]$, $i = \overline{1, k_n}$ les intervalles contigus de l'ensemble B_p pour qui il y ait des points x^{ni}_q, $q = \overline{1, h_i}$, $x^{ni}_1 = a^p_{ni}$, $x^{ni}_{hi} = b^p_{ni}$ de la division D'_n qui appartiennent à ces intervalles. Nous désignons par d_{ip}, $i = \overline{1, k_n}$ les sous-divisions $d_{ip} : < x^{ni}_q$, $x^{ni}_{q+1} >$, $q = \overline{1, h_i - 1}$ et par d_p la sous-division $d_p = \bigcup_{i=1}^{k_n} d_{ip}$. On remarque que $d'_p \subset d_p$. Il y a dans ce cas la sous-division d^*_p telle que $d_p = d'_p \cup d^*_p$, $(d'_p)_r \subset d^*_p$. Les points appartenant aux couples de la sous-division d^* appartiennent à l'ensemble $\widetilde{B}_p$. On remarque aussi que $(d_p)_q : < a^p_{ni}, b^p_{ni} >$, $i = \overline{1, k_n}$ et que $(d_p)_r = (d^*_p)_r$. Il résulte que

$$\Delta(d_p) < \mu. \tag{3.12}$$

De ce que la fonction f^*_p est linéaire sur les intervalles contigus de l'ensemble $\widetilde{B}_p$, d'après le lemme 1, on déduit que $\sigma(f^*_p, d'_p) = \sigma(f^*_p, d^*_p) = \sigma(f, d^*_p)$.

En vertu des relations (3.7), (3.8), (3.9), (3.11) et (3.12), pour une division D_n pour qui $\delta(D_n) < \eta_p$, a lieu la relation

$$\begin{gathered}|I - \sigma(f, D_n)| \leqslant |I - I_p| + |I_p - \sigma(f_p, D'_n)| + |\sigma(f_p, D'_n) - \\ - \sigma(f^*_p, D'_n)| + |\sigma(f^*_p, D'_n) - \sigma(f, D_n)| = |I - I_p| + |I_p - \sigma(f_p, D'_n)| + \\ + |\sigma[f, (d_p)_r] - \sigma(f, d^*_p)| + |\sigma(f, \widetilde{d}^{pn}) - \sigma[f, (\widetilde{d}^{pn})_r]| < \\ < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.\end{gathered}$$

Cette relation nous montre que

$$\lim_n \sigma(f, D_n) = I$$

et le théorème est démontré.

THÉORÈME 3.5 *Soit f une fonction mesurable et intégrable M_* sur la base B de l'intervalle $[a, b]$. Pour chaque $c \in B$, f est intégrable M_* sur les bases $B_1 = B \cap \cap [a, c]$, $B_2 = B \cap [c, b]$ et a lieu la relation*

$$(M_*)\int_B f(x)\,dx = (M_*)\int_{B_1} f(x)\,dx + (M_*)\int_{B_2} f(x)\,dx. \tag{3.13}$$

Démonstration. La fonction f étant intégrable M_* sur B, d'après le théorème 3.3, il résulte que f possède la propriété S_* sur B, donc sur les bases B_1 et B_2. Il résulte, en utilisant le théorème 3.4, qu'il y a des bases $B_1^\circ \subset B_1$, $B_2^\circ \subset B_2$ telles que f soit intégrable M_* sur B_1° et B_2°.

Soit $h_1, h_2 > 0$ tels que $c - h_1 \in B_1^\circ$, $c + h_2 \in B_2^\circ$; on considère la sous-division $d: < c - h_1, c > ; < c, c + h_2 >$. Parce que f possède la propriété S_* sur B, à chaque nombre $\varepsilon > 0$ il correspond $\eta > 0$ tel que

$$|\sigma(f, d) - \sigma(f, d_r)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

si $\Delta(d) < \eta$. Dans ce cas pour chaque $h_1, h_2 > 0$ tels que $h_1 + h_2 < \eta$ on a

$$|(h_1 + h_2) f(c) - h_1 f(c + h_2) - h_2 f(c - h_1)| = 2|\sigma(f, d) - \sigma(f, d_r)| < \varepsilon.$$

Donc la relation (2.3) est vérifiée et, en utilisant le théorème 2.6, on déduit

$$(M_*)\int_B f(x)dx = (M_*)\int_{B_1^0} f(x)dx + (M_*)\int_{B_2^0} f(x)dx. \tag{3.14}$$

Soit une suite admise des divisions $\mathfrak{D}'(D_1', D_2', \ldots, D_n', \ldots)$ de la base B_1. Soit aussi $\mathfrak{D}''(D_1'', D_2'', \ldots, D_n'', \ldots)$ une suite admise de divisions de la base B_2^0. La suite des divisions $\mathfrak{D}(D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots)$ où $D_n = D_n' \cup D_n''$, $n = 1, 2, \ldots$ est une suite admise de divisions de la base B. On a $\sigma(f, D_n) = \sigma(f, D_n') + \sigma(f, D_n'')$, $n = 1, 2, \ldots$, donc à la limite il résulte que

$$\lim_n \sigma(f, D_n') = \lim_n \sigma(f, D_n) - \lim_n \sigma(f, D_n'') =$$

$$(M_*)\int_B f(x)\,dx - (M_*)\int_{B_2^0} f(x)\,dx.$$

D'après (3.14) il résulte que f est intégrable M_* sur B_1 et l'égalité

$$(M_*)\int_{B_1} f(x)\,dx = (M_*)\int_{B_1^0} f(x)\,dx$$

est vérifiée. De même on montre que f est intégrable M_* sur B_2, puis de la relation (3.14) on déduit (3.13).

(Manuscrit reçu le 26 décembre 1968)

BIBLIOGRAPHIE

1. Halmos, P. R., *Measure theory,* New York, 1950.
2. Rădulescu, M., *Une définition de l'intégrale,* „Studia Univ. Babeş—Bolyai", XIV, 1, 1969, 23—35.
3. Saks, S., *Theory of the Integral,* New York, 1964.

INTEGRALA M_*

(Rezumat)

În continuarea articolului [2], în prezenta notă se dau mai multe proprietăţi ale integrale M_* a unei funcţii f definite şi integrabile M_* pe o bază B. În paragraful 3 se consideră proprietatea S_* a unei funcţii f pe o bază B. Se arată (teorema 3.3) că verificarea acestei proprietăţi pe B este o condiţie necesară ca o funcţie f să fie integrabilă M_* pe B. În teorema 3.4 se demonstrează că proprietatea S_* este o condiţie suficientă ca o funcţie măsurabilă f să fie integrabilă M_* pe B.

ИНТЕГРАЛ M_*

(Резюме)

В продолжение статьи [2] в настоящей работе даются несколько свойств интеграла M_* однсй функции f, определённой и интегрируемой M_* на базе B. В абзаце 3 рассматривается свойство S_* функции f на базе B. Показывается (теорема 3.3), что проверка этого свойства на B является необходимым условием для того, чтобы функция f была интегрируемой M_* на B. В теореме 3.4 доказывается, что свойство S_* — достаточное условие для того, чтобы измеримая функция f была интегрируемой M_* на B.

UNE PROPRIÉTÉ DE MINIMUM DES FONCTIONS „SPLINE"

par
CAROL KALIK

Le point de départ de ce travail est l'étude d'un problème variationnel qui se trouve étroitement lié à beaucoup de problèmes d'analyse numérique, et qui notamment, embrasse les différentes fonctions „spline".

1. Nous allons noter par $H^{(k)}(a, b)$ l'ensemble des fonctions $f(x)$, définies sur l'intervalle fermé $[a, b]$ qui satisfont les conditions suivantes:

a) $f(x) \in C^{(k-1)}[a, b]$

b) $f^{(k-1)}(x)$ est absolument continue et $f^{(k)}(x) \in L_2(a, b)$ Sur cet ensemble de fonctions nous allons envisager deux produits scalaires distincts. Le premier est défini par

$$(f, g)_k = \int_a^b \sum_{j=0}^{k} f^{(k)}(x) \cdot g^{(j)}(x)dx,$$

ce qui engendre la norme

$$||f||_k = \sqrt{(f, f_k)}$$

Il est connu que l'ensemble $H^{(k)}(a, b)$ ayant ce produit scalaire représente un espace Hilbert.

Pour définir le second produit scalaire on construit une projection

$$\pi : H^{(k)}(a, b) \to \mathfrak{P}_{k-1}$$

où $\mathfrak{P}_{k-1}$ est l'ensemble de polynômes ayant un degré tout au plus égal à $k - 1$. Soit

$$\pi(f) = \sum_{\mu=0}^{k-1} l_\mu(f) x^\mu$$

où

$$l_\mu(f) = \sum_{j=0} a_{\mu j} \int_a^b f^{(j)}(x)\mathrm{d}x \quad (\mu = 0, \ldots, k-1) \tag{1,1}$$

et $a_{\mu j}$ $(j = 0,1, \ldots, k - 1)$ la solution du système d'équations suivant

$$l_\mu(x^h) = \begin{cases} 1 \text{ pour } h = \mu \\ 0 \text{ pour } h \neq \mu \end{cases} \quad (h = 0, \ldots, k-1)$$

La matrice de ce système a une forme triangulaire et chaque élément de sa diagonale est égal à $b - a$. Par conséquent le déterminant du système est égal à $(b - a)^k$, ce qui signifie à son tour que le système a une solution unique.

Notons

$$(\pi(f),\ \pi(f)) = \sum_{\mu=0}^{k-1} l_\mu(f) \cdot l_\mu(f)$$

et

$$(f,\ g)_\pi = \int_a^b f^{(k)}(x)\, g^{(k)}(x) dx + (\pi(f),\ \pi(f)) \tag{1,2}$$

respectivement

$$||f||_\pi^2 = \int_a^b \{f^{(k)}(x)\}^2 dx + ||\pi(f)||^2$$

où

$$||\pi(f)||^2 = \sum_{\mu=0}^{k-1} l_\mu^2(f)$$

L'égalité (1,2) nous fournit la deuxième norme sur $H^{(k)}(a,\ b)$.

Lemme 1.1 *Les normes* $||\cdot||_k$, $||\cdot||_\pi$ *sont équivalentes.*

Démonstration. Moyennant l'inégalité de Schwarz et celle de Cauchy il résulte de (1,1) que

$$||f||_\pi^2 = \int_a^b \{f^{(k)}(x)\}^2 dx + C \sum_{j=0}^{k-1} \int_a^b \{f^{(j)}(x)\}^2 dx \leqslant C||f||_k^2$$

Il faut encore démontrer que $H^{(k)}(a,\ b)$ est un espace Hilbert tout aussi bien avec la norme $||\cdot||_\pi$. Cela sera prouvé quand nous aurons démontré que la fermeture de l'ensemble $C^k[a,\ b]$ selon la norme $||\cdot||_\pi$ est composée de fonctions $f(x)$ qui satisfont les deux conditions données par la définition de $H^{(k)}(a,\ b)$. Soit donc $f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ une suite fondamentale de fonctions selon la norme $||\cdot||$. Il en résulte que

$$\lim_{n,m \to \infty} ||f_n^{(k)} - f_m^{(k)}|| = 0 \text{ et } \lim_{n,m \to \infty} ||\pi(f_n - f_m)|| = 0 \tag{1,3}$$

Il s'ensuit de (1,3) l'existence d'une fonction $g(x) \in L_2(a,\ b)$ de sorte que $\lim\limits_{n \to \infty} ||f_n^{(k)} - g|| = 0$. La formule (1,3) nous montre que

$$\lim_{n,m \to \infty} l_\mu(f_n - f_m) = 0 \tag{1,4}$$

pour $\mu = 0,1, \ldots, k - 1$. Cependant il est facile de remarquer que le système (1,1) est résoluble aussi avec une seule solution. Donc

$$\int_a^b f^{(j)}(x) dx = \sum_{\mu=0}^{k-1} b_{j\mu}\, l_\mu(f)$$

Par conséquent

$$\lim_{n,m\to\infty}\int_a^b (f_n^{(j)} - f_m^{(j)})\,dx = 0$$

pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Dans ce qui suit nous utiliserons la représentation suivante

$$u(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b (u\xi)d\xi + \int_a^b K(x, \xi)\; u'(\xi)d\xi \qquad (1,5)$$

qui est valable pour chaque $u(x) \in C^{(j)}[a, b]$, où

$$K(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{\xi - a}{b-a} & \text{si} \quad a < \xi < x \\ \dfrac{\xi - b}{b-a} & \text{si} \quad x < \xi < b \end{cases}$$

En appliquant la formule (1,5) à $\{f_n^{(k-1)} - f_m^{(k-1)}\}$, on obtient

$$f_n^{(k-1)}(x) - f_m^{(k-1)}(x) = \frac{1}{b-a}\int_a^b [f_n^{(k-1)}(\xi) - f_m^{(k-1)}(\xi)]d\xi + \int_a^b K(x, \xi)[f_n^{(k)}(\xi) - f_m^{(k)}(\xi)]d\xi$$

d'où il résulte la convergence uniforme de la suite $\{f_n^{(k-1)}(x)\}$. De la même manière on peut démontrer la convergence uniforme des suites $\{f_n^{(j)}(x)\}$ pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Il s'ensuit par conséquent l'existence de la fonction $f(x) \in C^{(k-1)}[a, b]$ et

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(j)}(x) = f^{(j)}(x)$$

uniformément sur $[a, b]$ pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Enfin, nous allons démontrer que la fonction $g(x)$ est la dérivée généralisée d'ordre k de la fonction $f(x)$. Nous avons

$$\int_a^b f_n(x)\cdot\varphi^{(k)}(x)dx = (-1)^k\int_a^b f_n^{(k)}(x)\cdot\varphi(x)dx$$

pour chaque $\varphi(x) \in C_0^\infty(a, b)$. En passant à la limite nous obtenons

$$\int_a^b f(x)\cdot\varphi^{(k)}(x)dx = (-1)^k\int_a^b g(x)\cdot\varphi(x)dx$$

Donc le lemme est démontré.

Nous utiliserons aussi un troisième espace Hilbert noté par $L_2^{(k)}(a, b)$. Les éléments de cet espace sont les classes d'équivalence de l'espace

$$H^{(k)}(a, b)\big/\mathfrak{P}_{k-1}$$

alors que le produit scalaire est donné par

$$[f, g]_k = \int_a^b f^{(k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)\, dx,$$

où $f(x)$ et $g(x)$ sont des représentants des classes d'équivalence respective. La norme de l'espace sera notée par

$$|f|_k = \sqrt{[f, f]_k}$$

2. Envisageons la fonctionnelle suivante

$$(G, f) = \int_a^b \{f^{(k)}(x)\}^2\, dx - 2(F, f) \tag{2,1}$$

définie sur $H^{(k)}(a, b)$ où F est une fonctionnelle continue donnée sur $H^{(k)}(a, b)$. Les conclusions que nous tirerons en ce qui concerne les différentes fonctions „spline" s'appuient sur le théorème suivant

THÉORÈME 2.1. *Si la fonctionelle F satisfait les conditions suivantes*

$$(F, x^\mu) = 0 \text{ pour } \mu = 0,1, \ldots k-1$$

alors la fonctionnelle G a un minimum absolu sur $H^{(k)}(a, b)$ et ce minimum se trouve réalisé par une seule fonction.

Démonstration. La fonctionnelle F étant continue est aussi bornée:

$$|(F, f)|^2 \leqslant C^2 ||f||_\pi^2 = C^2\{|f|_k^2 + ||\pi(f)||^2\} \tag{2,2}$$

Il résulte de $(F, x^\mu) = 0$ pour $\mu = 0, 1, \ldots, k-1$ que $(F, \pi(f)) = 0$. Cela signifie que $(F, f) = F(f - \pi(f))$. Par conséquent, il s'ensuit de (2, 2) que

$$|(F, f)|^2 = |(F, f - \pi(f))|^2 \leqslant C^2 \{|f - \pi(f)|_k^2 + ||\pi(f) - \pi(\pi(f)||^2\} = C^2|f|_k^2 \tag{2,3}$$

Cette inégalité nous permet d'écrire

$$(G, f) \geqslant |f|_k^2 - 2C|f|_k = (|f|_k - C)^2 - C^2 \geqslant -C^2$$

ce qui signifie que la fonctionnelle G est bornée inférieurement. Soit

$$f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

une suite minimisante. Soit aussi $\varepsilon > 0$ un nombre quelconque. Notons par N le nombre pour lequel il y a

$$(G, f_n) < d + \varepsilon$$

pour chaque $n \geqslant N$. Nous avons noté $d = \inf (G, f)$ sur $H^{(k)}(a, b)$. Moyennant l'identité

$$\left|\frac{f_n - f_m}{2}\right|_k^2 = \frac{1}{2}(G, f_n) + \frac{1}{2}(G, f_m) - \left(G, \frac{f_n + f_m}{2}\right)$$

facile à vérifier, nous obtenons

$$\left|\frac{f_n - f_m}{2}\right|_k^2 \leqslant \frac{d+\varepsilon}{2} + \frac{d+\varepsilon}{2} - d = \varepsilon$$

pour $n,\ m \geqslant N$. Il s'ensuit que la suite minimisante converge dans l'espace Hilbert $L_2^{(k)}(a,\ b)$. Soit $g(x)$ la limite de cette suite. Nous avons

$$|(G,\ g) - (G,\ f_n)| = ||g|_k^2 - |f_n|_k^2 + 2(F,\ f_k - g)| \leqslant ||g|_k^2 - |f_n|^2| + 2c|f_n - g|_k.$$

Par conséquent

$$\inf_{H^{(k)}(a,\ b)} (G, f) = (G,\ g),$$

cela signifie que le minimum absolu de la fonctionnelle G existe.

Nous pouvons nous convaincre facilement que $g(x)$ est unique. Soit $g\ (x)$ une autre fonction qui réalise le minimum de G. En écrivant la variation de la fonctionnelle G dans g respectivement dans g_1, on obtient

$$\int_a^b g^{(k)}(x) \cdot f^{(k)}(x)\, dx - (F,\ f) = 0$$

respectivement

$$\int_a^b g_1^{(k)}(x) \cdot f^{(k)}(x)\, dx - (F,\ f) = 0$$

Il en résulte

$$\int_a^b (g^{(k)}(x) - g_1^{(k)}(x)) \cdot f^{(k)}(x)\, dx = 0$$

pour chaque $f \in H^{(k)}(a,\ b)$. Par conséquent nous avons $g - g_1 \in P_{k-1}$, ce qui démontre que $g(x)$ et $g_1(x)$ apartiennent à la même classe d'équivalence.

3. *Le rapport entre la fonctionnelle G et les fonctions „spline"*. Ici nous allons démontrer que les fonctions „spline" polynômiales liées à l'interpolation de type Lagrange, de type Hermite et de type Hermite-Birkhoff peuvent être obtenues en tant que fonctions minimisant la fonctionnelle G pour certaines fonctionnelles F fixées. En même temps, moyennant le Théorème 2.1 on peut démontrer d'une manière simple toutes les propriétés fondamentales des fonctions „spline".

Soit $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ des noeuds arbitrairement fixés sur l'axe réel. Choisissons $a < x_1$ et $b > x_n$ d'une façon arbitraire. Conformément à la notation [2] E désignera une matrice quelconque ayant la forme

$$E = ||\varepsilon_{ij}||_{i=\overline{1,\ n}}^{j=\overline{0,\ \mu-1}} \tag{3,1}$$

avec n lignes et μ colonnes. Ici ε_{ij} représentent des nombres égaux à 1 ou à 0. Supposons que dans la colonne μ de cette matrice il y ait au moins un élément égal à 1.

Notons par e l'ensemble de couples (i, j) pour lesquels $\varepsilon_{ij} = 1$. Soit $|E| = \sum_{(i,j)\in e} \varepsilon_{ij}$. On remarque que E est justement la matrice du système suivant

$$f^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \quad (i, j) \in e \tag{3,2}$$

lequel représente les conditions d'interpolation selon Hermite-Birkhoff. Il est évident que dans ce cas général se trouve inclus le cas d'interpolation selon Lagrange $(\varepsilon_{ij} = 1\,;\ i = 1, \ldots, n\,;\ j = 0)$ aussi bien que le cas d'interpolation de type Hermite $(\varepsilon_{ij} = 1\,;\ i = 1, \ldots, n\,;\ j = 0, \ldots, \mu - 1)$.

Nous allons envisager maintenant des fonctionnelles ayant la forme

$$F = \sum_{(i,j)\in e} \lambda_{ij} \delta_i^{(j)} \tag{3,3}$$

Pour ces fonctionnelles nous établissons le théorème 3.1 qui est une conséquence directe du théorème 2.1.

THÉORÈME 3.1. *Soit E une matrice quelconque ayant la forme* (3,1). *Si les consantes* λ_{ij} *de* (3,3) *sont choisies de manière que*

$$(F, x^h) = 0 \ \ pour \ \ h = 0, 1, \ldots, k-1 \tag{3,4}$$

où k *est un nombre donné quelconque mais plus grand que* μ *ou égal à* μ, *alors il existe une seule fonction* $s(x) \in H^{(k)}(a, b)$, *qui satisfait les conditions suivantes:*

1. elle est la solution du problème aux limites:

$$\left.\begin{aligned} &(-1)^k D^{2k} s = F \\ &s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0 \quad (j = k, \ldots, 2k-1) \end{aligned}\right\} \tag{3,5}$$

2. sur chaque intervalle (x_i, x_{i+1}) la fonction $s(x)$ coïncide avec un polynôme ayant le degré tout au plus égal à $2k - 1$.

3. à chaque point x $(i = 1, \ldots, n)$ la fonction $s(x)$ satisfait les conditions de raccordement

$$s^{(j)}(x_i + 0) = s^{(j)}(x_i - 0) \quad (j = 0, \ldots, k-1, \ldots, 2k - \alpha_i - 2)$$

où $\alpha_i = \max\limits_{\varepsilon_{ih}=1} \{h\}$.

Démonstration. Selon les conditions de ce théorème la fonctionnelle G a un minimum absolu. Notons par $s(x)$ la fonction unique de $H^{(k)}(a, b)$ qui minimise la fonctionnelle G. Nous avons à démontrer que la fonction $s(x)$ satisfait toutes les affirmations du théorème.

La variation de G au point $s(x)$ est donnée par

$$\int_a^b f^{(k)}(x) \cdot s^{(k)}(x)\, dx - (F, f) = 0 \tag{3.6}$$

vraie pour chaque $f \in H^{(k)}(a, b)$. Cette identité, considérée seulement pour $f \in C_0^\infty(a, b)$, signifie que $s(x)$ satisfait l'équation différentielle de la formule (3,5).

A la démonstration des conditions aux limites de (3,5) nous préposons celle de la propriété 2. Il résulte de (3,6) et de la forme (3,3) de la fonctionnelle F que

$$\int_a^b s^{(k)}(x) \cdot f^{(k)}(x)\,dx = 0$$

pour chaque $f \in C_0^\infty(x_i, x_{i+1})$, ce qui signifie que $(-1)^k D^{2k}s = 0$ sur l'intervale (x_i, x_{i+1}). Par conséquent $s(x)$ est un polynôme ayant un degré tout au plus égal à $2k - 1$ sur l'intervalle (x_i, x_{i+1}).

Le raisonnement ci-dessus nous montre que $s(x)$ coïncide avec un polynôme aussi sur les intervalles (a, x_1) et (x_n, b). Afin de démontrer les conditions aux limites de (3,5), considérons le sous-espace $\overset{\circ}{H}{}^{(k)}(a, b)$ de $H^{(k)}(a, b)$ composé des fonctions $f \in H^{(k)}(a, b)$ qui satisfont les conditions suivantes:

a. $f(x) \equiv 0$ sur (x_1, b)

b. $f^{(j)}(x_1) = 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$

De (3,6) nous avons

$$\int_a^b s^{(k)}(x) \cdot f^{(k)}(x)\,dx = 0$$

pour chaque $f(x) \in \overset{\circ}{H}{}^{(k)}(a, x_1)$. En intégrant par parties et en tenant compte de la condition b, il s'ensuit pour chaque $f(x) \in \overset{\circ}{H}{}^{(k)}(a, x_1)$:

$$\sum_{j=0}^{k-1} (-1)^{j-1} s^{(k+j)}(a) f^{(k-j-1)}(a) = 0$$

En particulier, soit $f(x) = P_{2k-1}(x)$ où $P_{2k-1}(x)$ est un polynôme ayant le degré $2k - 1$ avec les propriétés suivantes:

1. $P^{(h)}_{2k-1}(x_1) = 0$ pour $h = 0, 1, \ldots, k-1$

2. $P^{(h)}_{2k-1}(x) = \begin{cases} c \neq 0 & \text{pour } h = j \\ 0 & \text{pour } h \neq j \end{cases}$

Nous trouvons à partir de l'égalité antérieure, pour $f(x) = P_{2k-1}(x)$ que

$$c \cdot s^{(k+j)}(a) = 0$$

Etant donné que c est une constante arbitraire, nous avons obtenu $s^{(k+j)}(a) = 0$. De cette façon les conditions aux limites de (3,5) sont en effet satisfaites par la fonction $s(x)$.

Enfin, nous allons démontrer que la fonction $s(x)$ satisfait aussi la condition de raccordement 3°. Dans ce but il est suffisant de montrer que $s(x) \in H^{2k-\alpha_i-1}(x_{i-1}, x_{i+1})$. De (3,6) il s'ensuit que

$$\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} s^{(k)}(x) \cdot f^{(k)}(x)\,dx - \sum_{(i,j)\in e} \lambda_{ij}(\delta_i^{(j)}, f) = 0$$

où $f(x) \in C_0^{\infty}(x_{i-1}, x_{i+1})$, et i est fixé. Il en résulte que

$$(-1)^k D^{2k} s(x) = \sum_{(i,j)\in e} \lambda_{ij} \delta_i^{(j)}$$

sur (x_{i-1}, x_{i+1}). Il est à souligner que les additions contenues dans le deuxième membre de cette égalité se font par rapport à j, vu que i est fixé. L'équation différentielle que nous venons d'obtenir montre que, sur l'intervalle (x_{i-1}, x_{i+1}), la fonction $s(x)$ est une combinaison linéaire des fonctions $s_j(x)$ satisfaisant l'équation différentielle

$$(-1)^k D^{2k} s_j = \delta_i^{(j)}$$

Cependant, nous avons $s_j \in H^{2k-j-1}(x_{i-1}, x_{i+1})$ et, vu que $j \leqslant \alpha_i$, nous trouvons $s_j \in H^{2k-\alpha_i-1}(x_{i-1}, x_{i+1})$ pour chaque j. Ainsi $s(x) \in H^{2k-\alpha_i-1}(x_{i-1}, x_{i+1})$. Nous avons à faire une remarque concernant le théorème démontré. Étant donné que $s(x)$ coïncide avec un polynôme ayant le degré tout au plus égal à $2k-1$ sur l'intervalle (a, x_1) respectivement sur (x_n, b) et que la fonction $s(x)$ satisfait les conditions aux limites de (3,5), il en résulte que $s(x)$ est un polynôme ayant le degré au plus égal à $k-1$ dans (a, x_1)aussi bien que dans (x_n, b).

Pour nous convaincre que le théorème 3.1 nous fournit toutes les „g-spline" de I. J. Schoenberg, il faut envisager la définition qui suit:

DÉFINITION 3.1. La matrice E sera nommée „k-normale" si pour chaque polynôme ayant le degré tout au plus égal à $k-1$ et satisfaisant les conditions

$$P_{k-1}^{(j)}(x_i) = 0, \quad (i, j) \in e$$

il résulte que $P_{k-1}(x) \equiv 0$.

Ayant en vue que le nombre d'égalités de cette définition est égal à $|E|$, et qu le nombre de coefficients du polynôme $P_{k-1}(x)$ est égal à k, il s'ensuit que $k \leqslant |E|$

LEMME 3.1 *Si la matrice E est k-normale et si $k < |E|$, alors il existe une famile des fonctionnelles F ayant la forme* (3,3) *qui satisfont les conditions* (3,4). *Cette famille dépend de $|E| - k$ paramètres arbitraires.*

Démonstration. Il faut démontrer que le système

$$\left(F, \frac{x_i^{\nu}}{\nu!}\right) = \sum_{(i,j)\in e} (-1)^j \frac{x_i^{\nu-j}}{(\nu-j)!} \lambda_{ij} = 0 \quad (\lambda = 0, 1, \ldots, k-1) \tag{3,7}$$

a des solutions et que ces solutions dépendent de $|E| - k$ paramètres. Nous allons démontrer que le rang de la matrice du système (3,7) est égal à k. En effet, soit $P_{k-1}(x) = \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu \frac{x^\nu}{\nu!}$. De $P_{k-1}^{(j)}(x_i) = 0$ pour $(i, j) \in$ e il résulte que

$$\sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu \frac{x_i^{\nu-j}}{(\nu-j)!} = 0 \qquad (i, j) \in e$$

ou

$$(-1)^j \sum_{\nu=0}^{k-1} a_\nu \frac{x_i^{\nu-j}}{(\nu-j)!} = 0 \qquad (i, j) \in e$$

Comme la matrice E est k-normale, ce système admet seulement la solution banale, ce qui signifie que le rang de la matrice

$$\left\| (-1)^j \frac{x_i^{\nu-j}}{(\nu-j)\,!} \right\|_{(i,j)\in e}^{\nu=\overline{0,\,k-1}}$$

est égal à k. Mais cette matrice est la transposée de (3,7), donc on a obtenu l'affirmation du lemme 3.1.

Remarque. Si $k = n$, alors les „g-spline" coïncident avec l'ensemble des polynômes $\mathfrak{P}_{|E|-1}$.

Dans la suite nous noterons par $\mathcal{S}_k(E\,;\, x_1, \ldots, x_n)$ l'ensemble de fonctions „spline" donné par le théorème 3.1. Les théorèmes 2.1 et 3.1 nous permettent de mettre en évidence les propriétés fondamentales des „spline".

LEMME 3.1. *Si la matrice E est k-normale, alors pour chaque système de nombres donnés $y_i^{(j)}(i, j) \in e$ de sorte qu'un d'eux au moins soit différent de zéro, il existe une fonction unique $s(x) \in \mathcal{S}_k$, de sorte que*

$$s^{(j)}(x_i) = y_i^{(j)} \; (i, j) \in e \tag{3,8}$$

Démonstration. Le théorème 3.1 fait voir que la forme générale de „g-spline" est

$$s(x) = P_{k-1}(x) + \sum_{(i,j)\in e} \gamma_{ij} \frac{(x - x_i)_+^{2k-1-j}}{(2k-1-j)\,!}$$

où k de $k + |E|$ paramètres sont fixés par $s^{(k+j)}(b) = 0$ pour $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Par conséquent, dans $s(x)$ nous avons $|E|$ paramètres indéterminés. D'autre part le nombre d'équations dans (3,8) est égal à $|E|$. Il est donc suffisant de démontrer que

$$s^{(j)}(x_i) = 0 \qquad (i, j) \in e \tag{3,8'}$$

attire $s(x) \equiv 0$.

En remplaçant $f(x)$ par $s(x)$ dans la formule (3,6) et en tenant compte de (3,8') nous obtenons

$$\int_a^b \{s^{(k)}(x)\}^2 \, dx = 0$$

d'où il résulte que $s(x) = P_{k-1}$. Mais la matrice étant k-normale, de (3,8') il résulte que $s(x) = P_{k-1}(x) \equiv 0$, ce qu'il fallait démontrer.

LEMME 3.3. *Supposons que E est k-normale. Soit $\varphi(x) \in H^{(k)}(a, b)$ une fonction donnée. On note*

$$\mathfrak{F} = \{f(x) \in H^{(k)}(a, b) : f^{(j)}(x_i) = \varphi^{(j)}(x_i),\; (i, j) \in e\}$$

et par $s(x)$ la fonction „spline" pour laquelle

$$s^{(j)}(x_i) = \varphi^{(j)}(x_i) \; (i, j) \in e$$

Alors

$$\min_{\mathfrak{F}} \int_a^b \{f^{(k)}(x)\}^2 dx = \int_a^b \{s^{(k)}(x)\}^2 \, dx \tag{3,9}$$

Démonstration. Il résulte du théorème 2.1

$$\min_{\mathcal{F}}\left[\int_a^b \{f^{(k)}(x)^2\}dx - 2\sum_{(i,j)\in e}\lambda_{ij}(\delta_i^{(j)},\ \varphi)\right] = \int_a^b \{s^{(k)}(x)^2\,dx - 2\sum_{(i,j)\in e}\lambda_{ij}(\delta_i^{(j)},\ \varphi)$$

d'où on obtient (3,9).

LEMME 3.4. Soit E une matrice k-normale et $f \in H^{(k)}(a, b)$ une fonction donnée. Alors

$$\min_{\mathcal{S}_k(E;\, x_1, \ldots, x_\eta)} \int_a^b \{f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)\}^2\,dx = \int_a^b \{f^{(k)}(x) - s_0^{(k)}(x)\}^2\,dx$$

où $s_0(x)$ *est la fonction „spline" interpolatoire pour laquelle*

$$s_0^{(j)}(x_i) = f^{(j)}(x_i)\ (i, j) \in e$$

Démonstration. Nous avons

$$\int_a^b \{f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)\}^2\,dx = \int_a^b \{f^{(k)}(x) - s_0^{(k)}(x)\}^2\,dx + \int_a^b \{s_0^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)\}^2\,dx +$$

$$2\int_a^b \{f^{(k)}(x) - s_0^{(k)}(x)\}\cdot\{s_0^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)\}\,dx$$

La variation de la fonctionnelle G, c'est à dire (3,6) nous montre que

$$\int_a^b \{f^{(k)}(x) - s_0^{(k)}(x)\}\, s_0^{(k)}(x)dx = \sum_{(i,j)\in e}\lambda_{ij}(\delta_i^{(j)},\ f - s_0) = 0$$

et

$$\int_a^b \{f^{(k)}(x) - s_0^{(k)}(x)\}\cdot s^{(k)}(x)\,dx = \sum_{(i,j)\in e}\lambda_{ij}(\delta_i^{(j)},\ f - s_0) = 0$$

Par conséquent nous avons l'egalité suivante

$$\int_a^b \{f^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)\}^2\,dx = \int_a^b \{f^{(k)}(x) - s_0^{(k)}(x)\}^2 dx + \int_a^b \{s_0^{(k)}(x) - s^{(k)}(x)\}^2\,dx$$

d'où résulte l'affirmation du lemme 3.4.

Nous terminons ce paragraphe par une remarque portant sur la représentation intégrale de la différence divisée. Celle-ci est une fonctionnelle ayant la forme

$$\mathrm{F} = \sum_{i=1}^{k+1}\lambda_i\,\delta_i$$

et qui s'annule pour chaque polynôme ayant le degré tout au plus égal à $k-1$. Donc, la „spline" $s(x)$ correspondant à cette fonctionnelle est le noyau de représentation de la fonctionnelle F sur $H^{(k)}(a, b)$. C'est à dire que

$$(F, f) = \int_a^b s^{(k)}(x) \cdot f^{(k)}(x) dx$$

cette formule étant justement la variation (3,6).

4. *Le rapport entre la fonctionnelle G et les formules d'approximation des fonctionnelles linéaires.* Envisageons une fonctionnelle quelconque ayant la forme

$$(\mathfrak{L}, f) = \sum_{j=1}^{k-1} \int_a^b a_j(x)\, f^{(j)}(x)\, dx$$

définie sur $H^{(k)}(a, b)$. Supposons que $a_j(x) \in \mathfrak{L}_2(a, b)$. Il est facile à observer que la fonctionnelle $\mathfrak{L}$ este continue sur $H^{(k)}(a, b)$.

Soit

$$(\hat{\mathfrak{L}}, f) = \sum_{(i, j) \in e} \lambda_{ij}(\delta_i^{(j)}, f)$$

une formule quelconque d'approximation de la fonctionnelle $\mathfrak{L}$. Nous notons

$$F = \mathfrak{L} - \hat{\mathfrak{L}} \tag{4,1}$$

La conséquence suivante du théorème de base 2.1 a lieu.

THÉORÈME 4.1. *Si la fonctionnelle F donnée par* (4,1) *satisfait les conditions* (3,4), *alors la fonction* $s(x)$ *qui réalise le minimum de* G *sur* $H^{(k)}(a, b)$ *satisfait les conditions suivantes*:

1. *elle est la solution du problème aux limites*:

$$(-1)^k D^{2k} s = \sum_{j=1}^{k-1} a_j^{(j)}(x) - \sum_{(i, j) \in e} \lambda_{ij} \delta_i^{(j)}$$

$$s^{(j)}(a) = s^{(j)}(b) = 0 \qquad (j = k, \ldots, 2k-1)$$

2. *elle a la forme*

$$(s) = \gamma \cdot \varphi(x) + \sum_{(i, j) \in e} \gamma_{ij} \frac{(x - x_i)_+^{2k-1-j}}{(2k-1-j)!}$$

où $\varphi(x) \in H^{(k)}(a, b)$

3. *pour elle, nous avons* $(F, f) = \int_a^b s^{(k)}(x) f^{(k)}(x) dx$, *pour chaque* $f(x) \in H^{(k)}(a, b)$.

Démonstration. Le point 1 se démontre de la même manière que dans le théorème. 3.1. Le point 2 est une conséquence immédiate du point 1. Le point 3 représente la variation de la fonctionnelle G au point $s(x)$.

(Manuscrit reçu le 15 juin 1969)

BIBLIOGRAPHIE

1. J. H. Ahlberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh, *The. Theory of Splines and their Applications.* Academic Press, 1967.
2. I. J. Schoenberg, *On the Ahlberg-Nilson Extension of Spline Interpolation. The g-Splines and Their Optimal Properties.* „Journ. of Math, analysis and Appl.", **21**, 207–231 (1968).
3. S. L. Sobolev, *Quelques applications d'analyse fonctionnelle à la physique-mathématique.* Univ. de Leningrad, 1950.

O PROPRIETATE DE MINIM A FUNCŢIILOR „SPLINE"

(Rezumat)

În prima parte a lucrării se demonstrează că funcţionala (2,1) are un minim absolut pe clasa funcţiilor $H^{(k)}(a, b)$ ori de cîte ori F este o funcţională dată pe $H^{(k)}(a,b)$ continuă şi care satisface condiţiile $(F, x^h)=0$, $h = 0, \ldots, k - 1$. În continuare se demonstrează că orice funcţie „spline" interpolatoare este soluţia problemei variaţionale pentru F avînd forma (3,3). De asemenea se precizează clasa de funcţionare F pentru care problema variaţională ne furnizează funcţiile „mono-spline". În sfîrşit, se demonstrează şi unele proprietăţi de bază ale funcţiilor „spline".

ОДНО СВОЙСТВО МИНИМУМА „SPLINE" ФУНКЦИЙ

(Резюме)

В первой части работы доказывается, что функционал (2,1) имеет абсолютный минимум в классе функций $H^{(k)}(a,b)$ каждый раз, когда F является данным функционалом на $H^{(k)}(a,b)$, непрерывным и удовлетворяющим условиям $(F, x^h) = 0$, $h=0, \ldots, k-1$. В дальнейшем доказывается, что любая интерполирующая „spline" функция является решением вариационной задачи для F, имеющей форму (3,3). Уточняется также класс функционалов F, для которого вариационная задача даёт нам „mono-spline" функции. Наконец, доказываются и некоторые основные свойства „spline" функций.

ERROR BOUNDS IN THE NUMERICAL INTEGRATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS

by

E. SCHECHTER

In an earlier paper [2] we have developed a method of estimating the error in numerical integration of ordinary differential equations, which needs no information about the exact solution. This was done by continuing the numerical discrete solution. Now we discuss the same problem for partial differential equations.

1. To begin with, we consider some simple asymptotic properties of interpolation polynominals.

Given the values $f_0^{(k)}$, $f_0^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, p$, then the Hermite interpolation polynomial $Q(x)$ for which:

$$Q^{(k)}(x_0) = f_0^{(k)}, \quad Q^{(k)}(x_1) = f^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, p,$$

is:

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{p} A_{0k}(x) f_0^{(k)} + \sum_{k=0}^{p} A_{1k}(x) f_1^{(k)}, \tag{1}$$

where:

$$A_{0k}(x) = \left[\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right]^{p+1} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \sum_{i=0}^{p-k} C_{r+i}^i \left[\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right]^i$$

$$A_{1k}(x) = \left[\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right]^{p+1} \frac{(x - x_0)^k}{k!} \sum_{i=0}^{p-k} C_{r+i}^i \left[\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right]^i.$$

By differentiation (1) becomes,

$$Q^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^{p} A_{0k}^{(r)}(x) f_0^{(k)} + \sum_{k=0}^{p} A_{1k}^{(r)}(x) f_1^{(k)}, \quad r = 0, 1, \ldots, p. \tag{2}$$

LEMMA 1. *Suppose that* $|f_i^{(k)}| \leq Ch^{\alpha-k+r}$, $i = 0, 1, k = 0, 1, \ldots, p$. Then

$$|Q^{(r)}(x)| \leq Ch^{\alpha} \text{ for } r = 0, 1, \ldots, p, \; x_0 \leq x \leq x_1 \tag{3}$$

where $h = x_1 - x_0$, *and* C *constants independent of* h.

Proof. From the expressions of $A_{ik}(x)$ we have by direct computation:

$$\left|\frac{d^r A_{jk}(x)}{dx^r}\right| \leq Ch^{k-r}; \quad x \in [x_0, x_1]$$

$j = 0, 1, k = 0, 1, \ldots, p$, and C is a constant independent of h. Thus, our assertion follows from (2).

In the sequel we need similar considerations on the Lagrange polynomials.

LEMMA 2. *Let $P(x)$ be the Lagrange polynominal of degree $\leq p$ such that: $P(x_i) = f_i$, $i = 0, 1, \ldots, p$, where, $x_i = x_0 + ih$.*

Suppose $|f_i| \leq Ch^\alpha$, $i = 0, 1, \ldots, p$.

Then,

$$\left|\frac{d^r P(x)}{dx^r}\right| \leq Ch^{\alpha-r} \text{ for } x \in [x_0, x_1] \text{ and } r = 0, 1, \ldots, p.$$

Proof. $P(x)$ can be written in the form:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{p} l_i(x) f_i.$$

From the expression of $l_i(x)$, it is clear that:

$$\left|\frac{d^r l_i(x)}{dx^r}\right| \leq Ch^{-r} \text{ for } x \in [x_0, x_1] \text{ and } C \text{ independent of h.}$$

Taking into account these inequalities we find the desired result.

Observe that the mesh must not be equidistant, it is enough that, $max(x_i - x_{i-1})/min(x_i - x_{i-1})$ be uniformly bounded [2].

2. We now define an operator which assigns to each discrete function defined on a mesh, a sufficiently smooth spline by slightly modifiyng the procedure of [1].

Take again an equidistant mesh Δ_h; $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, N$, and put $x_0 = a$, $x_N = b$. Consider the linear normed space l_N of functions defined on Δ_h, with the norm: $\|\tilde{\psi}\| = \max|\tilde{\psi}(x_i)|$. In $C^p[a, b]$ we consider $\|\psi\| = \max\limits_{k, [a, b]} |\psi^{(k)}(x)|$.

Now, we construct an operator L

$$L : l_N \to C^p[a, b],$$

in the following way:

Let $P_i(x)$, $i = 0, 1, \ldots, N - p$, denote the Lagrange polynomials of interpolation of degree p which satisfay:

$$P_i(x_j) = \psi(x_j), \quad j = i, i + 1, \ldots, i + p.$$

Set $P_i(x) = P_{N-p}$ for $i = N - p + 1, \ldots, N$.

By means of these polynomials, we define a set of Hermite interpolating polynomials (of degree $\leq 2p + 1$), $Q_i(x)$ $i = 0, 1, \ldots, N - 1$, such that:

$$\frac{d^k Q_i(x_i)}{dx^k} = \frac{d^k P_i(x_i)}{dx^k}; \quad \frac{d^k Q_i(x_{i+1})}{dx^k} = \frac{d^k P_{i+1}(x_{i+1})}{dx^k},$$

$k = 0, 1, \ldots, p.$

Thus by putting $\psi(x) = Q_i(x)$, $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \ldots, N$, we have constructed a function belonging to $C^p[a, b]$ and the operator L:

$$\psi = L\widetilde{\psi}.$$

THEOREM 1. $||L|| \leq Ch^{-p}$.

Proof. By Lemma 2 since $|f_i| \leq 1$,

$$\left|\frac{d^k P(x)}{dx^k}\right| \leq Ch^{-k}.$$

Hence according to (3): $|Q^{(r)}(x)| \leq Ch^{-r}$, $r = 0, 1, \ldots, p$.

This proves the theorem.

Let now, $[a, b] = \bigtimes_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$ and cover this n-dimensional domain with a rectangular grid of parameter $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$; Δ_h. Consider the linear space of functions $\widetilde{\psi}(x)$, where $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, defined on Δ_h, with the norm:

$$||\widetilde{\psi}|| = \max_{\Delta_h} |\widetilde{\psi}(x)|.$$

In $C^p[a, b]$, $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n]$, take:

$$||\psi(x)|| = \max_{\substack{[a, b]\\ k_i < p_i}} |D^k \psi(x)|.$$

With the aid of the one-dimensional operators:

$$L_i : l_{N_i} \to C^{p_i}[a_i, b_i], \quad N_i = \frac{b_i - a_i}{h_i},$$

define:

$$L : l_N \to C^p[a, b]$$

by the formula:

$$L = L_n L_{n-1} \ldots L_1.$$

Remark 1. Theorem 1 holds for this operator too, if h^{-p} denotes:

$$h_1^{-p_1} \cdot h_2^{-p_2} \ldots h_n^{-p_n}.$$

Indeed, if $||\widetilde{\psi}(\tilde{x})|| = 1$, by Theorem 1 $||L_1\widetilde{\psi}|| \leq Ch_1^{-p_1}$, it follows then, that $||L_2L_1|| \leq Ch_1^{-p_1}h_2^{-p_2}$, and by induction, that: $||L|| \leq Ch^{-p}$.

Remark 2. If $\psi(x)$ is considered to belong to $C^k[a, b]$ with $k_i < p_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, only, then:

$$||L|| \leq Ch^{-k}.$$

In much the same way as Satz 2 of [1, Anhang] one proves:

THEOREM 2. If $\psi(x) \in C^p[a,b]$, where $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *and* $\tilde{\psi}(x)$ *is given on* Δ_h, *then for* $k_i \leqq q_i \leqq p_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$:

$$|D^k(\psi(x) - L\tilde{\psi}(x))| \leqq Ch^{q-k} \max_{|q|, [a,b]} |D^q\psi(x)|,$$

C being a constant independent of h.
As above h^{q-k} stands for $h_1^{p_1-k_1} \ldots h_n^{q_n-k_n}$.

Remark 3. It is clear that the above results hold for a domain which is the union of a finite number of parallelopipeds, covered by a mesh with constant step $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$, Obviously the width of this domain in each direction Ox_i must exceed ph_i.

Remark 4. Note that $L\tilde{\psi}(x)$ is a spline function, namely a $H^{(p)}$-picewise polynomial function [3]. If we had known, not only the values of ψ on Δ_h, but the values of its derivatives, too, we should have used the $H(p)$ interpolate of ψ.
Our disscussion shows that the operator which assigns to $\tilde{\psi}$ its $H^{(p)}$-interpolate, has its norm bounded by Ch^{-p}. This is readily seen if instead of the values of $P^{(k)}(x)$, we take the exact values of $\psi^{(k)}$ on Δ_h. However when the values of the function only, are known, one has to use polynomial splines [3]. As far as we know the equiboundedness of the defining matrices is proved only for cubic (and periodic) splines. In these cases too, the results are not proved for the derivatives.

3. In [2] we have described a scheme of estimating errors for systems of ordinary differential equations of the first order. In the same manner one can use the one-dimensional operator defined in the previous section, L.

If however we have to solve numerically on $[a,b]$ the Cauchy problem for an equation of the n-th order:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \; y^{(i)}_{(a)} = y^i_a, \; i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

we can make use of the $H^{(n)}$-piecewise polynomial functions.

Indeed, let Δ_h be a mesh which covers $[a, b]$. Denote by $H_\Delta(x)$ the piecewise polynomial interpolate constructed with the aid of the values yielded by a numerical process P.

THEOREM 3. *Suppose that on a domain D, of the n + l-dimensional space, the projection of which on Ox contains* $[a, b]$, *f satisfies the Lipschitz condition*:

$$|f(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) - f(x, \overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \ldots, \overline{Y}_n)| \leqq L \sum_{i=1}^{n} |Y_i - \overline{Y}_i|, \; L \geqq 1.$$

Let $\eta(h)$ *and* $\varepsilon(h)$ *be constants such that*:

$$|H^{(n)}_\Delta(x) - f(x, H(x), \ldots, H^{(n-1)}(x))| \leqq \eta(h)$$
$$|y^i_a - y^i_0| \leqq \varepsilon(h), \qquad i = 0, 1, \ldots, n-1.,$$

where y^i_0 *are approximate values on* $x_0 = a$.

Under these assumptions:

$$|y^{(i)}(x) - H^{(i)}_\Delta(x)| \leqq \frac{\eta(h)}{L}(e^{Lx} - 1) + \varepsilon(h)e^{Lx}.$$

The proof imediately follows from [3, Theorem 24.2].

THEOREM 4. *Suppose that the order of convergence of the numerical process P is $n+1$.*

Let the solution $y(x)$ of (4) belong to $C^{n+1}[a, b]$. Then,

$$|y^{(i)}(x) - H^{(i)}(x)| = O(h^{1/2}),\ i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Proof. Denote ny $\mathcal{H}_\Delta$ the piecewise polynomial spline interpolating the exact solution $y(x)$. Hence

$$|H_\Delta^{(n)}(x) - f(x, H_\Delta(x), \ldots, H_\Delta^{(n-1)}(x)| \leqq |H_\Delta^{(n)}(x) - \mathcal{H}_\Delta^{(n)}(x)| +$$

$$+ L\sum_{i=0}^{n-1} |H_\Delta^{(i)}(x) - \mathcal{H}_\Delta^{(i)}(x)| + |\mathcal{H}_\Delta^{(n)}(x) - y^{(n)}(x)| + L\sum_{i=0}^{n-1} |\mathcal{H}_\Delta^{(i)}(x) - y^{(i)}(x)|. \quad (5)$$

Because the order of convergence is $n+1$, i.e.:

$$|y^{(i)}(x_j) - y_j^i| \leqq Ch^{n-i+1}, \text{ on } \Delta_h, \text{ for } i = 0, 1, \ldots, n-1,$$

it follows from Theorem 1 and Remark 4, that the first two terms in (5), (of the right-hand side) are $O(h)$. The other two are $O(h^{1/2})$. Thus, our assertion follows from Theorem 3.

Note that if $L^2[a, b]$ norms are used, the order is $O(h)$ [3].

4. Turning next to partial differential equations let us consider the parabolic system [5]:

$$u_t = f^i(t, x, u, u_x^i, u_{xx}^i),\ i = 1, 2, \ldots, m, \quad (6)$$

where f^i are defined on $R = (O, T) \times G$, G being on open domain bounded in $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ and unbounded in the remaining variables. Here

$$u(t,x) = (u^1(t, x), u^2(t, x), \ldots, u^n(r, x)),\ u^i = (u_{x_1}^i, u_{x_2}^i, \ldots, u_{x_n}^i),$$

$$u_{xx}^i = (u_{x_1x_1}^i, u_{x_1x_2}^i, \ldots u_{x_nx_n}^i),\ i = 1, 2, \ldots, m.\ (u_{x_ix_j} = u_{x_jx_i}).$$

THEOREM 5. (*see* [4, *Théorème* 2.1]). *Suppose that the solution u and the function v belong to $C^1[\overline{R}]$ and posseses second order partial derivatives with regard to x, which are continuous on G.*

Assume that,

$$|v_t^i - f(t, x, v, v_x^i, v_{xx}^i)| \leqq \eta,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

$$|u^i(0, x) - v^i(0, x)| \leqq \varepsilon \text{ for } x \in \overline{G};\ |u^i(t, x)| - v^i(t, x)| \leqq \varepsilon, \text{ for } 0 < t < T,\ x \in \partial G.$$

Let f^i satisfy a Lipschitz condition in u, with the constant L.

Under these assumptions:

$$|u^i(t, x) - v^i(t, x)| \leqq \frac{\eta}{L}(e^{Lt} - 1) + \varepsilon e^{Lt}, \text{ in } R,\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Suppose now that G is a parallelopiped and cover it with a mesh of size k in the Ot-direction an $h_i = h$ in the directions Ox_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Assume that $k = Ch^{-\rho}$, $\rho > 0$. Denote by $\widetilde{\psi}(x)$ a mesh function on Δ, computed by means of a numerical method P, to solve (6).

THEOREM 6. *Let the numerical process P have the order of convergence $q = (q_0, q_1, \dots q_n)$.*

Assume that solution $u(x,t)$ belongs to $C^q[R]$.

Suppose that f^i satisfy a Lipschitz conditions in u. Then,

$$|u(t, x) - L\tilde{\psi}(t, x)| = 0\,(h^{q-k}), \qquad k_0 = 1,\ k_1 = k_2 = \dots = k_n = 2,$$

and $p_i \geqq q_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. (p occurs in the construction of L).

Proof. Denote by $\tilde{\varphi}$ the discrete function which equals the restriction of u on Δ. Set $\varphi = L\tilde{\varphi}$, $v = L\tilde{\psi}$. Then,

$$|v_t^i - f^i(t, x, v, v_x^i, v_{xx}^i)| \leqq |(v^i - \varphi^i)_t| + L\left\{\sum_{j=1}^{m} |v^j - \varphi^j| + \sum_{j=1}^{n}\left[|(v^i - \varphi^i)_{x_j}| + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{k=1}^{n} |(v^i - \varphi^i)_{x_j x_k}|\right]\right\} + |(\varphi^i - u^i)_t| +$$
$$+ L\left\{\sum_{j=1}^{m} |\varphi^j - u^j| + \sum_{j=1}^{n}\left[|(\varphi^i - u^i)_{x_j}| + \sum_{k=1}^{n} |(\varphi^i - u^i)_{x_j x_k}|\right]\right\}.$$

Now by Remark 2 Theorem 2 and 5 our result is proved.

Remark 5. If $q > k$, the continuation $L\tilde{\psi}$, preserves the convergence of the method.

Remark 6. According to Remark 3 the theorem holds true if G is a finite union of parallelopipeds.

Moreover, if G is a bounded domain with a sufficiently regular frontier, then it can be approximated by a domain $\tilde{G}$ of the above type. The theorem is valid on G if boundary conditions are "transported" form to $\partial\tilde{G}$, with sufficient accuracy.

(Received June 17, 1969)

REFERENCES

1. Rjabenki, V.S., A. F. Filippow, Über die Stabilität von Differenzengleichungen „Deutscher Verlag de Wissenschaften", Berlin, 1960.
2. Schechter E., *Error Estimation by Means of Differential Inequalities* „Mathematica", **6**(29), 1, 1964, pp. 117–128.
3. Schultz M. H., R. S. Varga, *L–splines.* „Numerische Mathematik" **10**, 1967, pp. 345–369.
4. Szarski J., *Sur la limitation et l'unicité des solutions d'un système non-linéaire d'équations paraboliques aux dérivées partielles du second ordre.* „Annales Polonoci Mathematici", **II**, 2, (1955), 237–249.
5. Szarski J., *Differential Inequalities* „Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1965.

DELIMITAREA ERORILOR ÎN ÎNTEGRAREA NUMERICĂ A ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE

(Rezumat)

În [2] am dat o metodă de delimitatre a erorilor pentru ecuații diferențiale ordinare, în care nu se cer informații asupra soluției exacte. În lucrarea de față dăm un procedeu care permite extinderea acestor rezultate la unele ecuații cu derivate parțiale.

În acest scop se construiește un operator L de prelungire a soluției discrete ψ dată pe rețeaua de noduri Δ_h. Funcția $L\widetilde{\psi}$ este o funcție de tip „spline" și se construiește cu ajutorul polinoamelor de interpolare pe un interval $[a, b]$. Pentru cazul multidimensional se aplică acest operator fiecărei variabile.

Delimitarea căutată este dată de teorema 5 în care se ia $v = L\widetilde{\psi}$, η și fiind cunoscute ; teorema 6 descrie influența operatorului de prelungire asupra ordinului de convergență.

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ В ЧИСЛОВОМ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Резюме)

В [2] автор дал метод оценки погрешностей для обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых не требуются сведения о точном решении. В настоящей работе даётся способ, позволяющий распространение этих результатов на некоторые уравнения с частными производными.

С этой целью строится оператор L продолжения дискретного решения $\widetilde{\psi}$, данного на сети узлов Δ_h. Функция $\widetilde{\psi}$ является функцией типа „spline" и строится с помощью интерполяционных многочленов на промежутке [a,b]. Для многомерного случая применяется этот оператор к каждому переменному.

Искомая оценка дана теоремой 5, в которой берётся $v = \widetilde{L\psi}$, η и ε будучи известны. Теорема 6 описывает влияние оператора продолжения на порядок сходимости.

RELAȚII DE RECURENȚĂ PENTRU MOMENTELE CENTRATE ALE UNOR LEGI DISCRETE DE PROBABILITĂȚI

de

D. D. STANCU

În lucrarea [9] ne-am ocupat de calculul momentelor ordinare ale unei variabile aleatoare X cu repartiția lui Markov-Pólya [4], [6]:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \frac{a(a+c)\ldots(a+\overline{k-1}c)b(b+c)\ldots(b+\overline{n-k-1}c)}{(a+b)(a+b+c)\ldots(a+b+\overline{n-1}c)}, \tag{1}$$

unde k ia valori întregi de la 0 la n, a și b sînt numere naturale, iar c este un număr întreg, care, în cazul că este negativ trebuie să avem satisfăcute condițiile

$$\max\left\{0,\ n - 1 + \frac{b-1}{c}\right\} \leqq k \leqq \min\left\{n,\ 1 + \frac{1-a}{c}\right\},$$

pentru a avea: $a + (k-1)c \geqq 1$, $b + (n-k-1)c \geqq 1$.

Introducînd notațiile

$$\frac{a}{a+b} = p, \quad \frac{b}{a+b} = q, \quad \frac{c}{a+b} = s, \tag{2}$$

am stabilit următoarea expresie explicită, cu ajutorul diferențelor lui zero, pentru momentul ordinar de ordinul r al lui X:

$$\nu_r = \sum_{j=1}^{r} \binom{n}{j} \frac{p(p+s)\ldots(p+\overline{j-1}s)}{(1+s)(1+2s)\ldots(1+\overline{j-1}s)} \Delta^j O, \tag{3}$$

unde $r = 1, 2, \ldots$ ($\nu_0 = 1$). Aceste momente le-am exprimat de asemenea și cu ajutorul numerelor lui Stirling de speța a doua. Ca un caz limită am dedus și formulele corespunzătoare pentru momentul de ordinul r al repartiției binominale cu exponent negativ.

În lucrarea [8] a lui T. Sródka a fost dată o relație de recurență pentru momentele ordinare ale repartiției (1).

Dacă se consideră momentul centrat de ordinul r

$$\mu_r = E(X - \nu_1)^r$$

se poate observa imediat că acesta se exprimă cu ajutorul momentelor ordinare prin formula

$$\mu_r = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j \binom{r}{j} \nu_1^j \nu_{r-j}.$$

Dar e de preferat ca şi în cazul repartiţiei lui Markov-Pólya, după cum s-a procedat şi în cazul altor repartiţii discrete, să se stabilească relaţii de recurenţă care să permită obţinerea din aproape în aproape a momentelor centrate corespunzătoare.

Vom dovedi că are loc

TEOREMA 1. *Momentele centrate* μ_k *ale repartiţiei lui* Markov-Pólya *satisfac următoarea relaţie de recurenţă*

$$\mu_{r+1} = \frac{1}{1+sr}\left\{ n(ns+1)pq \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \mu_j - \sum_{j=0}^{r-1} \left[s\binom{r}{j-1} + (ns(p-q)+p)\binom{r}{j} \right] \mu_{j+1} \right\}, \tag{4}$$

unde $r \geq 1$ $(\mu_0 = 1;\ \mu_1 = 0)$.

Demonstraţie. Mai întîi să remarcăm că dacă împărţim cu $a+b$ fiecare factor care intervine la numărătorul şi numitorul fracţiei de la (1) şi folosim notaţiile (2), obţinem

$$P(X=k) = P_n(k;\ p,\ q,\ s) = \binom{n}{k} \frac{p(p+s)\ldots(p+\overline{k-1}s)q(q+s)\ldots(q+\overline{n-k-1}s)}{(1+s)(1+2s)\ldots(1+\overline{n-1}s)}. \tag{1'}$$

Avînd în vedere că din (3) rezultă imediat $\nu_1 = np$, constatăm că funcţia generatoare a momentelor centrate μ_k este următoarea

$$h(t) = E(e^{t(X-np)}) = \sum_{k=0}^{n} e^{t(k-np)} P_n(k;\ p,\ q,\ s). \tag{5}$$

Dacă folosim dezvoltarea în serie

$$e^{t(k-np)} = \sum_{r=0}^{\infty} (k-np)^r \frac{t^r}{r!}$$

rezultă că putem scrie

$$h(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu_r \frac{t^r}{r!}, \tag{6}$$

unde

$$\mu_r = \mu_r(n;\ p,\ q,\ s) = E(X-np)^r$$

este momentul centrat de ordinul r al distribuţiei lui Markov-Pólya.

Pentru a stabili relaţia de recurenţă (4) vom face uz de o metodă a lui K. Pearson [5], folosită în cazul repartiţiei hipergeometrice.

În acest scop să considerăm seria hipergeometrică

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ y) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma} \cdot \frac{y}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{y^2}{2!} + \ldots,$$

care, în cazul că folosim notaţia obişnuită pentru factorialul generalizat

$$A^{[m]} = A(A-1)\ \ldots\ (A-m+1) \quad (A^{[0]} = 1),$$

se poate scrie astfel

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma\ ;\ y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha+k-1)^{[k]}(\beta+k-1)^{[k]}}{(\gamma+k-1)^{[k]}} \cdot \frac{y^k}{k\,!}. \tag{7}$$

Presupunînd că $s \neq 0$, deci $c \neq 0$, dacă înlocuim aici

$$\alpha = -n,\ \beta = \frac{p}{s},\ \gamma = 1 - n - \frac{q}{s},\ y = e^t, \tag{8}$$

ţinînd seama că

$$(-n+k-1)^{[k]} = (-1)^k n(n-1)\ \ldots\ (n-k+1),$$

$$\left(\frac{p}{s}+k-1\right)^{[k]} = \frac{1}{s^k} p(p+s)\ \ldots\ (p+\overline{k-1}s),$$

$$\left(1-n-\frac{q}{s}+k-1\right)^{[k]} = \frac{(-1)^k}{s^k}(q+\overline{n-k}s)(q+\overline{n-k+1}s)\ \ldots\ (q+\overline{n-1}s),$$

obţinem

$$F\left(-n,\ \frac{p}{s},\ 1-n-\frac{q}{s}\ ;\ e^t\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{p(p+s)\ \ldots\ (p+\overline{k-1}s)\ e^{kt}}{(q+\overline{n-k}s)\ (q+\overline{n-k+1}s)\ \ldots\ (q+\overline{n-1}s)},$$

deoarece α avînd o valoare întreagă negativă, din seria (7) dispar toţi termenii care urmează după al $n+1$-lea.

Se observă că putem scrie

$$F_1\left(-n,\ \frac{p}{s},\ 1-n-\frac{q}{s}\ ;\ e^t\right) = \frac{\left(\frac{q}{s}+n-1\right)^{[n]}}{\left(\frac{1}{s}+n-1\right)^{[n]}} F\left(-n,\ \frac{p}{s},\ 1-n-\frac{q}{s}\ ;\ e^t\right) = \tag{9}$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{p(p+s)\ \ldots\ (p+\overline{k-1}s)q(q+s)\ \ldots\ (q+\overline{n-k-1}s)}{(1+s)(1+2s)\ \ldots\ (1+\overline{n-1}s)}\ e^{kt} = h(t)\ e^{npt},$$

în conformitate cu (5).

În consecinţă putem scrie

$$h(t) = e^{-npt}F_1\left(-n,\ \frac{p}{s},\ 1-n-\frac{q}{s}\ ;\ e^t\right).$$

Avînd în vedere că dacă introducem operatorul $\mathcal{E}$ al lui Pearson [5], în baza căruia avem $\mathcal{E}\mu_r = \mu_{r+1}$ şi în general $\mathcal{E}^j\mu_r = \mathcal{E}(\mathcal{E}^{j-1}\mu_r) = \mu_{r+j}$, iar $\mathcal{E}^0\mu_r = \mu_r$, dezvoltarea de la (6) se poate scrie sub forma: $h(t) = e^{t\mathcal{E}}\mu_0$, rezultă relaţia

$$e^{t(np+\mathcal{E})}\mu_0 = F_1\left(-n,\ \frac{p}{s},\ 1-n-\frac{q}{s}\ ;\ e^t\right), \tag{10}$$

unde, bineînţeles, μ_0 nu se înlocuieşte cu valoarea sa unu pînă nu s-a aplicat operatorul care-l precede.

În continuare să ţinem seama că seria hipergeometrică (7) satisface ecuaţia diferenţială

$$y(1-y)\frac{d^2F}{dy^2}+[\gamma-(\alpha+\beta+1)y]\frac{dF}{dy}-\alpha\beta F=0.$$

Dacă se face schimbarea de variabilă $y=e^t$ aceasta devine

$$(1-e^t)\frac{d^2\Phi}{dt^2}+[\gamma-1-(\alpha+\beta)e^t]\frac{d\Phi}{dt}-\alpha\beta e^t\Phi=0,$$

unde $\Phi=F(\alpha,\ \beta,\ \gamma\,;\ e^t)$.

Înlocuind acum parametrii α, β, şi γ cu valorile de la (8) şi ţinînd seama că F_1 de la (9) se obţine din F prin înmulţirea cu o constantă, ajungem la concluzia că F_1 verifică următoarea ecuaţie diferenţială

$$s(1-e^t)\frac{d^2F_1}{dt^2}-[q+ns+(p-ns)e^t]\frac{dF_1}{dt}+npe^tF_1=0,$$

care va fi util s-o folosim scrisă sub forma

$$(1-e^t)\left[s\frac{d^2F_1}{dt^2}+(p-ns)\frac{dF_1}{dt}-npF_1\right]=\frac{dF_1}{dt}-npF_1.$$

Avînd în vedere formula (10) obţinem imediat de aici relaţia

$$(1-e^t)[s(np+\mathcal{E})^2e^{t(np+\mathcal{E})}\mu_0+(p-ns)(np+\mathcal{E})e^{t(np+\mathcal{E})}\mu_0-npe^{t(np+\mathcal{E})}\mu_0]=e^{t(np+\mathcal{E})}\mu_1.$$

Rezultă că putem scrie egalitatea

$$(1-e^t)[s\mathcal{E}^2+(p+(p-q)ns)\mathcal{E}-npq(ns+1)]e^{t\mathcal{E}}\mu_0=e^{t\mathcal{E}}\mu_1$$

şi apoi

$$(1-e^t)e^{t\mathcal{E}}[s\mu_2+(p+(p-q)ns)\mu_1-n(ns+1)pq\mu_0]=e^{t\mathcal{E}}\mu_1.$$

Evident, aici nu e permis să înlocuim $\mu_0=1$ şi $\mu_1=0$ decît după ce s-a aplicat operatorul $e^{t\mathcal{E}}$.

Dacă se efectuează dezvoltările în serie avem

$$\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{t^j}{j!}\right)\left[s\sum_{j=0}^{\infty}\mu_{j+2}\frac{t^j}{j!}+(p+(p-q)ns)\sum_{j=0}^{\infty}\mu_{j+1}\frac{t^j}{j!}-\right.$$
$$\left.-n(ns+1)pq\sum_{j=0}^{\infty}\mu_j\frac{t^j}{j!}\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\mu_{j+1}\frac{t^j}{j!}.$$

Egalînd coeficienţii lui t^r din cei doi membri ai acestei egalităţi, obţinem

$$-s\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\mu_{i+2}}{i!(r-i)!}-(p+(p-q)ns)\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\mu_{i+1}}{i!(r-i)!}+n(ns+1)pq\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\mu_i}{i!(r-i)!}=\frac{\mu_{r+1}}{r!}$$

Înmulţind cu $r!$ şi rezolvînd în raport cu μ_{r+1}, ţinînd seama că

$$\sum_{i=0}^{r-2} \binom{r}{i} \mu_{i+2} = \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j-1} \mu_{j+1},$$

obţinem tocmai relaţia de recurenţă (4) pe care voiam s-o demonstrăm.

Observaţie. Deşi relaţia (4) a fost stabilită în ipoteza că $s \neq 0$, deci $c \neq 0$, avînd în vedere că în cazul repartiţiei binomiale utilizînd funcţia caracteristică se obţine (a se vedea, de ex. [3]) relaţia de recurenţă pentru momentele centrate

$$\mu_{r+1} = npq \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \mu_j - p \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \mu_{j+1}, \tag{11}$$

constatăm că, de fapt, relaţia (4) este valabilă şi dacă $s = 0$.

Relativ la formula (11), se poate face remarca că ea rezultă imediat şi dintr-o relaţie de recurenţă dată de S. Bernstein [1] pentru polinoamele

$$S_{r,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n} - x\right)^r \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

care intervin în teoria aproximării prin polinoamele lui Bernstein.

În cazul particular $r = 1$ formula (4) ne conduce imediat la momentul centrat de ordinul doi, adică la dispersia repartiţiei lui Markov-Pólya:

$$\mu_2 = \frac{n(1+ns)pq}{1+s}.$$

Dacă $r = 2$ primim

$$\mu_3 = \frac{1}{1+2s} \{n(1+ns)pq - [s + 2p + 2ns(p-q)]\mu_2\}$$

astfel că avem

$$\mu_3 = \frac{n(1+ns)(1+2sn)pq(q-p)}{(1+s)(1+2s)}.$$

Momentele centrate ale distribuţiei lui Markov-Pólya se pot calcula de asemenea cu ajutorul funcţiei caracteristice corespunzătoare.

Avînd în vedere că probabilitatea $P_n(k; p, q, s)$ se poate reprezenta cu ajutorul funcţiei lui Euler de speţa întîia în felul următor

$$P_n(k; p, q, s) = \binom{n}{k} \frac{B\left(\frac{p}{s} + k, \frac{q}{s} + n - k\right)}{B\left(\frac{p}{s}, \frac{q}{s}\right)}, \tag{12}$$

funcţia caracteristică a variabilei aleatoare $X - np$ va fi

$$\psi_n(t) = E(e^{it(X-np)}) = e^{-inpt}E(e^{itX}) = e^{-inpt} \sum_{k=0}^{n} e^{itk} P_n(k; p, q, s).$$

Ţinînd seama de (12) putem scrie succesiv

$$\psi_n(t) = \frac{e^{-inpt}}{B\left(\frac{p}{s}, \frac{q}{s}\right)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{itk} B\left(\frac{p}{s} + k, \frac{q}{s} + n - k\right) =$$

$$= \frac{e^{-inpt}}{B\left(\frac{p}{s}, \frac{q}{s}\right)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{itk} \int_0^1 x^{\frac{p}{s}+k-1} (1-x)^{\frac{q}{s}+n-k-1} dx =$$

$$= \frac{e^{-inpt}}{B\left(\frac{p}{s}, \frac{q}{s}\right)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 x^{\frac{p}{s}-1} (1-x)^{\frac{q}{s}-1} [e^{itk} x^k (1-x)^{n-k}] dx =$$

$$= \frac{e^{-inpt}}{B\left(\frac{p}{s}, \frac{q}{s}\right)} \int_0^1 x^{\frac{p}{s}-1} (1-x)^{\frac{q}{s}-1} \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (xe^{it})^k (1-x)^{n-k}\right] dx.$$

Avînd în vedere că

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (xe^{it})^k (1-x)^{n-k} = (1 - x + xe^{it})^n,$$

obţinem formula finală

$$\psi_n(t) = \frac{e^{-inpt}}{B\left(\frac{p}{s}, \frac{q}{s}\right)} \int_0^1 x^{\frac{p}{s}-1} (1-x)^{\frac{q}{s}-1} (1 - x + xe^{it})^n dx. \tag{13}$$

Deoarece

$$\psi_n(t) = E(e^{it(X-np)}) = \sum_{r=0}^{\infty} \mu_r \frac{(it)^r}{r!},$$

se observă că momentele centrate ale repartiţiei lui Markov-Pólya se pot afla cu ajutorul funcţiei caracteristice (13), pe baza formulei

$$\mu_r = i^{-r} \psi_n^{(r)}(0).$$

Folosind relaţia de recurenţă (4) se poate stabili o relaţie de recurenţă analoagă şi pentru momentele centrate ale unei variabile aleatoare cu repartiţie binomială cu exponent negativ

$$P(X = k) = \binom{m+k-1}{k} P^m Q^k, \tag{14}$$

unde $0 < P < 1$, $P + Q = 1$, iar k parcurge valorile 0, 1, 2, ...

TEOREMA 2. *Momentele centrate μ_r ale repartiţiei binomiale cu exponent negativ* (14) *verifică următoarea relaţie de recurenţă*

$$\mu_{r+1} = \frac{Q}{P^2}\left[m \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \mu_j + P \sum_{j=0}^{r-1} \binom{r}{j} \mu_{j+1}\right] \tag{15}$$

unde $r \geq 1$ $(\mu_0 = 1,\ \mu_1 = 0)$.

Demonstraţie. Să presupunem că parametrii p, q şi s, care intervin în probabilitatea $P_n(k; p, q, s)$, depind de n în aşa fel încît pentru $n \to \infty$ să avem $p \to 0$, $s \to 0$ şi $np \to \lambda$, $ns \to \frac{Q}{P}$, unde $0 < P < 1$, iar $P + Q = 1$.

Se ştie că în aceste ipoteze (a se vedea [2]) repartiţia lui Markov-Pólya tinde către repartiţia binomială cu exponent negativ (14), unde $m = \lambda P/Q$. Trecînd la limită, relaţia (4) ne conduce la relaţia (15) pentru momentele centrate ale repartiţiei binomiale cu exponent negativ.

Înlocuind succesiv $r = 1, 2, 3$ în (15) aflăm imediat momentele centrate de ordinele 2, 3, 4 ale repartiţiei binomiale cu exponent negativ:

$$\mu_2 = m\frac{Q}{P^2}, \quad \mu_3 = m\frac{Q(Q+1)}{P^3}, \quad \mu_4 = \frac{mQ([P^2 + 3(m+2)Q]}{P^4}.$$

În lucrarea [9] am exprimat momentele ordinare ale repartiţiei (14) cu ajutorul diferenţelor lui zero şi cu numerele lui Stirling de speţa a doua.

Avînd în vedere că dacă $Q \to 0$ şi $m \to \infty$ astfel încît produsul mQ rămîne egal cu o constantă λ, repartiţia (14) tinde (a se vedea [2]) către repartiţia lui Poisson

$$P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

din (15) rezultă următoarea relaţie de recurenţă pentru momentele centrate ale repartiţiei lui Poisson

$$\mu_{r+1} = \lambda \sum_{j=0}^{r-} \binom{r}{j} \mu_j,$$

care este binecunoscută (a se vedea, de ex. [3]).

În încheiere ţinem să subliniem că în lucrarea [7] J. Riordan s-a ocupat de stabilirea, prin metode unitare, a unor relaţii de recurenţă pentru momentele ordinare şi centrate ale repartiţiilor binomială, Poisson şi hipergeometrică. El a regăsit formule cunoscute anterior pentru primele două repartiţii şi a obţinut relaţii de recurenţă noi pentru momentele repartiţiei hipergeometrice.

(Intrat în redacţie la 6 mai 1969)

BIBLIOGRAFIE

1. S. N. Bernstein, *Complément à l'article de E. Voronovskaya «Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein»*. "Dokl. Akad. Nauk SSSR", A, No. 4, pp. 86—92(1932).
2. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*. I. ed. 2-a, New York, John Wiley, 1957.
3. M. G. Kendall — A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*. Vol. I. *Distribution Theory*, (ed. 2-a), London, Ch. Griffin, 1962.
4. A. A. Markov, *O nekotorîh predelnîh formulah iscislenia veroiatnostei*, „Izvestiah Akad. Nauk", Seria VI, **11**, No. 3, pp. 177—186 (1917).
5. K. Pearson, *On the moments of the hypergeometrical series'*, „Biometrika", **16**, pp. 157—162(1924).
6. G. Pólya, *Sur quelques points de la théorie des probabilités*, „Ann. Inst. H. Poincaré", **1**, pp. 117—161 (1930—1931).
7. J. Riordan, *Moment recurrence relations for binomial, Poisson and hypergeometric frequency distributions*, „Ann. Math. Statistics", **8**, No. 2, pp. 103—111 (1937).

8. T. Sródka, *Wzor rekurencyiny na momenty zwykle w rozkladzie Pólyi*, „Roczniki Polskiego Towarzystwa Matematycznego", Seria I, Prace Matematyczne, **8**, p. 217—220 (1964).
9. D.D. Stancu, *On the Markov-Pólya probability distribution*, „Bull. Math. Soc. Sci. Math. R.S.Roumanie", **12** (60), No. 4 (1968).

РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ЦЕНТРАЛЬНЫХ МОМЕНТОВ НЕКОТОРЫХ ДИСКРЕТНЫХ ЗАКОНОВ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(Резюме)

Целью автора является установление рекуррентных соотношений (4) для центральных моментов распределения Маркова-Полья (1). Рассматривая затем предел этого распределения, который приводит к биномиальному распределению с отрицательным показателем (см. [2]), получается также рекуррентное соотношение (15) для центральных моментов распределения (14).

RECURRENCE RELATIONS FOR THE CENTRAL MOMENTS OF SOME DISCRETE PROBABILITY LAWS

(Summary)

The author's object is to establish the recurrence relation (4) for the central moments of the Markov-Pólya distribution (1). Then considering the limiting form of this distribution which yields the negative binomial distribution (see [2]), a recurrence relation (15) is also obtained for the central moments of the distribution (14).

COMBINAŢII LINIARE DE POLINOAME BERNSTEIN ŞI DE OPERATORI MIRAKYAN

de

M. FRENŢIU

Se ştie că polinomul Bernstein

$$B_n(f;\ x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{1}$$

ataşat unei funcţii $f(x)$ continuă pe intervalul [0,1], permite să se aproximeze uniform funcţia pe acest interval. În cazul existenţei derivatei de ordinul doi în punctul x, are loc egalitatea asimptotică

$$B_n(f;\ x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{2n} f''(x) + o\left(\frac{1}{n}\right), \tag{2}$$

datorită lui Voronovskaia [4]; (2) arată că în acest caz ordinul de aproximare a funcţiei $f(x)$ prin polinomul $B_n(f;\ x)$ este $O\left(\frac{1}{n}\right)$. Se vede că, indiferent de existenţa derivatelor de ordin superior ale funcţiei $f(x)$, acest ordin de aproximare nu poate fi îmbunătăţit dacă $f(x)$ nu este un polinom de gradul întîi pe acest interval. Butzer a arătat însă [2], că în cazul existenţei derivatei de ordinul 2r a funcţiei $f(x)$ în punctul x, combinaţia liniară $\mathfrak{L}_n^{[2r-2]}(f;\ x)$ de polinoame Bernstein, definită de relaţiile de recurenţă

$$\mathfrak{L}_n^{[0]}(f;\ x) = B_n(f;\ x)$$

$$(2^k - 1)\, \mathfrak{L}_n^{[2k]}(f;\ x) = 2^k \mathfrak{L}_{2n}^{[2k-2]}(f;\ x) - \mathfrak{L}_n^{[2k-2]}(f;\ x), \tag{3}$$

aproximează pe $f(x)$ mai bine decît polinomul $B_n(f;\ x)$, ordinul de aproximaţie fiind $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. Se observă că gradul polinomului $\mathfrak{L}_n^{2r-2}(f;\ x)$ este $2^{r-1}n$.

În această lucrare se va arăta că există o combinaţie liniară de polinoame Bernstein de grad mai mic decît cea dată de Butzer, care în cazul existenţei derivatei de ordinul 2r a funcţiei f în punctul x, are acelaşi ordin de aproximaţie: $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$. De asemenea vom da o combinaţie similară de operatori Mirakyan care, în cazul existenţei derivatei de ordinul 2r a funcţiei f în punctul x, aproximează pe $f(x)$ mai bine decît operatorul lui Mirakyan

$$M_n(f;\ x) = e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nx)^k}{k\,!} f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{4}$$

ordinul de aproximaţie fiind tot $O\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Considerăm operatorul liniar şi pozitiv

$$L_n(f;\ x) = \sum_k p_{n,k}(x) f\left(\frac{k}{n}\right), \tag{5}$$

unde punctele $\frac{k}{n}$ sînt din intervalul $[a,\ b]$ şi pentru $x \in [a,\ b]$ avem $\sum_k p_{n,k}(x) = 1$.

Să introducem funcţiile

$$S_{n,k}(x) = L_n((t - x)^k;\ x). \tag{6}$$

În această lucrare vom considera acei operatori (5) pentru care funcţiile $S_{n,k}(x)$ se pot reprezenta sub forma

$$S_{n,k}(x) = \frac{a_{k,1}(x)}{n} + \frac{a_{k,2}(x)}{n^2} + \ldots + \frac{a_{k,kp}(x)}{n^{kp}}, \tag{7}$$

unde funcţiile $a_{k,i}(x)$ sînt continue pe intervalul $[a,\ b]$ şi $a_{k,i}(x) = 0$ pentru $i < \left[\frac{k+1}{2}\right]$ (prin $[\alpha]$ se înţelege partea întreagă a numărului α), iar p este un număr natural finit.

Pentru operatorii consideraţi mai sus are loc

LEMA 1. *Dacă funcţia f este mărginită pe intervalul $[a,\ b]$ şi dacă există derivata de ordinul $2r$ a funcţiei f pe punctul x, atunci există constantele $C = C(f)$ şi $C_n = C_n(f;\ x)$ astfel încît*

$$L_n(f;\ x) = f(x) + \sum_{k=1}^{2r} S_{n,k}(x) \frac{f^{(k)}(x)}{k\,!} + \frac{C_n(f;\ x)}{n^r} \tag{8}$$

unde $|C_n(f;\ x)| \leqslant C(f)$.

Metoda de demonstrare a lemei este analogă celei folosite de Bernstein [1] la generalizarea egalităţii (1). Astfel se pleacă de la dezvoltarea

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + \left(\frac{k}{n} - x\right)\frac{f'(x)}{1\,!} + \ldots + \left(\frac{k}{n} - x\right)^{2r}\left[\frac{f^{[2r]}(x)}{(2r)\,!} + \lambda\left(\frac{k}{n}\right)\right],$$

unde $\lambda(y) \to 0$ pentru $y - x \to 0$ şi $|\lambda(y)| \leqslant C_1(f)$ pentru $y \in [a,\ b]$. Înmulţind această egalitate cu $p_{n,k}(x)$ şi însumînd în raport cu k, putem scrie succesiv

$$\left| L_n(f;\ x) - f(x) - \sum_{k=1}^{2r} S_{n,k}(x) \frac{f^{(k)}(x)}{k\,!} \right| = \left| \sum_k \left(\frac{k}{n} - x\right)^{2r} \lambda\left(\frac{k}{n}\right) p_{n,k}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_k \left| \lambda\left(\frac{k}{n}\right) \right| \left(\frac{k}{n} - x\right)^{2r} p_{n,k}(x) \leqslant C_1(f) S_{n,2r}(x) \leqslant \frac{C(f)}{n^r},$$

deoarece funcțiile $S_{n,k}(x)$ sînt mărginite pe intervalul $[a, b]$. Rezultă că va exista o constantă $C_n(f; x)$ depinzînd de n și x, $|C_n(f;x)| \leqslant C(f)$, astfel ca să avem egalitatea

$$L_n(f; x) - f(x) - \sum_{k=1}^{2r} S_{n,k}(x) \frac{f^{(k)}(x)}{k!} = \frac{C_n(f; x)}{n^r},$$

și lema este demonstrată.

Vom considera acum următoarea combinație liniară a operatorilor definiți mai sus

$$\mathfrak{L}_{n,r}(f; x) = \alpha_1 L_n(f; x) + \alpha_2 L_{2n}(f; x) + \ldots + \alpha_r L_{rn}(f; x), \tag{9}$$

unde $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_r = 1$. Fie

$$\mathfrak{S}_{n,k}(x) = \mathfrak{L}_{n,r}((t-x)^k; x) = \sum_{l=1}^{r} \alpha_l S_{ln,k}(x). \tag{10}$$

Vom demonstra următoarea lemă:

LEMA 2. *Dacă funcția f este mărginită pe intervalul $[a, b]$ și dacă există derivata de ordinul $2r$ a funcției f pe punctul x, atunci are loc următoarea egalitate*

$$\mathfrak{L}_{n,k}(f; x) = f(x) + \sum_{k=1}^{2r} \mathfrak{S}_{n,k}(x) \frac{f^{(k)}(x)}{k!} + \frac{C_{n,r}(f; x)}{n^r}, \tag{11}$$

unde $|C_{n,r}(f; x)| \leqslant C_r(f)$.

Afirmația rezultă din (8) și (9) și din faptul că

$$|C_{n,r}(f; x)| = \left|\sum_{l=1}^{r} \alpha_l C_{ln}(f; x)\right| \leqslant \sum_{l=1}^{r} |C_{ln}(f; x)| \cdot |\alpha_l| \leqslant C(f) \cdot \sum_{l=1}^{n} |\alpha_l| = C_r(f).$$

Vom determina acum coeficienții α_i din definiția combinației liniare. Pentru aceasta vom considera sistemul

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_r = 1 \\
&\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 + \frac{1}{3}\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{r}\alpha_r = 0 \\
&\alpha_1 + \frac{1}{2^2}\alpha_2 + \frac{1}{3^2}\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{r^2}\alpha_r = 0 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\alpha_1 + \frac{1}{2^{r-1}}\alpha_2 + \frac{1}{3^{r-1}}\alpha_3 + \ldots + \frac{1}{r^{r-1}}\alpha_r = 0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Are loc

LEMA 3. *Soluțiile sistemului (12) sînt*

$$\alpha_s = \frac{(-1)^{r-s} s^r}{(r-s)!\, s!}, \qquad s = 1, 2, \ldots, r. \tag{13}$$

Pentru demonstraţie este suficient să observăm că determinantul sistemului este un determinant Vandermonde: $D = V\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{r}\right)$. Rezolvînd sistemul (12) obţinem

$$\alpha_s = \frac{1}{D} V\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{s-1}, 0, \frac{1}{s+1}, \ldots, \frac{1}{r}\right), \qquad s = 1, 2, \ldots, r,$$

şi făcînd calculele rezultă (13).

Demonstrăm acum

LEMA 4. *Avem*

$$\mathcal{S}_{n,k}(x) = O\left(\frac{1}{n^r}\right), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \tag{14}$$

Demonstraţie. Ţinînd seama de reprezentarea funcţiilor $S_{n,k}(x)$ şi de ecuaţiile care au determinat coeficienţii α_i, putem scrie

$$\mathcal{S}_{n,k}(x) = \sum_{l=1}^{r} \alpha_l S_{ln,k}(x) = \sum_{l=1}^{r} \alpha_l \sum_{j=1}^{kp} \frac{a_{k,j}(x)}{(ln)^j} = \sum_{j=1}^{kp} \frac{a_{k,j}(x)}{n^j} \sum_{l=1}^{r} \frac{\alpha_l}{l^j} = \sum_{j=r}^{kp} \frac{a_{k,j}(x)}{n^j} \sum_{l=1}^{r} \frac{\alpha_l}{l^j} = O\left(\frac{1}{n^r}\right)$$

Din lemele 2 şi 4 rezultă imediat

TEOREMA 1. *Dacă funcţia f este mărginită pe intervalul $[a, b]$ şi dacă are derivată de ordinul $2r$ pe punctul x, atunci pentru operatorul $\mathcal{L}_{n,r}(f; x)$, definit mai sus, putem scrie relaţia*

$$|\mathcal{L}_{n,r}(f; x) - f(x)| = O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{15}$$

CONSECINŢĂ 1. Dacă funcţia f are derivată de ordinul $2r$ mărginită pe intervalul $[a, b]$, atunci pentru orice $x \in [a, b]$ are loc relaţia (15).

Observaţie. Dacă în loc de intervalul $[a, b]$ considerăm un interval infinit (de exemplu $[0, \infty)$) atunci consecinţa 1 are loc pentru un subinterval finit.

Vom considera acum două cazuri particulare.

1. *Cazul polinoamelor Bernstein*. În cazul cînd

$$L_n(f; x) = B_n(f; x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1 - x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

funcţiile $S_{n,k}(x)$ sînt de forma (7) cu $p = 1$ şi $a_{k,k}(x) = 0$. Rezultă

TEOREMA 2. *Dacă funcţia f este mărginită pe intervalul $[0, 1]$ şi dacă este derivabilă de $2r$ ori pe punctul x atunci pentru polinomul*

$$\mathcal{L}_{n,r}(f; x) = \mathcal{B}_{n,r}(f; x) = \alpha_1 B_n(f; x) + \alpha_2 B_{2n}(f; x) + \ldots + \alpha_r B_{rn}(f; x), \tag{16}$$

are loc relaţia

$$|\mathcal{B}_{n,r}(f; x) - f(x)| = O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{17}$$

De asemenea, din consecinţa 1 rezultă

CONSECINŢA 2. Dacă funcţia f are derivata de ordinul $2r$ mărginită pe intervalul $[0,1]$, atunci pentru orice $x \in [0, 1]$ are loc relaţia (17).

Observăm că polinomul $\mathcal{B}_{n,r}(f;\ x)$ are gradul rn şi aproximează pe $f(x)$ cu acelaşi ordin de aproximare ca şi combinaţia liniară considerată de Butzer.

2. *Cazul operatorilor Mirakyan.* Dacă

$$L_n(f;\ x) = M_n(f;\ x) = e^{-nx}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right),$$

se poate arăta că funcţiile $S_{n,k}(x)$ verifică următoarea relaţie de recurenţă

$$S'_{n,k}(x) = \sum_{l=0}^{k-2}\binom{k}{l}\frac{S_{n,l}(x)}{n^{k-1-l}}. \tag{18}$$

Această relaţie permite să calculăm efectiv funcţiile $S_{n,k}(x)$ ştiind că $S_{n,0}(x) = 1$ şi $S_{n,1}(x) = 0$. Găsim

$$S_{n,2}(x) = \frac{x}{n},\quad S_{n,3}(x) = \frac{x}{n^2},\quad S_{n,4}(x) = \frac{3x^2}{n^2} + \frac{x}{n^3},\quad S_{n,5}(x) = \frac{10x^2}{n^3} + \frac{x}{n^4},$$

$$S_{n,6}(x) = \frac{15x^3}{n^3} + \frac{25x^2}{n^4} + \frac{x}{n^5},\qquad S_{n,7}(x) = \frac{105x^3}{n^4} + \frac{56x^2}{n^5} + \frac{x}{n^6}.$$

Rezultă de asemenea că funcţiile $S_{n,k}(x)$ sînt de forma (7) cu $p = 1$ şi $a_{k,k}(x) = 0$.

În consecinţă teorema 1 şi consecinţa 1 sînt adevărate şi în acest caz, astfel că putem enunţa

TEOREMA 3. *Dacă funcţia f este mărginită pe intervalul $[0, \infty)$ şi dacă f este derivabilă de $2r$ ori pe punctul x, atunci pentru operatorul*

$$\mathcal{L}_{n,r}(f;\ x) = \mathcal{M}_{n,r}(f;\ x) = \alpha_1 M_n(f;\ x) + \alpha_2 M_{2n}(f;\ x) + \ldots + \alpha_r M_{rn}(f;\ x), \tag{19}$$

are loc relaţia

$$|\mathcal{M}_{n,r}(f;\ x) - f(x)| = O\left(\frac{1}{n^r}\right). \tag{20}$$

CONSECINŢA 3. Dacă funcţia f este mărginită pe intervalul $[0, \infty)$ şi dacă f are derivata de ordinul $2r$ mărginită pe intervalul $[0, a]$ atunci pentru orice $x \in [0, a]$ are loc relaţia (20).

(Intrat în redacţie la 18 martie 1969)

BIBLIOGRAFIE

1. S.N. Bernstein, *Completement a l'article de E. Voronovskaia.* „Compte Rendus Acad. Sci. URSS", (1932), 86—92.
2. P.L. Butzer, *Linear combinations of Bernstein polynomials.* „Canadian Journal of Math." (1953), **5**, 559—567.
3. G. Mirakyan, *Approximation des fonctions continues au moyen de polynomes de la forme....* „Dokl. Akad. Nauk, SSSR", (1941), **31**, 201—205
4. E. Voronovskaia, *Determination de la forme asimptotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein.* „Compte Rendus Acad. Sci. URSS", (1932), 79—85.

ЛИНЕЙНЫЕ КОМБИНАЦИИ МНОГОЧЛЕНОВ БЕРНШТЕЙНА И ОПЕРАТОРОВ МИРАКИАНА

(Резюме)

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[0,1]$, то многочлен Бернштейна (1) равномерно аппроксимирует функцию на этом промежутке. В случае, если функция f имеет вторую производную, ограниченную на промежутке $[0,1]$, порядок приближения есть $0\left(\frac{1}{n}\right)$ и вообще его нельзя улучшить, безразлично от существования производных высшего порядка. Буцер рассматривал линейную комбинацию многочленов Бернштейна, которая, в случае если функция f имеет производную порядка 2 r, ограниченную на $[0,1]$, аппроксимирует $f(x)$ лучше, чем многочлен (1), причём порядок приближения является $0\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

В работе даётся линейная комбинация (16) многочленов Бернштейна, имеющая меньшую степень, чем комбинация, данная Буцером, которая аппроксимирует $f(x)$ тем же порядком приближения, если функция $f(x)$ имеет производную порядка 2 r, ограниченную на $[0,1]$. Этот результат распространяется на случай операторов Миракиана (4) и даётся линейная комбинация (19).

COMBINAISONS LINÉAIRES DE POLYNÔMES BERNSTEIN ET D'OPÉRATEURS MIRAKYAN

(Résumé)

Si la fonction $f(x)$ este continue dans l'intervalle $[0, 1]$, le polynôme Bernstein (1) est une approximation uniforme de la fonction dans cet intervalle. Au cas où la fonction f a sa deuxième dérivée bornée dans l'intervalle $[0, 1]$, l'ordre d'approximation est de $0\left(\frac{1}{n}\right)$ et ne peut pas être en général amélioré, qu'il existe ou non des dérivés d'ordre supérieur. Butzer a considéré une combinaison linéaire de polynômes Bernstein, qui, dans le cas où la fonction f a sa dérivée d'ordre 2 r bornée sur $[0, 1]$, donne de $f(x)$ une meilleure approximation que le polynôme (1), l'ordre d'approximation étant de $0\left(\frac{1}{n^r}\right)$.

Le présent travail donne la combinaison linéaire (16) de polynomes Bernstein de degré inférieur à celle donnée par Butzer, qui approche de $f(x)$ avec le même ordre d'approximation, si la fonction $f(x)$ a la dérivée d'ordre 2r bornée sur $[0,1]$. On étend ce résultat au cas des opérateurs de Mirakyan (4), en donnant la combinaison linéaire (19).

CRITERII PENTRU CA O NOMOGRAMĂ CU PUNCTE ALINIATE SĂ AIBĂ EROAREA MINIMĂ

de

S. GROZE şi B. ORBÁN

1. Se consideră o nomogramă N_0 cu puncte aliniate avînd trei scări curbilinii reprezentate într-un reper cartezian ortogonal, prin ecuaţiile

$$\begin{cases} x = x_i(t_i) \\ y = y_i(t_i) \end{cases} t_i = f_i(z_i),\ f_i'(z_i) \geqslant 0 \text{ pentru } z_i' \leqslant z_i \leqslant z_i'',\ i = 1, 2, 3 \qquad (1)$$

Prin eroare generalizată a nomogramei într-un punct $P(z_i^0)$ se înţelege

$$E(P) = \frac{h}{\frac{ds_i}{dz_i}(z_i^0)\psi(z_i^0)},$$

unde h este o constantă — eroarea geometrică —, s_i arcul scării respective, iar $\psi(z)$ o funcţie dată. Pentru $\psi(z) \equiv 1$ se găseşte eroarea absolută, iar pentru $\psi(z) = z$ eroarea relativă a nomogramei în punctul respectiv.

Eroarea generalizată a întregii nomograme este dată de

$$E = \max_i \max_{z_i' \leqslant z_i \leqslant z_i''} E(P). \quad (2)$$

Un punct P al nomogramei îl numim *punct de eroare maximă*, dacă eroarea nomogramei este atinsă în acest punct.

Pentru ca nomograma să fie practic utilizabilă, ea trebuie să fie supusă anumitor transformări în vederea micşorării erorii ei. Deoarece nomograma transformată trebuie să fie o nomogramă pentru aceeaşi ecuaţie, sînt

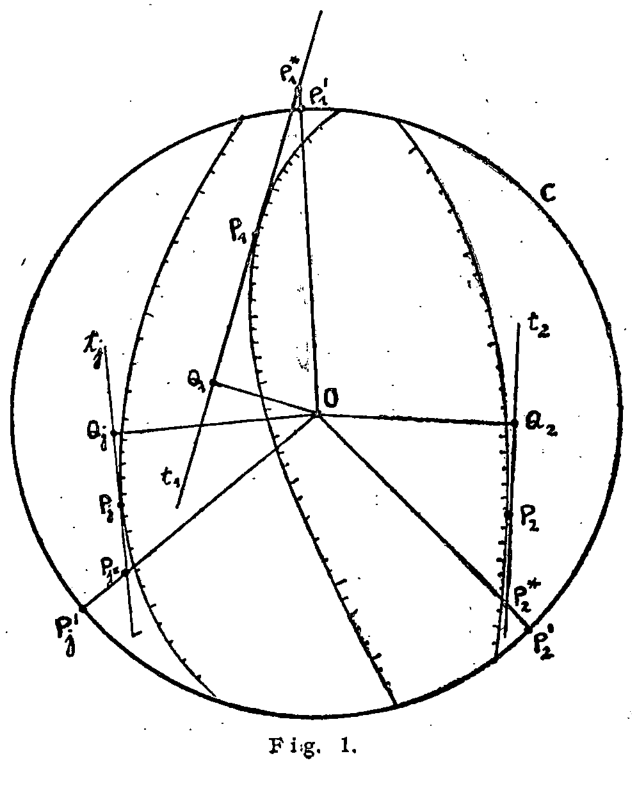

Fig. 1.

admise în general numai transformări proiective, adică coliniaţiile planului. Fiindcă trebuie să micşorăm eroarea nomogramei fără mărirea dimensiunilor ei, problema transformării proiective a unei nomograme în general se pune în felul următor:

Fie $\mathfrak{D}$ un domeniu din plan care conţine nomograma şi K totalitatea coliniaţiilor planului care nu scot nomograma din interiorul lui $\mathfrak{D}$. Numim nomogramă optimă faţă de K nomograma care prin orice coliniaţie din K, se transformă

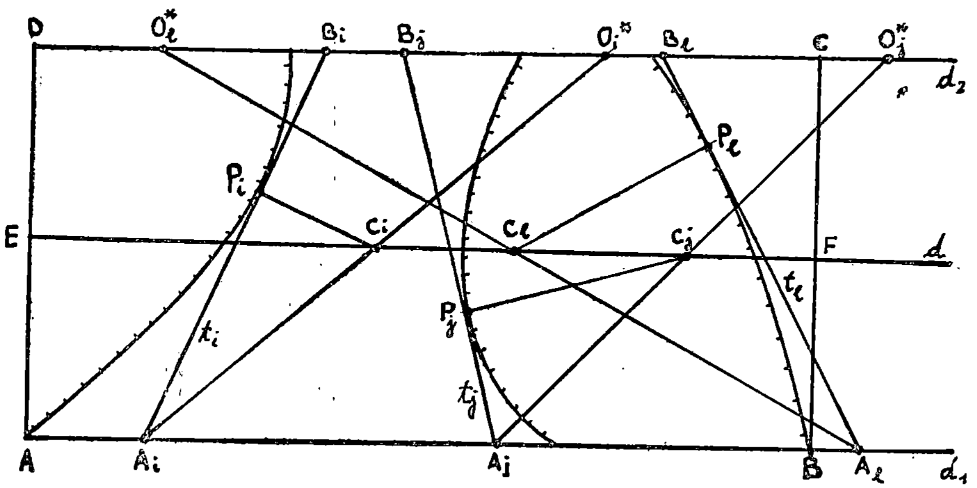

Fig. 2.

într-o nomogramă cu o eroare generalizată mai mare. Nomograma o vom numi relativ optimă faţă de K, dacă ea are eroare minimă faţă de nomogramele transformate prin coliniaţiile din K, vecine cu nomograma iniţială. Se pot pune următoarele probleme:

a) Care este condiţia necesară şi suficientă pentru ca o nomogramă să fie optimă sau relativ optimă faţă de K?

b) Care este transformarea din K care conduce la nomograma optimă?

Pentru o singură scară rectilinie problemele a) şi b) au fost rezolvate în cazuri particulare de M.V. Pentkovski [1], iar în general de către F. Radó în lucrările [2] şi [3]. În lucrările [4], [5], [6], [7], [8] şi [9] problemele de mai sus sînt tratate, dar numai în cazul unor nomograme particulare.

Lucrarea de faţă generalizînd rezultatele găsite în lucrările citate, rezolvă complet problema a) în următoarele două cazuri (cele mai naturale din punct de vedere practic):

I. $\mathfrak{D}$ este domeniul format din punctele interioare ale unui cerc.

II. $\mathfrak{D}$ este domeniul format din punctele interioare ale unui dreptunghi.

2. Fie

$$\begin{aligned} x' &= x_i'(t_i) \\ y' &= y_i'(t_i) \end{aligned} \quad t_i = f_i(z_i), \quad z_i' \leqslant z_i \leqslant z_i'', \quad i = 1, 2, 3$$

ecuaţiile nomogramei transformate printr-o coliniaţie K_0 şi notăm cu s_i' arcele scărilor respective. Coliniaţia K_0 o vom numi dilatantă în punctul de cotă z_i^0 pe scara respectivă, dacă $\frac{ds_i'}{ds_i}(z_i^0) > 1$, iar contractantă în cazul cînd $\frac{ds_i'}{ds_i}(z_i^0) < 1$.

Din definiţie rezultă că o nomogramă este optimă (sau relativ optimă) atunci şi numai atunci, dacă orice coliniaţie din K (sau orice coliniaţie din K vecină transformării identice) este contractantă cel puţin într-un punct de eroare maximă. Deoarece elementul de arc într-un punct al unei curbe se poate înlocui cu elementul de arc al tangentei duse în acel punct la curbă, dacă o coliniaţie este dilatantă (contractantă) într-un punct pe o scară, ea este dilatantă (contractantă) şi pe tangenta dusă în acest punct la suportul scării respective.

Fie P_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ punctele de eroare maximă a nomogramei N_0 şi t_j tangentele în aceste puncte la curbele suport ale scărilor nomogramei. Perechile de elemente (P_j, t_j) le vom numi *perechi caracteristici* ale nomogramei. Atunci problema a) se poate înlocui cu următoarea problemă geometrică:

Cum trebuie să fie situate în plan perechile caracteristice ale nomogramei, astfel ca orice coliniaţie din K (sau orice coliniaţie din K vecină transformării identice) să fie contractantă cel puţin într-un punct de eroare maximă P_j pe tangenta t_j?

3. Rezolvăm problema de mai sus pentru cazul I. Fie C, un cerc care conţine întreaga nomogramă N_0. Considerăm toate coliniaţiile K ale planului, care invariază cercul C şi interiorul lui. Fie $N(K)$ familia de nomograme transformate ale lui N_0 prin coliniaţiile din K.

Vom folosi două teoreme demonstrate în lucrarea [6]:

TEOREMA 1. *Orice coliniaţie care păstrează un cerc este produsul unei rotaţii R cu centrul de rotaţie în centrul cercului şi al unei omologii Ω care invariază cercul dat.*

TEOREMA 2. *Produsul a două omologii Ω' şi Ω'' care păstrează cercul, avînd centrele S' şi S'' în puncte corespondente într-o inversiune în raport cu cercul C, este o simetrie faţă de dreapta $S'S''$.*

Luînd în considerare că rotaţia şi simetria nu modifică eroarea nomografiei, din teoremele de mai sus rezultă că este suficient ca din familia K de coliniaţii să luăm numai omologiile Σ ale planului avînd centrul în interiorul cercului.

Se consideră punctele $P_1, P_2, \ldots, P_n$ interioare cercului C şi prin fiecare cîte o dreaptă $t_1, t_2, \ldots t_n$ (fig. 1). Fiecărei perechi de elemente (P_i, t_j) îi facem să-i corespundă un punct al cercului C în felul următor:

Fie Q proiecţia ortogonală a centrului O pe drepta t_j. Construim segmentul $Q_jP_j^* = 2Q_jP_j$ pe dreapta t_j astfel ca să existe ordonarea Q_j, P_j, P_j^* şi luăm extremitatea P_j' a razei cercului C ce trece prin P_j^* (fig. 1). Punctul P_j' îl vom numi punct asociat perechii (P_j, t_j). În caz particular, cînd P_j este pe cerc, iar t_j tangenta în P_j, punctul lui asociat coincide cu P_j.

În lucrarea [7] a autorilor s-a demonstrat următoarea proprietate a omologiilor care păstrează cercul:

TEOREMA 3. α) *Dacă punctele asociate perechilor de elemente (P_j, t_j) $j = 1, 2, \ldots, n$ împart cercul C în arce de lungime cel mult π, atunci orice omologie din familia Σ care invariază cercul C, va fi contractantă cel puţin într-un punct P_j pe dreapta t_j.*

β) *Dacă pe cercul C există un arc mai mare decît π care nu conţine nici un punct asociat P_j', există o infinitate de omologii din Σ care sînt dilatante în toate punctele P_j' pe dreapta t_j. Centrele acestor omologii formează un domeniu Δ, avînd pe frontieră centrul O al cercului C.*

Folosind aceste trei teoreme, putem rezolva complet problema a) în cazul cercului, adică putem demonstra:

TEOREMA 4. *Fie* (P_j, t_j) *perechi caracteristice ale nomogramei* N_0, *iar* P_j' *punctele lor asociate pe un cerc C care conține nomograma. Condiția necesară și suficientă ca nomograma* N_0 *să fie optimă față de coliniațiile planului care păstrează cercul C este ca punctele* P_j *să împartă cercul C în arce de măsură cel mult* π.

Demonstrație. Din teoremele 1 și 2 rezultă că familia K a coliniațiilor care păstrează cercul C transformînd interiorul lui în el însuși o putem înlocui cu familia Σ a omologiilor care invariază pe C.

Suficiența condiției rezultă direct din teorema 3α. Într-adevăr dacă condiția este îndeplinită, atunci orice omologie Ω din Σ este contractantă cel puțin într-un punct de eroare maximă P_j pe dreapta t_j, care este tangenta la suportul scării respective și astfel Ω este contractantă în punctul P_j de pe scara respectivă. Punctul P_j fiind un punct de eroare maximă, din definiția erorii rezultă că eroarea nomogramei transformate prin Ω în punctul corespondent punctului P_i, va fi mai mare decît eroarea în P_j, deci decît eroarea nomogramei.

Necesitatea condiției se demonstrează cu ajutorul teoremei 3β. Dacă condiția teoremei 4 nu este îndeplinită, atunci există un domeniu Δ astfel încît orice omologie Ω din Σ avînd ca centru $O^* \in \Delta$ va fi dilatantă în toate punctele P_i de eroare maximă pe tangentele t_i, deci și pe scările respective. Astfel eroarea nomogramei transformate $N' \equiv \Omega(N_0)$ în punctele $P_i' \equiv \Omega(P_i)$ va fi mai mică decît eroarea E a nomogramei inițiale N_0. Presupunem acum că eroarea E' a nomogramei transformate N' este atinsă într-un punct $M' \not\equiv P_i'$. Luînd $M \equiv \Omega^{-1}(M')$, evident că $E(M) < E$, unde $E(M)$ este eroarea lui N_0 în punctul M. Alegem în domeniul Δ un șir de puncte $O_1^*, O_2^*, \ldots, O_n^*$ care tinde către centrul O al cercului C(O este pe frontiera domeniului Δ). Nomogramele transformate $N_1', N_2', \ldots, N_n'$ prin omologiile avînd centrele respectiv în punctele $O_1^*, O_2^*, \ldots, O_n^*$, vor tinde evident către o nomogramă N_*', transformata lui N_0 printr-o simetrie față de centrul O. Dar atunci eroarea lui N_*' în fiecare punct este egală cu eroarea nomogramei N_0 în punctul corespunzător. Folosind faptul că omologia este o transformare continuă, se poate arăta ușor că dacă $O^* \to O$, eroarea $E'(M')$ a nomogramei N' în punctul M' tinde uniform spre $E(M)$. Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un δ astfel încît dacă $O^* O < \delta$, atunci $E'(M') - E(M) < \varepsilon$. Alegînd $\varepsilon = E - E(M) < 0$ avem, că $E'(M') < \varepsilon$. Rezultă deci că în acest caz există nomograme transformate ale lui N_0, avînd eroare mai mică decît eroarea lui N_0, deci N_0 este optimă.

Observații. a). Din demonstrația de mai sus rezultă direct unicitatea nomogramei optime față de coliniațiile K, care păstrează cercul.

b) În lucrarea [7] se indică o metodă practică, aproximativă, pentru micșorarea erorii nomogramei avînd două scări pe un cerc și una pe o curbă, cu ajutorul omologiilor. Această metodă se poate aplica și în cazul nomogramei N_0.

4. Să rezolvăm în continuare problema pentru cazul II. Fie dreptunghiul $ABCD$ de dimensiuni minime care conține nomograma N_0 (practic el este determinat de forma hîrtiei pe care este desenată nomograma). Fie $AB \geqslant BC$ și considerăm dreapta EF, unde E și F sînt mijloacele laturilor AD și BC (fig. 2). Presupunem că punctele scărilor extreme ale nomogramei situate pe AD și pe BC sînt chiar A și B sau dacă nu, atunci ele se găsesc pe AE și BF. Pentru ca transformările proiective folosite să nu scoată nomograma din dreptunghiul $ABCD$, dar în același timp interiorul dreptunghiului să fie cît mai rațional folosit, trebuie să presupunem că la coliniațiile utilizate punctele A și B rămîn fixe și că dreapta DC este invariantă. O coliniație între punctele unui plan care admite punctele A și B ca puncte unite, iar dreapta $CD \equiv d_2$ ca dreaptă unită, poate să fie numai o omologie Ω avînd axa dreapta $AB \equiv d_1$ și centrul 0^* situat pe dreapta d_2 (fiindcă

intersecția a două drepte unite d_1 și d_2 este un punct unit, deci pe d_1 avem trei puncte unite, rezultă atunci că toate punctele ei sînt unite, prin urmare coliniația este o omologie).

Totalitatea omologiilor Σ cu centrul 0^* pe dreapta d_2 avînd ca axă dreapta d_1, depind de doi parametri: de parametrul care determină poziția lui 0^* pe d_2 și de caracteristica $k = (0^*, M^*, M, M')$ a omologiei, unde M și M' sînt două puncte corespondente, iar M^* punctul în care dreapta MM' taie axa d_1. Punînd condiția ca regiunea planului dintre dreptele d_1 și d_2 să se transforme în ea însăși, găsim $k > 0$. Omologiile $\Sigma(0^*, k)$ formează un grup. Dacă caracteristica k tinde către 1, omologiile $\Sigma(0^*, k)$ tind spre transformarea identică a planului. Din familia $\Sigma(0^*, k)$ vom considera numai acele omologii Ω, pentru care $k = 1 + \varepsilon$ unde ε este un număr pozitiv mai mic decît un număr ε_0 oricît de mic.

În continuare vom folosi cîteva rezultate găsite în lucrarea [8].

Se consideră segmentele $A_i\ B_i\ i = 1, 2, \ldots, n$ avînd extremitățile A_i situate pe d_1, iar B_i pe d_2 și pe fiecare cîte un punct P_i. Fiecărui punct P_i de pe segmentul A_iB_i îi facem să corespundă pe dreapta d_2 un punct O_i cu ajutorul următoarei construcții: perpendiculara dusă în punctul P_i pe $A_i B_i$ intersectează dreapta $EF \equiv d$ în punctul C_i (fig. 2). Dreapta A_iC_i intersectează pe d_2 în punctul O_i. Vom numi O_i^* *punctul asociat punctului* P_i de pe segmentul A_iB_i. Din această construcție rezultă că dacă $A_i B_i$ este perpendicular pe d_1, un punct P_i al lui care nu coincide cu mijlocul segmentului, nu are punct asociat. Mijlocul segmentului perpendicular are însă toate punctele dreptei d_2 ca puncte asociate. Pentru aceasta vom presupune că dacă $A_iB_i \perp d_1$, atunci P_i să nu coincidă cu mijlocul lui A_iB_i. Două puncte asociate O_j^*, O_h^* ale punctelor P_j, P_h de pe segmentele A_jB_j, A_hB_h le numim de *aceeași speță* dacă cele două segmente sînt la fel înclinate față de dreapta d_1 și de *speță diferită* dacă ele sînt invers înclinate.

În lucrarea [8] s-a demonstrat următoarea teoremă

TEOREMA 5. *Condiția necesară și suficientă pentru ca să nu existe omologii din familia* $\Sigma(0^*, k = 1 \pm \varepsilon)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$, *unde* ε_0 *este un număr oricît de mic, dilatante în toate punctele* P_i *de pe segmentul* A_iB_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, *este ca dintre punctele asociate punctelor* P_i *de pe* A_iB_i *să existe un punct* O_j^* *cuprins între alte două puncte asociate* O_h^*, O_i^*, *astfel ca* O_h^* *și* O_i^* *să fie de aceeași speță,* O_j^* *și* O_h^* *de speță diferită.*

Condiția este și necesară dacă a) între punctele asociate nu există două confundate de speță diferită, b) dintre segmentele A_iB_i *nu există nici unul perpendicular pe* d_1, *pe care punctul* P_i *ar fi mijlocul lui.*

Folosind această teoremă putem rezolva problema a) în cazul dreptunghiului.

Fie $P_i\ i = 1, 2, \ldots, n$ punctele de eroare maximă a nomogramei N_0 și t_i tangentele în ele la supoartele scărilor respective. Tangenta t_i intersectează pe d_1 în A_i, iar pe d_2 în B_i. Construim punctele asociate O_i^* ale punctelor P_i de pe segmentele A_iB_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

TEOREMA 6. *O condiție suficientă pentru ca nomograma* N_0 *să fie relativ optimă față de omologiile* Σ *este ca dintre punctele asociate* O_i^* *ale punctelor de eroare maximă să existe unul cuprins între două puncte de speță diferită cu primul.*

Condiția este și necesară dacă: a) între punctele asociate nu există două de speță diferită și confundate, b) dacă o tangentă dusă într-un punct de eroare maximă P_i *este perpendiculară pe* d_1, *atunci* P_i *nu este în mijlocul lui* A_iB_i.

Demonstrație. Dacă condiția teoremei 6 este îndeplinită, atunci conform teoremei 5, toate omologiile $\Sigma(0^*, k = 1 \pm \varepsilon)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ sînt contractante cel puțin într-un punct de eroare maximă P_i, pe tangente t_i, dacă ε este suficient de mic. Dar atunci conform definiției omologiei contractante rezultă că omologiile de mai sus sînt contractante în aceste puncte şi pe scările nomogramei. Astfel din definiţia erorii unei nomograme rezultă că orice nomogramă transformată a nomogramei N_0 prin omologiile $\Sigma(0^*, k = 1 \pm \varepsilon)$ $\varepsilon < \varepsilon_0$ are erori mai mari decît eroarea lui N_0, dacă ε_0 este suficient de mic. Deci N_0 este relativ optimă, adică condiţia este suficientă.

Dacă condiţia teoremei 6 nu este îndeplinită, din teorema 5 rezultă că totdeauna se poate găsi pe dreapta d_2 un punct 0^* astfel încît omologiile $\Sigma(0^*, k = 1 + \varepsilon)$ sau $\Sigma(0^*, k = 1 - \varepsilon)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ să fie dilatante în punctele de eroare maximă. Presupunem că omologiile primei familii vor fi dilatante. Deci în transformatele acestor puncte erorile nomogramelor transformate vor fi mai mici decît eroarea E a nomogramei iniţiale. Presupunem că eroarea E' a nomogramei transformate $N' = \Sigma(N_0)$ este atinsă în punctul Q'. Fie $Q = \Sigma^{-1}(Q')$ unde Q nu poate să fie un punct de eroare maximă, deci $E(Q) < E$. Alegem un şir $\varepsilon_i < \varepsilon$ $i = 1, 2, 3 \ldots$ tinzînd către 0. Nomogramele transformate $N'_1, N'_2, \ldots$ prin omologiile $\Sigma(0^*, k = 1 + \varepsilon_1), \Sigma(0^*, k = 1 + \varepsilon_2), \ldots$ vor tinde către nomograma N_0. Folosind faptul că omologia este o transformare continuă, se poate arăta uşor că eroarea nomogramei N' în punctul Q' tinde uniform către $E(Q)$. Deci $E'(Q') - E(Q) < \delta$ dacă ε_n este suficient de mic. Alegînd $\delta = E - E(Q) > 0$, găsim că $E'(Q') < E$. Astfel eroarea oricărei nomograme transformate prin omologiile $\Sigma(0^*, k = 1 + \varepsilon)$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ este mai mică decît cea a nomogramei N_0, deci N_0 nu este relativ optimă.

Astfel teorema 6 este complet demonstrată.

Observaţie. Rezultatul găsit în teorema 6 se poate folosi la micşorarea erorii unei nomograme în felul următor:

Dîndu-se nomograma N_0, cuprinsă în dreptunghiul $ABCD$, stabilim punctele P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, de eroare maximă şi construim tangentele t_i în aceste puncte la supoartele scărilor respective. Tangentele t_i intersectează dreptele $AB \equiv d_1$ şi $DC \equiv d_2$ în punctele A_i şi B_i. Construim punctele asociate O_i^* ale punctelor P_i de pe segmentele A_iB_i şi după poziţia acestor puncte putem constata dacă N_0 este sau nu optimă. În cazul 2 dacă numerotăm punctele O_i^* în ordinea aşezării lor pe dreapta d_2 de la D la C, punctele $O_1^*, O_2^*, \ldots, O_j^*$ vor fi de o speţă, iar $O_{j+1}^*, O_{j+2}^*, \ldots, O_n^*$ de cealaltă speţă. Alegem centrul O^* al omologiei pe d_2 între punctele O_j^*, O_{j+1}^* şi construim punctele M_i pe segmentele A_iB_i, care au punctul O^* ca punct asociat (unim O^* cu A_i şi proiectăm ortogonal mijlocul segmentului O^*A_i pe A_iB_i). Sînt posibile două cazuri: 1. Punctele P_i sînt situate pe segmentele A_iB_i. 2. Aceste puncte se găsesc pe segmentele M_iB_i. O omologie cu centrul în O^* avînd caracteristica în cazul 1, $k = 1 + \varepsilon$, iar în cazul 2, $k = 1 - \varepsilon$, unde $\varepsilon > 0$ este un număr mic, va transforma nomograma într-o nomogramă cu eroare mai mică decît eroarea nomogramei N_0.

(Intrat în redacţie la 11 aprilie 1969)

BIBLIOGRAFIE

1. M.V. Pentkovski, *Nomograficeski metod otîskania nailucişeva preobrazovania priamolineinîh şkal.* „D.A.N." **LXVI** (1949), p. 339–342.

2. F. Radó, *Cea mai bună transformare proiectivă a scărilor la nomograme cu puncte aliniate.* „Studii şi cercetări de Matematică, Cluj" **1–2**, an. VIII (1957), p. 161–168.

3. F. Radó, *Über die beste proiective Transformation von geradlinigen Leitern.* „Z.A.M.M." **45**, 1965, p. 356–360.

4. F. Radó, V. Groze, B. Orbán, *Propriétés extrémales dans une clase de fonctions et applications à la transformation des nomogrammes.* „Mathematica" 6 (29), 2, 1964, p. 307—326.
5. S. Groze, B. Orbàn, *Sur une classe des transformations des nomogrammes de l'ordre trois.* „Mathematica", 7 (30), 2, 1966, p. 233—246.
6. S. Groze, B. Orbán, *La décomposition d'une projectivité sur une conique et son application à la meilleure transformation projective d'une échelle située sur un cercle.* „Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliqúes; „XII, nr. 8, 1967, p. 1065—1073.
7. S. Groze, B. Orbán, *Sur la transformation projective d'un nomogramme à deux échelles sur un cercle et le troisième sur une courbe quelconque.* „Revue Roumaine de Mathématiques pures et appliquées" XV, nr. 2, 1970, p. 239-248.
8. B. Orbán, V. Groze, Gh. Coman, *Despre transformarea proiectivă a nomogramei cu scări rectilinii.* „Studia Univ. Babeş-Bolyai Ser. Math.-Phys.", fasc. 1, 1967.
9. B. Orbán, A. Vasiu, *Despre transformarea proiectivă a unei nomograme cu două scări pe o parabolă şi una rectilinie.* „Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math.-Phys.", fasc. 1, 1967.

КРИТЕРИИ ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ НОМОГРАММА С ВЫРАВНЕННЫМИ ТОЧКАМИ ИМЕЛА МИНИМАЛЬНУЮ ОШИБКУ

(Резюме)

Авторы статьи, обобщая результаты работ [6], [7], [8], изучают задачу уменьшения ошибки одной номограммы с выравненными точками, имеющей три произвольные криволинейные шкалы через коллинейности плоскости, дают общие критерии для того, чтобы такая номограмма была оптимальной и указывают на практические методы для уменьшения ошибки. Результаты основываются на некоторых метрических свойствах коллинейностей, изученных авторами.

CRITÈRES POUR QU'UN NOMOGRAMME AUX POINTS ALIGNÉS AIT UNE ERREUR MINIMA

(Résumé)

Dans cette note les auteurs, généralisant les résultats des travaux [6], [7] et [8], étudient le problème de la diminution de l'erreur d'un nomogramme aux points alignés ayant trois échelles curvilignes quelconques, par les collinéations du plan, et ils indiquent des méthodes pratiques pour diminuer l'erreur. Les résultats s'appuient sur certaines propriétés métriques des collinéations étudiées par les auteurs.

ON A SPECIAL INTEGRAL

by

A. K. GUPTA (University of Arizona)

1. *Introduction*. The integral of the type (written symbolically)

$$\int_R a_j^r Z_k \, {}_0F_1(f;\ W) e^{-\operatorname{tr} W} |W|^n \prod_{i>j} (w_i - w_j) \prod_{i=1}^{p} dw_i, \tag{1}$$

where R is $0 < w_1 \leqslant w_2 \leqslant \ldots \leqslant w_p < \infty$; a_j and Z_k are the j^{th} elementary symmetric function and the zonal polynomial respectively in the elements of $W = \operatorname{diag}(w_i)$; arise in noncentral distribution theory in statistics and are also the object of study of pure mathematics. Pillai and Gupta (1968) have evaluated the integral for $r = 1$, $j = 2$ and for certain interesting partitions k. In this paper we evaluate the integral when $r = 2$, $j = 2$ and for six different partitions k. A general result for any r and j is not known.

2. *Evaluation*. First let us recall a lemma due to Constantine (1963) which we will use later in this section.

LEMMA 1: *Let $Z: m \times m$ be a complex symmetric matrix whose real part $R(Z)$ is positive definite and let $T: m \times m$ be an arbitrary complex symmetric matrix. Then*

$$\int_{S>0} \exp(-\operatorname{tr} Z S)\, |S|^{t-\frac{1}{2}(m+1)} C_k(TS)\, dS = \Gamma_m(t, k) |Z|^{-t} C_k(TZ^{-1}) \tag{2}$$

where $R(t) > \frac{1}{2}(m-1)$ and $\Gamma_m(t, k) = \pi^{\frac{1}{4}m(m-1)} \prod_{j=1}^{m} \Gamma\left(t + k_j - \frac{1}{2}(j-1)\right)$ where $k = (k_1, \ldots, k_s)$, $k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_s \geqslant 0$, $k_1 + \ldots + k_s = k$. Now let us note that (Herz, 1955)

$$C_k(S) = [X_{[2k]}(1) \cdot 2^k k!(2k)!] Z_k(S) \tag{3}$$

where $X_{[2k]}(1)$ is defined in James (1960). Hence one can either work with the zonal polynomials $C_k(S)$ or $Z_k(S)$ which differ only in their normalizing constanst.

Note that a_2^2 can be expressed in terms of the polynomials as follows:

$$a_2^2 = \frac{1}{24} Z_{(2^2)} + \frac{2}{15} Z_{(2,1^2)} + \frac{3}{40} Z_{(1^4)}. \tag{4}$$

Further let us note that (James, 1964)

$$ {}_0F_1\left(\frac{1}{2}f;\ W\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k} C_k(W)\Big/\left\{\left(\frac{1}{2}f\right)_k k!\right\}. \tag{5}$$

Now since

$$C_k(W)\, C_\eta(W) = \sum_{\delta} g^{\delta}_{k,\eta} C_\delta(W). \tag{6}$$

where δ is a partition of $k+n=d$ and $g's$ are constants.

Now if we denote by $I(k)$ the integral

$$\int_R a_2^2 Z_k\, {}_0F_1\left(\frac{1}{2}f;\ W\right) e^{-\frac{1}{2}trW} |W|^{\frac{1}{2}(f-p-1)} \prod_{i>j}(w_i - w_j) \prod_{i=1} dw_i \tag{7}$$

then by making use of Lemma 1 and the relations (4), (5) and (6), we have evaluated $I(k)$ for different values of k in the next section. See Gupta (1968) for the evaluation of the coefficients $g^{\delta}_{k,\eta}$.

3. *Value of* $I(k)$. Here we give the value of $I(k)$ for six different partitions k.

$$\begin{aligned} I(1^3) = {} & 2^9 D_k(p,f)[p^2(p-1)^2f^4 - 2p(p-1)^2(p-16)f^3 \\ & + (p^4 - 66p^3 + 501p^2 - 724p + 288)f^2 \\ & + 4(8p^3 - 181p^2 + 797p - 696)f \\ & + 96(3p^2 - 29p + 65)] \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} I(32) = {} & D_k(p,f)[p^2(p-1)^2f^4 - 2p(p-1)^2(p-24)f^3 \\ & + (p^4 - 98p^3 + 957p^2 - 1500p + 640)f^2 \\ & + 4(12p^3 - 375p^2 + 1747p - 1496)f \\ & + 32(20p^2 - 187p + 384)] \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} I(31^2) = {} & D_k(p,f)[p^2(p-1)^2f^4 - 2p(p-1)^2(p-24)^3\ f^3 \\ & + (p^4 - 98p^3 + 981p^2 - 1524p + 640)f^2 \\ & + 4(12p^3 - 381p^2 + 1921p - 1688)f \\ & + 32(20p^2 - 211p + 516)] \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} I(2^21) = {} & D_k(p,f)[p^2(p-1)^2f^4 - 2p(p-1)^2(p-24)f^3 \\ & + (p^4 - 98p^3 + 1005p^2 - 1548p + 640)f^2 \\ & + 4(12p^3 - 387p^2 + 2095p - 1880)f \\ & + 32(20p^2 - 235p + 630)] \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} I(21^3) = {} & D_k(p,f)[p^2(p-1)^2f^4 - 2p(p-1)^2(p-24)f^3 \\ & + (p^4 - 98p^3 + 1037p^2 - 1580p + 640)f^2 \\ & + 4(12p^3 - 395p^2 + 2327p - 2136)f \\ & + 32(20p^2 - 267p + 838)] \end{aligned} \tag{12}$$

$$
\begin{aligned}
I(1^5) = D_k(p,f)\,[&p^2(p-1)^2f^4 - 2p(p-1)^2(p-24)f^3 \\
&+ (p^4 - 98p^3 + 1085p^2 - 1628p + 640)f^2 \\
&+ 4(12p^3 - 407p^3 + 2675p - 2520)f \\
&+ 32(20p^2 - 315p + 1180)]
\end{aligned} \tag{13}
$$

where $D_k(p, f) = \left[2^{\frac{1}{2}pf+2k-11}\left(\frac{1}{2}p\right)_k\left(\frac{1}{2}f\right)_k\Gamma_p\left(\frac{1}{2}p\right)\Gamma_p\left(\frac{1}{2}f\right)\right]/\pi^{\frac{1}{2}p^2}$ (14)

and k denotes the specific partition of k given on the left side of each equation involving $D_k(p, f)$.

(Received June 24, 1969

REFERENCES

1. Constantine, A.G., *Some noncentral distribution problems in multivariate analysis.* „Ann. Math Statist". **34**, 1270–1285, 1963.
2. Gupta, A.K., *Evaluation of the coefficients* $g_{k,n,i}$. Unpublished, 1968.
3. Herz, C.S., *Bessel functions of matrix argument.* „Ann. of Math",. **61**, 474–523, 1955.
4. James, A.T., *The distribution of the latent roots of the covariance matrix.* „Ann. Math. Statist.", **31**, 151–158, 1960.
5. James, A.T., *Distributions of matrix variates and latent roots derived from normal samples.*, „Ann. Math. Statist.", **35**, 475–501, 1964.
6. Pillai, K.C.S. and Gupta, A.K., *On the noncentral distribution of the second elementary symmetric function of the roots of a matrix.* „Ann. Math. Statist.", **39**, 833–839, 1968.

ASUPRA UNEI INTEGRALE SPECIALE

(Rezumat)

În această lucrare se evaluează o integrală de tipul (1), care intervine în teoria distribuţiilor necentrale din statistică, în cazul $r = 2$, $j = 2$ şi pentru şase diferite partiţii k.

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ИНТЕГРАЛЕ

(Резюме)

В данной работе оценивается интеграл типа (1), который встречается в теории нецентральных дистрибуций из статистики, в случае $r = 2$, $j = 2$ и для шести различных делений k.

UN PROBLÈME DE LA PROGRAMMATION QUADRATIQUE À PLUSIEURS FONCTIONS ÉCONOMIQUES

par

I. MARUŞCIAC et M. RĂDULESCU

1. Dans plusieurs problèmes de programmation mathématique interviennent des situations où il faut minimiser ou maximiser simultanément plusieurs fonctions soumises à certaines restrictions. Dans le cas où tant les fonctions économiques que les restrictions sont linéaires, le problème de la programmation mathématique a été abordé en un certain sens par A.S. Zuhovitzki [4] et E.I. Remez, A.S. Steinberg [3], en donnant de même un algorithme pour trouver la solution de ce problème.

Dans cette note nous considérons un problème analogue dans lequel il faut optimiser plusieurs fonctions quadratiques dont les variables sont soumises à certains restrictions linéaires.

2. Ainsi, soient les fonctions

$$f_j(x) = xC^j x' + d^j x' + e_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s,$$

où

$$C^j = ||c^j_{ik}||, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n.$$

sont des matrices symétriques positives—définies,

$$d^j = ||d^j_1, d^j_2, \ldots, d^j_n||, \quad x = ||x_1, x_2, \ldots, x_n||$$

et

$$L(x) = Ax' + B \geqslant 0,$$
$$A = ||a_{ik}||, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$B' = ||b_1, b_2, \ldots, b_m||.$$

Désignons par $\bar{\Omega}$ le domaine convexe de l'espace euclidien, déterminé par le système des inégalités $L(x) \geqslant 0$. Le problème de la programmation que nous étudierons est le suivant: *trouver un point* $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \Omega$, *tel que*

$$F(x) = \max_{(j)} f_j(x) = \min. \tag{1}$$

Nous donnons, pour trouver la solution du problème (1), un algorithme toujours convergent. Nous allons d'abord démontrer quelques théorèmes qui constituent les critères d'optimum pour le problème (1).

3. Soit $x_0 \in \Omega$ dans lequel on a

$$f_1(x^\circ) = f_2(x^\circ) = \ldots = f_p(x^\circ) > f_k(x^\circ), \; k = p + 1, \; \ldots, \; s; \; p \geqslant 1. \tag{2}$$

THÉORÈME 1. *S'il existe i, j, $1 \leqslant i$, $j \leqslant p$, tel que*

$$g_i = -\lambda g_j, \quad \lambda > 0, \tag{3}$$

où

$$g_k = -\operatorname{grad} f_k(x^0),$$

alors x° est un point optimal.

En effet, si la relation (3) a lieu, alors

$$\operatorname{grad} f_i(x^\circ) = -\lambda \operatorname{grad} f_j(x^\circ).$$

Par conséquent les surfaces de niveau

$$f_i(x) = f_i(x^\circ)\,;\; f_j(x) = f_j(x^\circ),$$

ont le même plan tangent au point x°, mais les directions des vecteurs g_i et g_j sont orientées dans des sens contraires. Si $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est un vecteur quelconque pour lequel $f_i(x) < f_i(x^\circ)$, où $x = x^\circ + ut$, $t > 0$, on a $f_j(x) > f_j(x^\circ)$ et réciproquement, si $f(x) > f(x^\circ)$, alors $f_j(x) < f_j(x^\circ)$.

Par conséquent, dans chaque point $x \in \bar{\Omega}$, $x \neq x^\circ$, on a évidemment

$$\max\,(f_i(x), f_j(x)) > f_i(x^\circ) = f_j(x^\circ).$$

Donc

$$\max_{(j)} f_j(x) > \max_{(j)} f_j(x^\circ),$$

et le Théorème 1 est démontré.

THÉORÈME 2. *Soit x° un point tel que*

$$L_1(x^\circ) = L_2(x^\circ) = \ldots = L_q(x^\circ) = 0, \; L_i(x^\circ) > 0, \; i = q + 1, \; \ldots, \; m,$$

et

$$f_1(x^\circ) = f_j(x^\circ), \; j = 1, \, 2, \, \ldots, \, p, \; p \geqslant 1, \; f_k(x^\circ) < f_1(x^\circ), \; k = p + 1, \; \ldots, \; s.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que x° soit un point optimal est que pour chaque nombre positif $\varepsilon > 0$ le système des inégalités

$$(u, g_j) \geqslant \varepsilon > 0, \quad j = 1, \, 2, \, \ldots, \, p, \tag{4}$$

$$(u, a^i) \geqslant 0, \quad i = 1, \, 2, \, \ldots, \, q, \tag{5}$$

soit incompatible.

La nécessité. Si x° est un point optimal, alors il n'existe aucune direction admissible u(c'est-à-dire pour laquelle les inégalités (5) soient vérifiées) afin que toutes les fonctions $f_i(x)$, $j = 1, 2, \ldots, p$ soient décroissantes. Mais pour que la fonction $f_i(x)$ soit décroissante sur la direction admissible u, il este nécessaire qu'on ait

$$(u, g_j) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

et que

$$(u, a^i) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, q.$$

Donc pour un nombre $\varepsilon > 0$ suffisamment petit il est nécessaire que les inégalités (4)—(5) soient vérifiées.

La suffisance. Soit x° un point tel que le système des inégalités (4)—(5) soit incompatible quel que soit $\varepsilon > 0$. Dans ce cas il résulte que le système

$$(u, g_j) > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$
$$(u, a^i) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, q.$$

est aussi incompatible. Par conséquent il n'existe aucune direction admissible u sur laquelle toutes les fonctions $f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, soient décroissantes. Donc x° est un point optimal.

3. Pour la résolution du problème (1) dans ce qui suit, nous allons donner un algorithme qui permet de trouver les points d'approximation successifs du point optimal cherché.

Soit $x^\circ \in \overline{\Omega}$ un point dans lequel, en modifiant éventuellement la notation, nous avons

$$f_1(x^\circ) = f_2(x^\circ) = \ldots = f_p(x^\circ) > f_j(x^\circ), \; j = p+1, \ldots, s\,; \; p \geqslant 1, \tag{6}$$

$$L_1(x^\circ) = L_2(x^\circ) = \ldots = L_q(x^\circ) = 0, \; L_i(x^\circ) > 0, \; i = q+1, \ldots, m\,; \; q \geqslant 0. \tag{7}$$

a) On examine s'il existe deux index i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant p$ pour lesquels la relation (3) est vérifiée. Dans le cas affirmatif x°, d'après le Théorème 1, est un *point optimal*, et le processus du calcul est terminé.

b) Si la relation (3) n'a lieu pour aucune paire des index i, j, $1 \leqslant i, j \leqslant p$, alors il faut résoudre le problème de la programmation linéaire

$$z = \varepsilon = \max. \tag{8}$$

dans les conditions (4)—(5), auxquelles on ajoute les conditions

$$|u_k| \leqslant M,$$

où M est un nombre réel donné.

Si le système (4)—(5) est incompatible quel que soit $\varepsilon > 0$, alors x° est, en vertu du Théorème 2, un *point optimal* et le processus du calcul est terminé.

c) S'il existe une solution $u^\circ = (u_1^0, u_2^0, \ldots, u_n^0)$ du problème de la programmation linéaire (8), alors on procède de la manière suivante :

Soit

$$x = x^\circ + tu^\circ, \; t > 0,$$

on calcule les valeurs t_i' et t_{ij}'' des égalités

$$L_i(x^\circ + t_i'u^\circ) = 0, \quad i = q+1, \ldots, m$$

et

$$f_j(x^\circ + t_{ij}''u^\circ) = f_i(x^\circ + t_{ij}''u^\circ), \quad i, j = 1, 2, \ldots, s$$

respectivement.

Soit $\tau' = \min\limits_{(t_i'>0)} t_i'$, $\tau'' = \min\limits_{(t_{ij}''>0)} t_{ij}''$,

et

$$\tau = \min(\tau', \tau'').$$

Le nouveau point d'approximation sera $x^1 = x^\circ + \tau u^\circ$. Parce que dans x^1 on a

$$(u^\circ, g_j) \geqslant \varepsilon > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, p$$

il résulte que

$$F(x^1) < F(x^\circ)$$

THÉORÈME 3. *Si $\{x^k\}$ est la suite des approximations successives, obtenue par l'application successive du point c), alors la suite $\{x^k\}$ est convergente et le poin*

$$\tilde{x} = \lim_{k\to\infty} x^k$$

est optimal.

Parce que $x^k \in \Omega_0 = \Omega \cap \{x \mid F(x) \leqslant F(x^\circ)\}$ et que le domaine Ω_0 est borné et fermé, il résulte que la suite $\{x^k\}$ a au moins un point d'accumulation $\tilde{x} \in \Omega_0 \subset \Omega$. Par conséquent, il existe une sous- suite $\{x^{k_r}\}$ qui converge vers $\tilde{x}$. Nous supposons d'abord que même la suite $\{x^k\}$ est convergente vers $\tilde{x}$. Soit u^k le vecteur pour lequel nous avons

$$x^{k+1} = x^k + \tau_k u^k. \tag{9}$$

Nous allons montrer que $\tilde{x}$ est un point optimal. Parce que

$$F(x) = \max_{(j)} f_j(x)$$

est une fonction continue dans Ω_0, qui est un domaine fermé, il résulte que

$$\lim_{k\to\infty} F(x^k) = F(\tilde{x}) = f_{j_1}(\tilde{x}) \ldots = f_{j_p}(\tilde{x}), \qquad 1 \leqslant p \leqslant s.$$

Si $F(x^k) = f_{j_l}(x^k)$, $l = 1, 2, \ldots, p_k$, $1 \leqslant p_k \leqslant s$, alors le vecteur u^k vérifie le système

$$(u^k, g_{j_l}) - \varepsilon_k \geqslant 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, p_k,$$

$$(u^k, a^{i_{l'}}) \geqslant 0, \qquad l' = 1, 2, \ldots, q_k$$

dans lequel $\varepsilon_k > 0$ est maximum. On peut démontrer que

$$\lim_{k\to\infty} (u^k, g_{j_l}) = 0, \qquad l = 1, 2, \ldots, p_k. \tag{10}$$

donc

$$\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0.$$

Soit $L_{i_{h'}}(\tilde{x}) = 0$, $h' = 1, 2, \ldots, q$. On considère le système

$$(u, g_{j_h}) \geqslant \varepsilon > 0, \quad h = 1, 2, \ldots, p,$$

$$(u, a^{i_{h'}}) \geqslant 0, \; h' = 1, 2, \ldots, q.$$

Si ce système était compatible pour un $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} > 0$, alors en vertu de la propriété de continuité de la fonction $F(x)$, il existerait k_0 tel que $(u, g_{j_l}) \geqslant \tilde{\varepsilon}/2$, $= 1, 2, \ldots, p_k$, $k \geqslant k_0$, Mais u^k étant la direction admise maximum, il résulte que $(u^k, g_{j_l}) \geqslant (u, g_{j_l}) \geqslant \tilde{\varepsilon}/2$, $k \geqslant k_0$. À la limite on déduit

$$\lim_{k\to\infty} (u, g_{j_l}) \geqslant \tilde{\varepsilon}/2.$$

qui contredit la relation (10).

Si la suite $\{x^k\}$ admet deux points d'accumulation $\tilde{x}'$, $\tilde{x}''$, alors il résultera que tant $\tilde{x}'$, que $\tilde{x}''$ sont des points optimaux. Évidemment nous avons $F(\tilde{x}') = F(\tilde{x}'')$. Mais $F(x)$ étant une fanction strictement convexe, il résulte que dans $\tilde{x} = t\tilde{x}' + (1-t)\tilde{x}''$, $0 < t < 1$, nous avons

$$F(\tilde{x}) < F(\tilde{x}') = F(\tilde{x}'')$$

ce qui contredit le fait que $\tilde{x}'$ et $\tilde{x}''$ sont des points optimaux.

4. *Remarque*. En général l'algorithme présenté au point **3** se complique parce qu'il faut résourde un problème de programmation linéaire à chaque pas de l'algorithme. On peut simplifier l'algorithme, si nous prenons à chaque pas, lorsque cela est possible, au lieu de la direction admissible optimale, la direction parallèle au segment $[x^k, x^*]$, où x^* est le point de minimum relatif de la fonction dominante au point x^k.

Ainsi, si au point x^k nous avons les relations (6)—(7), alors on cherche le point x^* de minimum de la fonction $f_1(x)$ avec les liaisons

$$f_1(x) - f(x) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, p.$$

$$L_i(x) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, q.$$

La direction u^k ainsi obtenue est toujours admissible, parce que $(u^k, a^i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots q$, et sur cette direction toutes les fonctions $f_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, p$ décroissent

Avec la direction u^k on procède ensuite comme à 3, c).

5. Pour illustrer l'algorithme, nous considérons les exemples suivants:

Exemple 1. Trouver

$$\min_{M\in\overline{\Omega}} F(M)$$

où

$$F(M) = \max (f_1, f_2)$$

$$f_1(M) = x^2 + 4y^2 - 1, \; f_2(M) = (x+1)^2 + (y-1)^2 - 1,$$

et $\overline{\Omega}$ est le domaine défini par les inégalités

$$\begin{aligned} L_1(M) &= 2x + y - 2 \geqslant 0 \\ L_2(M) &= x \geqslant 0 \\ L_3(M) &= -x + y \geqslant 0 \\ L_4(M) &= y - 1 \geqslant 0 \\ L_5(M) &= -3x - 4y + 12 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Soit $M_0(1,2) \in \Omega$ un point initial. On a $f_1(M_0) = 16$, $f_2(M_0) = 4$. Donc

$$\max (f_1, f_2) = f_1.$$

Le minimum de la fonction f_1 est pris dans $O(0,0) \notin \Omega$. Considérons la direction admissible $u^\circ = (-1, -2)$ et soit $M(x, y)$, où

$$x = 1 - t$$

$$y = 2 - 2t.$$

Nous avons $f_1(M) - f_2(M) = 0$ pour $t = 2/3$, donc $\tau' = 2/3$ et respectivement

$L_1(M) = 2 - 4t = 0, \; t_1 = 1|2,$ $\qquad L_4(M) = 1 - 2t, \; t_4 = 1|2,$
$L_2(M) = 1 - t = 0, \; t_2 = 1,$ $\qquad L_5(M) = 11t + 1 = 0, \; t_5 = -1|11,$
$L_3(M) = 1 - t = 0, \; t_3 = 1,$

d'où il résulte que $\tau'' = 1|2$. Ainsi, $\tau = 1|2$ et $M_1 = (1|2, 1)$.

Au point M_1 nous avons respectivement $L_1(M_1) = L_4(M_1) = 0$, $f_1(M_1) = 13|4$, $f_2(M_1) = 5|4$ et $g_1 = (-1, -8)$, $a^1 = (2, 1) = a^2 = (0, 1)$.

Soit $u = (u_1, u_2)$, où

$$|u_1| < 10; \quad |u_2| < 10. \tag{11}$$

Les conditions (4), (5) conduisent au système

$$\begin{aligned} -u_1 - 8u_2 - \varepsilon &\geqslant 0 \\ 2u_1 + u_2 &\geqslant 0 \\ u_2 &\geqslant 0. \\ \varepsilon &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Si à ce système nous ajoutons les inégalités (11), en observant que $u_2 \geqslant -10$ est une conséquence de la dernière inégalité, nous obtenons le système

$$\begin{aligned} y_1 &= -u_1 - 8u_2 - \varepsilon \geqslant 0 \\ y_2 &= 2u_1 + u_2 \geqslant 0 \\ y_3 &= u_2 \geqslant 0 \\ y_4 &= u_1 + 10 \geqslant 0 \\ y_5 &= -u_1 + 10 \geqslant 0 \\ y_6 &= -u_2 + 10 \geqslant 0 \end{aligned} \tag{12}$$

et il faut résoudre le problème

$$z = \varepsilon = \max.$$

En construisant le tableau simplex [5] et en effectuant un pas de l'élimination de Jordan, nous avons

	$-u_1$	$-u_2$	$-\varepsilon$	1
y_1	1	8	1	0
y_2	-2	-1	0	0
y_4	-1	0	0	10
y_5	1	0	0	10
y_6	0	1	0	10
z	0	0	-1	0

	$-y_5$	$-u_2$	$-\varepsilon$	1
y_1	-1	8	1	-10
y_2	2	-1	0	20
y_4	1	0	0	20
u_1	1	0	0	10
y_6	0	1	0	10
z	0	0	-1	10

ou, en écrivant séparément

$$u_1 = -y_5 + 10$$

nous aurons successivement les tableaux

	$-y_5$	$-u_2$	$-\varepsilon$	1
y_1	-1	8	1	-10
y_2	2	-1	0	20
y_4	1	0	0	20
y_6	0	1	0	10
z	0	0	-1	0

	$-y_1$	$-u_2$	$-\varepsilon$	1
y_5	1	8	1	-10
y_2	-2	-15	-2	0
y_4	-1	-8	-1	-10
y_6	0	-1	0	-10
z	0	0	1	0

	$-y_1$	$-u_2$	$-\varepsilon$	1
y_5	-1	-8	-1	10
y_2	2	-15	2	0
y_4	1	8	1	10
y_6	0	1	0	10
z	0	0	-1	0

Le dernier tableau montre que le système (12) est incompatible, car $y_2 < 0$, si $\varepsilon > 0$. Donc $M_1(1|2, 1)$ est un *point optimal*, et $F(M_1) = 13|4$.

Exemple 2. Trouver

$$\min_{M \in \overline{\Omega}} F(M), \quad \text{où} \quad F(M) = \max\,(f_1, f_2, f_3),$$

$$f_1(M) = 4x^2 + y^2 + 4z^2,\ f_2(M) = 4x^2 + 4y^2 + z^2,\ f_3(M) = x^2 + y^2 - 2z,$$

et $\overline{\Omega}$ est défini par les inégalités

$$\begin{aligned} L_1(M) &= x \geqslant 0 \\ L_2(M) &= y \geqslant 0 \\ L_3(M) &= z \geqslant 0 \\ L_4(M) &= x + y + z - 1 \geqslant 0 \\ L\ (M) &= -2x - 3y - z + 8 \geqslant 0 \end{aligned}$$

Soit $M_0 = (1, 1, 1) \in \Omega$. Nous avons $f_1(M_0) = f_2(M_0) = 9$, $f_3(M_0) = 0$, et $L_i(M) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, 5$.

Par conséquent, il faut résoudre le problème du minimum lié de la fonction $f_1(M)$ avec liaison

$$f_1(M) - f_2(M) = 0.$$

Le point de minimum relatif est $0 = (0, 0, 0) \notin \overline{\Omega}$. La direction correspondante est

$$u^1 = (-1, -1, -1).$$

Ainsi le point variable M a des coordonnées

$$\begin{aligned} x &= 1 - t, \\ y &= 1 - t, \\ z &= 1 - t. \end{aligned}$$

On constate que $\tau = 2|3$, donc le nouveau point d'approximation est $M_1 = (1|3, 1|3, 1|3)$. A ce point on a $f_1(M_1) = f_2(M_1) = 1$, $f_3(M_1) = -4|9$, $L_4(M_1) = 0$, $L_i(M_1) > 0$, $i \neq 4$.

En considérant la fonction

$$\Phi(M) = 4x^2 + y^2 + 4z^2 + 3\lambda_1(z^2 - y^2) + \lambda_2(x + y + z - 1),$$

nous obtenons comme résultat que le minimum relatif de la fonction $f_1(M)$ avec liaisons

$$f_1(M) - f_2(M) = 0,\ L_4(M) = 0,$$

est $M_2 = (5/21, 8/21, 8/21) \in \overline{\Omega}$. Les gradients des fonctions f_1 et f_2 dans M_2 sont $g_1 = (-5, -2, -8)$, $g_2 = (-5, -8, -2)$ et $a^4 = (1, 1, 1)$.

En considérant un vecteur $u = (u_1, u_2, u_3)$, les conditions (4), (5) s'écrivent sous la forme

$$\begin{aligned} -5u_1 - 2u_2 - 8u_3 - \varepsilon &\geqslant 0 \\ -5u_1 - 8u_2 - 2u_3 - \varepsilon &\geqslant 0 \\ u_1 + u_2 + u_3 &\geqslant 0 \end{aligned} \tag{13}$$

En additionant les deux premières inégalités, nous obtenons

$$-2[5(u_1 + u_2 + u_3) + \varepsilon)] \geqslant 0,$$

qui contredit la dernière inégalité. Il résulte donc que le système (13) n'est compatible pour aucun $\varepsilon > 0$. Par conséquent le point

$$M_2(5/21,\ 8/21,\ 8/21)$$

est optimal. A ce point, $F(M_2) = f_1(M_2) = 20/21$.

(Manuscrit reçu le 17 décembre 1968)

BIBLIOGRAPHIE

1. B ó d, P., *Lineáris programozás több, egyidejüleg adott célfüggvény szerint.* A magy. Tud. Akad. Matem. kutató intöézetének közlem. **VIII**, b. 4, pp. 541—556 (1963).
2. M a r u ş c i a c, I., R ă d u l e s c u, M., *Un algorithme pour résoudre le problème de la programmation quadratique.* Mathematica (Cluj), **7** (30), 2, pp. 287—296 (1965).
3. E. J a. R e m e z, A. S. S t e i n b e r g, *Pro dejaki ekstremalni zadaci uzagalneno — cebişovskovo tipu ta pro metod zrivnjalnih spuskiv.* Dopovidi A.N.U.R.S.R., **8**, pp. 983—987 (1961).
4. Z u h o v i ţ k i j, S.I., *Algoritm dlja reşenija odnoi obobşconnoi zadaci lineinovo programmirovanuja.* D.A.N.S.S.R., 133, 1, pp. (1960).
5. Z u h o v i ţ k i j, S. I., A v d e e v a, L. I., *Lineinoe i vypukloe programmirovanie.* Moskva, 1964.

O PROBLEMĂ DE PROGRAMARE PATRATICĂ CU MAI MULTE FUNCŢII—SCOP

(R e z u m a t)

În lucrare se consideră problema de programare (1) unde $C^j = \|c^j_{ik}\|$, i, k = 1, 2, ..., n, fiind matrici pozitiv definite, $f_j(x) = xC^jx' + d^jx' + e_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$ şi x aparţine domeniului $\overline{\Omega}$ determinat de inegalităţile liniare $L(x) = Ax' + B \geqslant 0$. După ce se dau două teoreme ce reprezintă criterii de optimum pentru problema de programare (1), se demonstrează (Teorema 3) că algoritmul propus pentru rezolvare este totdeauna convergent. În partea a doua a lucrării se descriu paşii algoritmului, iar pentru ilustrarea metodei se prezintă două exemple.

ОДНА ЗАДАЧА КВАДРАТИЧНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С НЕСКОЛЬКИМИ ЦЕЛЕВЫМИ ФУНКЦИЯМИ

(Р е з ю м е)

В работе рассматривается задача программирования (1), где $C^j = \|c^j_{ik}\|$, i, k=1,2, ..., n будучи положительно определёнными матрицами, $f_j(x) = xC^jx' + d^jx' + e_j$, $j = 1, 2, \ldots, s$ и x принадлежит области Ω, определённой линейными неравенствами $L(x) = Ax' + B \geqslant 0$. После того, как авторы дают две теоремы, являющиеся критериями оптимума для задачи программирования (1), они доказывают (теорема 3), что предлагаемый для решения алгоритм всегда сходится. Во второй части работы описываются шаги алгоритма, и для иллюстрирования метода приводятся два примера.

RECENZII

Aequationes Mathematicae, vol.2, No.2/3, p. 137–408, 1969. Edited by Birkhäuser Verlag in Basel, Switzerland.

Mathematical treatment of some natural phenomena and engineering problems as organic growth and decrease, psychology, business mathematics, nomography, information theory, geometric objects etc., frequently leads to quantitative relations expressed by functional equations. The new journal "Aequationes Mathematicae", whose first volume appeared in 1968, just proposes to publish papers in functional equations, in particular, and other papers in pure and applied mathematics in general. Edited by Faculty of Mathematics, University of Waterloo, Canada, this journal is led by well-known specialists in functional equations from Canada, England, France, Germany, Hungary, Italy, Poland, Switzerland, USA, USSR, Yugoslavia. Rumania is represented by Professor T. Popoviciu, University of Cluj.

The journal "Aequationes Mathematicae" includes original research papers, reports of meetings and activities, problems and their solutions, expository papers and, as short communications, self-contained abstracts of papers which have been accepted for publication either by this or some other journal.

This review refers to the contents of volume 2, No. 2/3 (1969) of the mentioned journal. All the papers of this issue are dedicated to a famous mathematician A. M. Ostrowski on the occasion of his 75th birthday. The expository paper "Non-negative definite solutions of certain differential and functional equations" by E. Lukács gives a survey of some functional equations which are of great importance in probability theory. The section "Research Papers" includes more articles on functional equations. Thus, Z. Dároczy in "Über ein Funktionalgleichungssystem der Informationstheorie" studies the functional equations for an axiomatic treatment of information theory, M. Hosszú in "A remark on the square norm" gives solutions of the functional equation of the norm in pre-Hilbert space, M. Kuczma in "Some remarks on a functional equation characterising the root" shows that the single algebraic solutions of $\varphi(x^{p+1}) = x\varphi(x)$ are $\varphi(x) = c\sqrt[p]{x}$, W. Eichhorn in "Funktionalgleichungen in Vektorräumen, Kompositionsalgebren und Systeme partieller Differentialgleichungen" examines some functional equations in vector spaces, W. Maier and A. Effenberger in "Additive Inhaltsmasse im positive gekrümmten Raum" investigate the functional equation of volumeric additivity, and R.R. Coifman and M. Kuzcma in "On asymptotically regular solutions of a linear functional equation" give the general solution φ of $\varphi[f(x)] - \varphi(x) = h(x)$. Among other papers of the same section the following two call attention: "Sur le reste de certaines formules de quadrature" by T. Popoviciu, where he studies the remainder not necessarily of simple form for certain quadrature formulae, and "Über die Koebesche Konstante $\frac{1}{4}$" by K. Szilárd, where the constant $\frac{1}{4}$ is diminished for a class of weak univalent functions.

The section "Reports and Meetings" contains the Report of Sixth Annual Meeting on Functional Equations (Oberwolfach, June 17–22, 1968). In this Meeting 36 mathematicians from 10 countries took part. From Rumania 6 persons participated. The communication of M. N. Oğuztöreli "A class of functional equations in optimal control theory" calls attention. The section "Problems and Solutions" includes 16 problems and solutions for other 5 problems. Among papers of section "Short Communications", "A sine functional equation" by J. A. Baker, and "On homomorphisms of the general linear group" by D.Ž. Djoković are of a particular interest.

The journal "Aequationes Mathematicae" offers a very interesting material for readers from Rumania, a country with recognized traditions in functional equations.

IOAN MUNTEAN

J. Aczél, **On Applications and Theory of Functional Equations.** (Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkte aus. Band 5). Basel-Stuttgart. Birkhäuser Verlag, 1969. 64 p.

Le livre du Prof. J. Aczél contient deux articles qui peuvent servir comme introduction à la théorie des équations fonctionnelles, mais qui sont aussi intéressants par les résultats récents obtenus par l'auteur et ses élèves. À la fin de chaque article on trouve une bibliographie des travaux cités.

I. *On Applications and Theory of Functional Equations.* L'auteur rappelle que les applications des équations fonctionnelles ont eu leur point de départ des trois travaux de d'Alembert (1747, 1750, 1769), deux se rapportant à la corde vibrante et qui conduisaient à l'équation $f(x + y) - f(x - y) = g(x)h(y)$ et le troisième sur la règle de „parallélogramme des forces". En tenant compte des résultats de d'Alembert, Poisson (1804), Picard (1928), Aczél (1966) et d'autres, on obtient une justification axiomatique de cette règle. On constate qu'on accède à l'équation de d'Alembert $g(u + v) + g(u - v) = 2g(u)g(v)$ et à l'équation de Cauchy $f(x + y) = f(x) + f(y)$, la dernière étant discutée pour différentes hypothèses sur la fonction inconnue $f(x)$ (continuité, mesurabilité, etc.) en montrant qu'il y a aussi des solutions discontinues représentées à l'aide des bases Hamel (1905). Ensuite on considère l'équation $f(ax + by + c) = pf(x) + qf(y) + r$ $(abpq \neq 0)$, pour laquelle la solution générale a été donnée par Daróczy (1961) et Losonczi (1964). Les équations précédentes sont des cas particuliers de l'équation $f(x + y) = F[f(x), f(y)]$ pour laquelle Cacciopoli (1928) et Aczél (1949, 1953) ont montré que dans certaines conditions, elle admet des solutions continues. Un autre cas particulier de la même équation est l'équation $f(x + y) = f(x)f(y)$ (Cauchy) qui admet les solutions continues (mesurables, bornés inférieurement) $f(x) = 0$ et $f(x) = e^{cx}$, où c est une constante arbitraire. Deux applications sont réduites aux équations Cauchy, à savoir, la définition axiomatique de l'aire d'un rectangle et une équation qui caractérise, dans la théorie des probabilités, une distribution composée Poisson.

L'auteur montre ensuite que les équations Cauchy-Pexider $f(x + y) = g(x) + h(y)$, $f(x + y) = \varphi(y)f(x) + \psi(y)$ ont d'importantes applications dans la théorie des valeurs moyennes, des objets géométriques et dans la théorie de l'information.

Un paragraphe est affecté aux méthodes générales pour la résolution d'équations fonctionnelles, méthodes fondées soit sur la dérivabilité, donc en les réduisant à des équations différentielles (Abel-1823, Kiesewetter-1957), soit sur l'intégrabilité (Kac-1939), soit en utilisant les distributions (Fenyő-1956).

Finalement on donne un théorème d'unicité (Aczél-1964) pour l'équation $f[F(x, y)] = H[f(x), f(y), x, y]$.

II. *International Meeting on Functional Equations. What are anyway?* L'auteur traite deux problèmes de la théorie des équations fonctionnelles discutées à la 5-ème conférence annuelle des équations fonctionnelles (Waterloo, Ont., Canada, 1967).

D'abord on démontre que toutes les solutions bornées inférieurement (ou supérieurement) sur un certain intervalle, de l'équation fonctionnelle de Cauchy $f(x + y) = f(x) + f(y)$ sont de la forme cx, où c est une constante. Avec la même hypothèse, on montre que x^k (k arbitraire) est la seule solution de l'équation $f(xy) = f(x)f(y)$ $(x > 0,\ y > 0)$. Les résultats sont utilisés dans les autres paragraphes.

Le premier problème se rapporte à l'équation des „isomoments", qui intervient dans la statistique,

$$h\left(\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m}{n}\right) = \frac{h^m(x_1) + h^m(x_2) + \ldots + h^m(x_n)}{n}$$

pour laquelle S. Kotz (1965), dans l'hypothèse de la continuité de la fonction $h(x)$, a montré qu'elle a les solutions 0 ; 1 et x, et pour m paire aussi les solutions -1 et $-x$. L'auteur prouve que les mêmes solutions s'obtiennent sans l'hypothèse de continuité.

Le deuxième problème se réfère à certaines généralisations de l'équation fonctionnelle d'Euler $F(tx, ty) = t^k F(x,y)$ $(x > 0,\ y > 0,\ t > 0)$ qui pour k fixe, caractérise les fonctions homogènes. Sa solution générale est $F(x, y) = x^k g\left(\frac{y}{x}\right)$, où g est une fonction arbitraire. Dans la théorie de la production économique (W. Eichorn) on cherche des solutions de l'équation de Euler satisfaisant aussi à d'autres conditions, mais qui font que l'ensemble de ces solutions devient vide. On a essayé de remplacer cette équation par une de ces généralisations. La meilleure qui a été trouvée est $F(tx, ty) = H\left(t, \frac{y}{x}\right)F(x, y)$, où $x > 0$, $y > 0$ et $t > 0$ et la fonction H est bornée inférieurement, sur un certain intervalle de la variable t, par une constante. Dans ces conditions on trouve $H(t, z) = t^{kz}$ et $F(x, y) = x^{k(x/y)}\, g\left(\frac{y}{x}\right)$, où k et g sont des fonctions arbitraires.

En concluant, il faut relever le grand nombre d'applications dans divers domaines, ce qui suggère au lecteur la possibilité d'autres utilisations. On estime de ce fait que le livre du Prof. J. Aczél est très utile pour un large cercle de lecteurs.

N. GHIRCOIAŞIU

H. G. Garnir, M. De Wilde et J. Schmets, **Analyse fonctionnelle. Théorie constructive des espaces linéaires à semi-normes. Tome I, Théorie générale.** 562 pages, 1968, Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart.

Comme il est indiqué dans l'introduction de cet ouvrage l'analyse fonctionnelle est exposée par les auteurs dans le cadre de la théorie des espaces linéaires à semi-normes ou espaces vectoriels topologiques localement convexes.

En utilisant systématiquement les semi-normes on attribue un rôle prépondérant aux méthodes analytiques et on introduit le minimum de topologie nécessaire. On utilise des raisonnements constructifs généralement admis en analyse. Les auteurs n'invoquent pas l'axiome du choix non dénombrable. La lecture de l'ouvrage n'exige que des connaissances d'analyse élémentaire bien connues des livres classiques. Nous citons pour orienter le lecteur les livres suivants: H. G. Garnir, *Fonctions de variables réelles*, Tome I et II. Gauthier-Villars, Paris, 1963, 1965; H. G. Garnir, J. Gobert, *Fonctions d'une variable complexe*, Dunod, Paris, 1965.

Pour orienter les lecteurs de cet ouvrage dans les problèmes traités, nous signalons que l'ouvrage est divisé en trois livres:

Livre I. Espaces linéaires à semi-normes.

I. Espaces linéaires
II. Semi-normes
III. Convergence
IV. Ouverts et fermés
V. Bornés
VI. Précompacts, compacts et extractables
VII. Espaces particuliers
VIII. Limites inductives, produit quotient

Livre II. Dual d'un espace linéaire à semi-normes.

I. Fonctionnelles linéaires
II. Fonctionnelles linéaires bornées
III. Espace affaibli E_a
IV. Duaux
V. Duaux particuliers
VI. Espaces nucléaires
VII. Fonctionnelles bilinéaires et produits tensoriels
VIII. Espaces complexes modulaires
IX. Fonctionnelles multiplicatives

Livre III. Opérateurs dans les espaces linéaires à semi-normes.

I. Opérateurs linéaires
II. Espace d'opérateurs bornés
III. Fonctions définies dans un espace euclidien et à valeurs dans un espace linéaire à semi-normes
IV. Théorie spectrale des opérateurs bornés

Les auteurs préparent un second Tome concernant les théories particulières: Théorie de la mesure, étude monographique des espaces linéaires à semi-normes particuliers et théorie des espaces de Hilbert.

L'impression de cet ouvrage par la maison Birkhäuser Verlag est parfaite. C'est un vrai plaisir de lire ce livre d'une valeur mathématique remarquable et sous une forme si agréable.

D. V. IONESCU et IOAN A. RUS

Daniel Ponasse, **Logique mathématique**, O.C.D.L., Paris, 1967 (164 pages).

Cet ouvrage est une introduction à la logique mathématique, qui se propose de présenter les deux calculs logiques fondamentaux, le calcul propositionnel et celui des prédicats du premier ordre. Ces calculs sont étudiés parallèlement, ou même là où celà est possible, simultanément. L'auteur étudie avec une clairté remarquable les principaux aspects de ces calculs: l'aspect syntactique, l'aspect sémantique, l'aspect ensembliste qui conduit à l'étude des systèmes déductifs et enfin les aspects algébrique et topologique.

Une énumération des chapitres précisera le contenu de ce volume: I. Aspect syntactique des calculs propositionnel et des prédicats; II. Aspect sémantique (problèmes de compatibilité et d'indépendance); Aspect ensembliste (notions de déductibilité, systèmes déductifs); IV. Problèmes de complétude (sémantique et syntactique); V. Aspect algébrique (étude générale des anneaux booléiens, applications aux calculs logiques); VI. Aspect topologique (étude générale des espaces booléiens, applications au calcul propositionnel); VII. Problèmes de complétude dans le calcul des prédicats; VIII. Calcul des prédicats avec égalité.

Le volume est completé par une bibliographie, contenant 17 titres, par un index des notations et un index terminologique.

Ce livre ne suppose aucune connaissance préalable de logique et les éléments de théorie des ensembles, d'algèbre et de topologie ne dépassent pas le niveau des étudiants en dernière année de leurs études universitaires. Cependant la multilatéralité des problèmes exposés dans cet ouvrage, son style profond et moderne, le font recommandable non seulement à tous ceux qui désirent avoir une voie d'accès solide vers la logique mathématique, mais aussi aux mathématiciens formés.

M. FRODA-SCHECHTER et I. GY. MAURER

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI
Str. M. Kogălniceanu, 1, CLUJ (Republica Socialistă România)

NUMERE APĂRUTE — ВЫШЕДШИЕ НОМЕРА — NUMEROS PARUS — ISSUED NUMBERS — ERSCHIENENE NUMMERN

1956

BULETINUL UNIVERSITĂŢILOR „V. BABEŞ" ŞI „BOLYAI" CLUJ, Seria Ştiinţe sociale, vol. I, nr. 1—2

A KOLOZSVÁRI BABES ÉS BOLYAI EGYETEMEK KÖZLEMÉNYEI, társadalomtudományi sorozat, I. évfolyam, 1—2. szám

1957

BULETINUL UNIVERSITĂŢILOR „V. BABEŞ" ŞI „BOLYAI" CLUJ, Seria Ştiinţele naturii, vol. II, nr. 1—2

A KOLOZSVÁRI BABEŞ ÉS BOLYAI EGYETEMEK KÖZLEMÉNYEI, természettudományi sorozat, II. évfolyam, 1—2. szám

1958

STUDIA UNIVERSITATUM VICTOR BABEŞ ET BOLYAI, Tomus III

Nr. 1, Series III Fasciculus 1, Philosophia
Nr. 2, Series III Fasciculus 2, Iurisprudentia
Nr. 3, Series I Fasciculus 1, Mathematica
Nr. 4, Series I Fasciculus 2, Chemia
Nr. 5, Series II Fasciculus 1, Geologia—Geographia
Nr. 6, Series IV Fasciculus 1, Philologia
Nr. 7, Series II Fasciculus 2, Biologia
Nr. 8, Series IV Fasciculus 2, Historia

1959

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI

Series I Fasciculus 1, Physica
Series I Fasciculus 2, Chemia
Series II Fasciculus 1, Geologia—Geographia
Series II Fasciculus 2, Biologia
Series III Fasciculus 1, Psychologia—Paedagogia
Series III Fasciculus 2, Iurisprudentia
Series IV Fasciculus 1, Historia
Series IV Fasciculus 2, Philologia

1960

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI

Series I Fasciculus 1, Mathematica—Physica
Series I Fasciculus 2, Chemia
Series II Fasciculus 1, Geologia—Geographia
Series II Fasciculus 2, Biologia

Series III Fasciculus 1, Philosophia et Oeconomica
Series III Fasciculus 2, Iurisprudentia
Series IV Fasciculus 1, Historia
Series IV Fasciculus 2, Philologia

1961

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI

Series I Fasciculus 1, Mathematica—Physica
Series I Fasciculus 2, Chemia
Series II Fasciculus 1, Geologia—Geographia
Series II Fasciculus 2, Biologia
Series III Fasciculus 1, Psychologia—Paedagogia
Series III Fasciculus 2, Oeconomica et Iurisprudentia
Series IV Fasciculus 1, Historia
Series IV Fasciculus 2, Philologia

1962, 1963, 1964, 1965

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI

Series Mathematica—Physica, fasciculus 1
Series Mathematica—Physica, fasciculus 2
Series Chemia, fasciculus 1
Series Chemia, fasciculus 2
Series Geologia—Geographia, fasciculus 1
Series Geologia—Geographia, fasciculus 2
Series Biologia, fasciculus 1
Series Biologia, fasciculus 2
Series Philosophia et Oeconomica
Series Psychologia-Paedagogia
Series Iurisprudentia
Series Historia, fasciculus 1
Series Historia, fasciculus 2
Series Philologia, fasciculus 1
Series Philologia, fasciculus 2

1966, 1967, 1968, 1969

STUDIA UNIVERSITATIS BABEŞ—BOLYAI

Series Mathematica—Physica, fasciculus 1
Series Mathematica—Physica, fasciculus 2
Series Chemia, fasciculus 1
Series Chemia, fasciculus 2
Series Geologia—Geographia, fasciculus 1
Series Geologia—Geographia, fasciculus 2
Series Biologia, fasciculus 1
Series Biologia, fasciculus 2
Series Philosophia
Series Oeconomica
Series Psychologia-Paedagogia
Series Iurisprudentia
Series Historia, fasciculus 1
Series Historia, fasciculus 2
Series Philologia, fasciculus 1
Series Philologia, fasciculus 2

Intreprinderea Poligrafică Cluj — 857/1970

În cel de al XV-lea an de apariție (1970) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* cuprinde seriile:

matematică-mecanică (2 fascicule);
fizică (2 fascicule);
chimie (2 fascicule);
geologie—mineralogie (2 fascicule);
geografie (2 fascicule);
biologie (2 fascicule);
filozofie;
sociologie;
științe economice (2 fascicule);
psihologie—pedagogie;
științe juridice;
istorie (2 fascicule);
lingvistică—literatură (2 fascicule).

На XV году издания (1970) *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* выходит следующими сериями:

математика—механика (2 выпуска);
физика (2 выпуска);
химия (2 выпуска);
геология—минералогия (2 выпуска);
география (2 выпуска);
биология (2 выпуска);
философия;
социология;
экономические науки (2 выпуска);
психология—педагогика;
юридические науки;
история (2 выпуска);
языкознание—литературоведение (2 выпуска).

Dans leur XV-me année de publication (1970) les *Studia Universitatis Babeș—Bolyai* comportent les séries suivantes:

mathématiques—mécanique (2 fascicules);
physique (2 fascicules);
chimie (2 fascicules);
géologie—minéralogie (2 fascicules);
géographie (2 fascicules);
biologie (2 fascicules);
philosophie;
sociologie;
sciences économiques (2 fascicules);
psychologie — pédagogie;
sciences juridiques;
histoire (2 fascicules);
linguistique—littérature (2 fascicules).