

ALGORITHME DE CONSTRUCTION D'UN GRAPHE PERT À PARTIR D'UN GRAPHE DES POTENTIELS DONNE

NASSER EDDINE MOUHOU, HOCINE BELOUADAH, AND ABDELHAK BOUBETRA

Résumé : On présente dans ce papier, dans les problèmes d'ordonnement de projet, un algorithme original de construction d'un graphe PERT à partir d'un graphe des potentiels donné en utilisant les notions de graphes adjoints de graphes.

Mots clés : Graphe adjoint de graphe, ordonnancement, méthode des potentiels, méthode PERT, méthode de construction de graphes.

1 Introduction [KEY 61] [CRA 97] [DAL 01] [ESQ 99]

Les problèmes d'ordonnement sont définis par la donnée d'un certain nombre d'opérations (les tâches) et des contraintes de succession entre ces tâches, ainsi que les durées de ces tâches.

Plusieurs méthodes de modélisation existent actuellement. On peut citer entre autres: le diagramme de Gantt, la méthode des potentiels et la méthode PERT. Ces deux dernières utilisent comme moyen de modélisation la théorie des graphes ; et plus particulièrement le réseau.

Dans le graphe des potentiels (appelé également graphe potentiels tâches), les tâches sont symbolisées par des sommets auxquels on donne le même code, 2 sommets u et v sont reliés par un arc de u vers v si et seulement si la tâche u précède la tâche v .

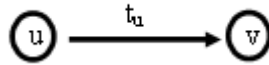


FIGURE 1. La tâche u , de durée $t(u)$, précède la tâche v

Dans le graphe PERT alors, appelé graphe potentiels-étapes, une tâche est représentée par un arc auquel on donne le même code, deux arcs u et v tels que $T(u) = I(v)$ si et seulement si la tâche u précède la tâche v . Les extrémités initiale et terminale d'un arc sont respectivement les événements début de tâche

Received by the editors: March 22, 2006.

et fin de tâche, elles sont appelées étape. Les durées sont portées sur les arcs correspondants.

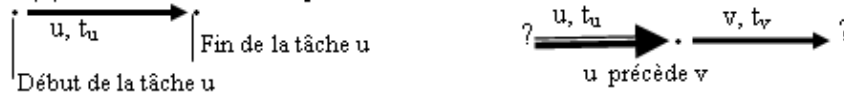


FIGURE 2. La tâche u précède la tâche v dans le graphe PERT.

Si le graphe de la méthode des potentiels et celui de la méthode PERT sont très proches, ce n'est pas toujours le cas. La construction du graphe PERT pose des problèmes qui amènent à ajouter des arcs fictifs (virtuels ou artificiels) qui ne correspondent à aucune tâche [ROY 70]. L'introduction des tâches fictives permet de solutionner certaines situations et de lever des ambiguïtés. Elles ne mettent en jeu aucun moyen matériel ou financier.

2 Liens entre graphe des potentiels et graphe PERT

Tenant compte de la simplicité de dessin du graphe des potentiels qui est unique, on est amené à étudier la construction d'un graphe PERT à partir du graphe des potentiels. L'opportunité de cette idée réside dans le fait que les praticiens préfèrent travailler avec le graphe PERT qui est plus clair (chaque tâche est représentée par un arc), alors que le graphe des potentiels est encombrant vu le nombre important des arcs.

Le problème de passage du graphe des potentiels au graphe PERT a été largement étudié citons entre autres, A.C FISHER [FIS 68], M.HAYES en 1969 et F.STERBOUL [STE 81] qui se sont basés sur la notion de graphe arc-dual.

Nous présenterons alors, une nouvelle méthode pour la construction du PERT à partir du graphe des potentiels, qui est basée sur le principe de graphes adjoints des graphes.

3 Le graphe adjoint de graphe

Soit $G=(X, U)$ un graphe orienté simple ou multiple. On construit à partir de G un graphe ou 'line graphe' noté $L(G)$, appelé graphe adjoint (ou graphe représentatif des arcs) de G comme suit : Les sommets de $L(G)$ sont en correspondance biunivoque avec les arcs de G . Pour des raisons de simplicité, on donne le même nom aux arcs de G et aux sommets correspondants de $L(G)$.

2 sommets u et v de $L(G)$ sont reliés par un arc de u vers v si et seulement si les arcs u et v de G sont tels que l'extrémité terminale de u coïncide avec l'extrémité initiale de v c.à.d. $T(u)= I(v)$ [AIG 67] .

Par la définition, tout graphe G admet un graphe adjoint $L(G)$ unique. Par contre, deux graphes non isomorphes peuvent avoir le même graphe adjoint.

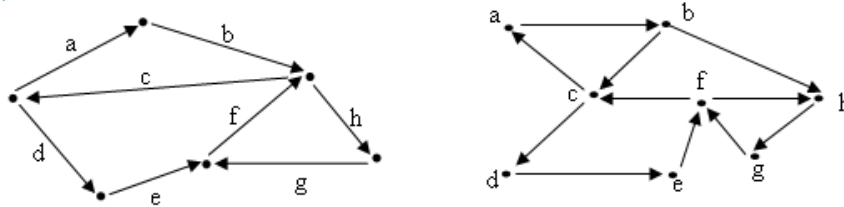


FIGURE 3. Un graphe G et son graphe adjoint L(G)

3.1 Le problème inverse : [MOU 02]

On pose le problème inverse suivant:

Etant donné un graphe H, est-il le graphe adjoint d'un graphe? Autrement dit, existe-t-il un graphe G tel que L(G) soit isomorphe à H, où $H = L(G)$? Avant de répondre à cette question, donnons la définition d'une configuration "Z".

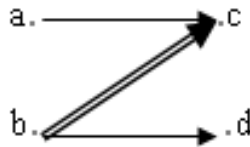


FIGURE 4. La configuration "Z"

3.1.1 Définition : G admet une configuration "Z" (qui est un sous graphe de G) si G contient 4 sommets a,b,c et d tels que si (a,c), (b,c) et (b,d) sont des arcs de G, alors (a,d) n'est pas un arc de G.

Dans le seul but de simplicité, on donnera le nom de barre du "Z" l'arc (b,c). La configuration "Z" apparaît lorsque 2 sommets ont des successeurs communs et des successeurs non communs ou par symétrie lorsque 2 sommets ont des prédécesseurs communs et des prédécesseurs non communs.

3.2 Quelques caractérisations des graphes adjoints : [AIG 67] [BER 73] [MOU 02]

Les graphes adjoints ont été très étudiés mais nous ne donnons dans cet article que les résultats qui nous intéressent.

1. H est le graphe adjoint d'un graphe si et seulement si H ne contient aucune configuration 'Z'.
2. H est le graphe adjoint d'un graphe G si et seulement si les arcs de H peuvent

être partitionnés en bipartis complets $B_i = (X_i, Y_i)$, $i=1.., m$, tels que

$$(1) \quad X_i \cap X_j = \emptyset \text{ et } Y_i \cap Y_j = \emptyset, \quad \forall i \neq j$$

Les bipartis B_i de H sont alors en bijection avec les sommets notés aussi B_i qui ne sont ni sources ni puits.

Deux sommets B_i et B_j de G étant reliés par un arc de B_i vers B_j si et seulement si les bipartis complets B_i et B_j de H sont tels que $Y_i \cap X_j = \emptyset$

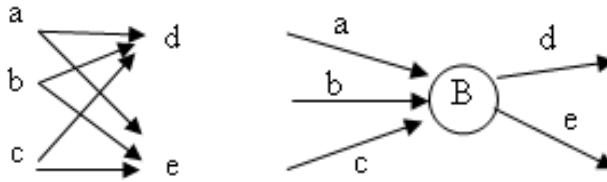


FIGURE 5. Un biparti complet B de H et l'étoile de G associée à B

Exemple:

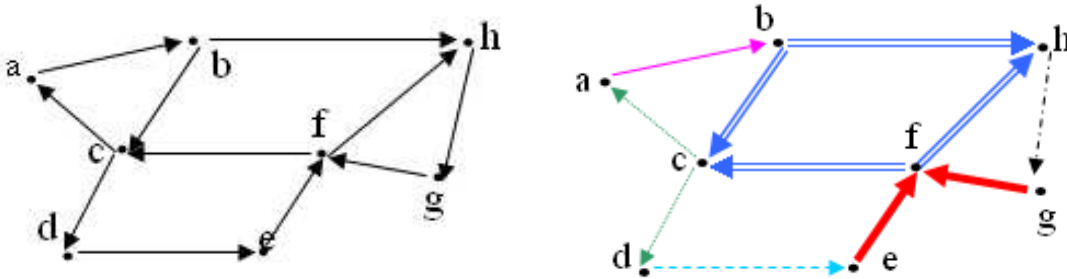


FIGURE 6. un graphe H et la partition de ses arcs en bipartis complets. Les arcs de chaque couleur représentent un biparti complet.

Supposons que le graphe H est le graphe adjoint d'un graphe G qu'on doit chercher. Pour cela, partitionnons les arcs de H en bipartis complets (figure6) et qui sont :

- $B_1 = \{ (a), (b) \}$
- $B_2 = \{ (c), (a,d) \}$
- $B_3 = \{ (d), (e) \}$
- $B_4 = \{ (e,g), (f) \}$
- $B_5 = \{ (b,f), (c,h) \}$
- $B_6 = \{ (h), (g) \}$

Le graphe G résultant tel que $H=L(G)$ est: (Figure7).

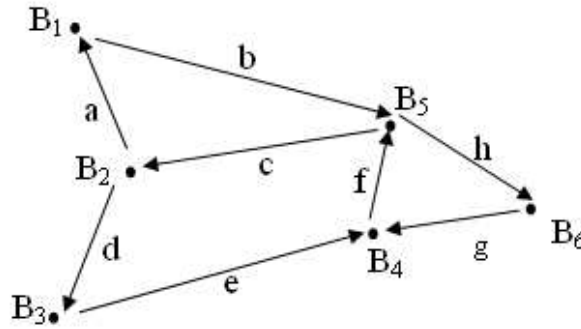


FIGURE 7. Le graphe G tel que $H = L(G)$

3. H est le graphe adjoint d'un graphe sans boucles si et seulement si H ne contient aucune configuration " Z " .
4. H est le graphe adjoint d'un graphe si et seulement si toute paire de sommets ayant des successeurs communs ont tous leurs successeurs communs.
5. H est le graphe adjoint d'un graphe si et seulement si toute paire de sommets ayant des prédécesseurs communs ont tous leurs prédécesseurs communs.

Ainsi H n'est le graphe adjoint d'aucun graphe si est seulement s'il existe une paire de sommets ayant des successeurs communs et des successeurs non communs ou des prédécesseurs communs et des prédécesseurs non communs (présence de Z).

4 Passage du graphe des potentiels au graphe PERT

A cause de la facilité d'utiliser le graphe PERT, on doit se concentrer sur l'étude de la possibilité de transformer le graphe des potentiels (nombre d'arcs important) au graphe PERT (nombre d'arcs réduit). On se pose alors le problème de savoir comment transformer H (qui est le graphe des potentiels) pour en faire un nouveau graphe qui est le graphe G (graphe PERT).

Le problème qui se pose, est ce que H contient des configurations Z ou non ? S'il ne contient pas des Z il est alors adjoint et la transformation est immédiate. Mais s'il contient des Z on est amené à éliminer la barre de chaque Z préservant naturellement les contraintes de succession. Etudions chaque cas à part :

4.1 Le graphe des potentiels est un graphe adjoint :

Construisons le graphe PERT à partir du graphe des potentiels dans le cas où celui-ci est un graphe adjoint (absence des Z).

En vertu des résultats du paragraphe 3.2., on procède comme suit : On partitionne

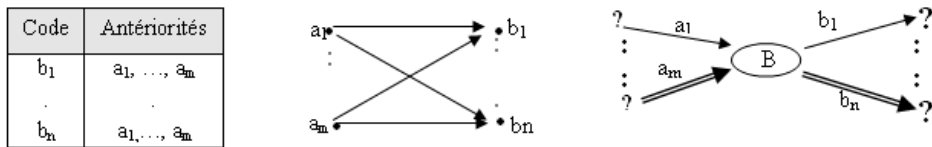
les arcs du graphe des potentiels en bipartis complets $B_i = (X_i, Y_i)$. Dans le graphe PERT que l'on veut construire, chaque B_i est représenté par un sommet encore noté B_i et sera le centre de l'étoile (voir exemple et figures 6,7.).

4.2 Le graphe des potentiels n'est pas un graphe adjoint

La construction du graphe PERT est cependant plus complexe dans le cas général où le graphe des potentiels n'est pas un graphe adjoint : il n'admet pas de partition des arcs en bipartis complets (à cause de la présence des Z). C'est dans ce cas qu'on doit le modifier afin de le transformer en graphe adjoint en préservant les contraintes d'antériorités.

Supposons que les tâches a_1, \dots, a_m précèdent les tâches b_1, \dots, b_n .

Dans le graphe des potentiels, ces contraintes d'antériorité sont représentées par un biparti complet. Dans le graphe PERT, elles sont représentées par une étoile.



(a). Le sous-tableau des antériorités de b_1, \dots, b_n

(b) Le biparti complet $B = (\{a_1, \dots, a_m\}, \{b_1, \dots, b_n\})$ dans le graphe des potentiels

(c). Le sommet B du graphe PERT correspondant au biparti B .

FIGURE 8. Correspondance entre un biparti complet du graphe des potentiels et une étoile du graphe PERT.

Revenons au problème de tâche fictive dans le graphe PERT. Si on a par exemple 4 tâches a, b, c et d avec les contraintes d'antériorité suivantes : a et b précèdent c , mais d est précédée par b uniquement. Dans le graphe des potentiels, il n'y a aucun problème pour la représentation de ces tâches. Elle est faite comme dans la figure 9 [CAR 88]. Or, pour le passage du graphe des potentiels (qui est considéré comme le graphe adjoint H), on est obligé à éliminer toutes les configurations " Z ". On introduit alors, dans le graphe des potentiels une tâche fictive f dans tout Z :

L'introduction des tâches fictives vise donc à éliminer toutes les configurations " Z " du graphe des potentiels, les contraintes restant inchangées. Il faut rappeler que les tâches fictives ne sont nullement nécessaires dans le graphe des potentiels mais ne sont introduites que pour construire le graphe PERT.

Une technique simple d'élimination consiste à remplacer la barre (b,c) de tout " Z " par deux arcs (b,f) et (f,c), selon la figure 9. f étant un sommet fictif.

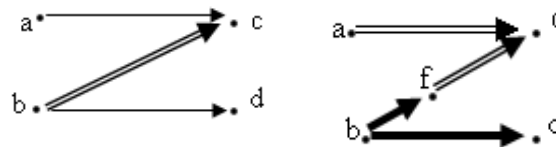


FIGURE 9. Représentation de Z et sa transformation en bipartis complets dans le graphe des potentiels.

5 Algorithmme

Soit G_v un graphe des potentiels qui doit être orienté, valué, connexe et sans circuit. G_v étant un graphe conjonctif, organisé en niveaux. On veut construire le graphe PERT correspondant qui est appelé G_e .

Début

Si G_v contient des configurations Z. **Alors**

Repérer les Z_i ($i = 1, 2, \dots, m$)

Pour i allant de 1 à m **Faire**

- Créer le sommet f_i dans G_v
- Remplacer la barre (b_i, c_i) de Z_i dans G_v par $(b_i, f_i), (f_i, c_i)$

Fpour

Fsi

- Repérer les bipartis dans G_v
- Représenter chaque biparti B_i dans G_v par un sommet B_i dans G_e
- Représenter les arcs de façon que :
Un arc est dessiné entre 2 sommets B_i et B_j dans G_e ssi les 2 bipartis B_i et B_j dans G_v sont tels que $Y_i \cap X_j = \emptyset$.

Fin

FIGURE 10

L'algorithme se termine puisque la boucle pour n'est exécutée que dans le cas de présence de Z et le nombre de Z dans G_v est fini il ne peut en aucun cas être infini. L'élimination d'un Z est immédiate et elle est faite en une seule étape. Il suffit de repérer la barre de Z et la remplacer par deux arcs.

Les trois étapes suivantes ne traitent que la réorganisation des arcs et des sommets en bipartis, ensuite les transformer en étoiles comme on l'a vu précédemment (voir section 4.2).

Pour la complexité de l'algorithme, cela dépend de la structure de données proposée au départ pour la représentation du graphe ainsi que la structure de donnée qui héberge le graphe PERT.

6 Exemple

Considérons le tableau des contraintes suivant et le graphe des potentiels associé, les durées n'étant pas représentées:

Ayant repéré les " Z " dans le graphe des potentiels, on introduit les tâches fictives

Codes	Antériorités
α	-
A	α
B	α
C	A,B
D	A,B
E	B
F	C
G	D,E
H	D,E
I	F
J	F,G,H
K	G,H
w	I,J,K

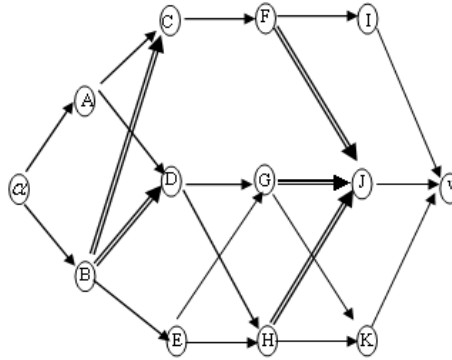


FIGURE 11. Table des antériorités T et Le graphe des potentiels

selon la figure 12, puis l'on réorganise le graphe modifié en niveaux: Cherchons les bipartis complets du graphe des potentiels :

$$\begin{aligned}
 B1 &= (\{ \}, \{A, B\}), & B2 &= (\{B\}, \{E, f1\}), & B3 &= (\{A, f1\}, \{C, D\}), \\
 B4 &= (\{C\}, \{F\}), & B5 &= (\{D, E\}, \{G, H\}), & B6 &= (\{F\}, \{f2, I\}), \\
 B7 &= (\{G, H\}, \{f3, K\}), & B8 &= (\{f2, f3\}, \{J\}), & B9 &= (\{I, J, K\}, \{w\}),
 \end{aligned}$$

7 Conclusion

Ce travail vient d'élaborer un algorithme original qui introduit les graphes adjoints dans les problèmes d'ordonnement de projet avec ou sans la présence des " Z " dans le graphe de potentiels et ceci pour la construction d'un graphe PERT. Il ouvre la voie à des perspectives, telles que l'optimisation de l'algorithme proposé

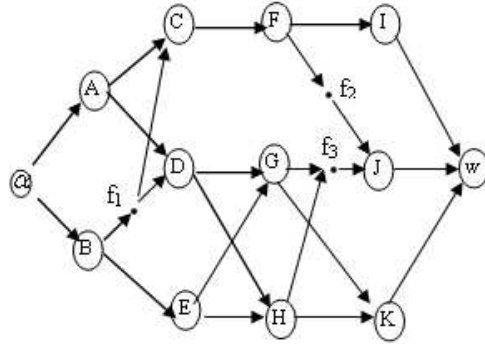


FIGURE 12. Le graphe des potentiels modifié par l'introduction des tâches fictives f_i .

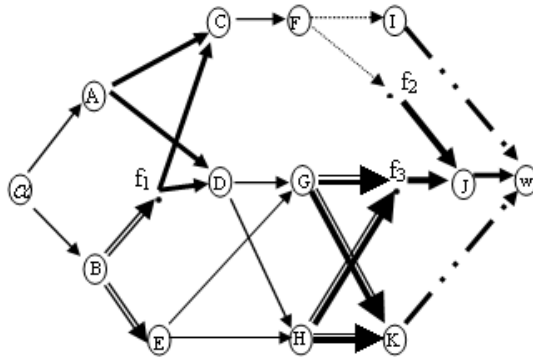


FIGURE 13. Le graphe des potentiels modifié avec réorganisation des tâches en niveaux et partition des arcs en bipartis complets.

pour réduire le nombre de tâches fictives, le traitement des contraintes de localisation temporelle (appelées également contraintes de durée) et l'algorithme de recherche du graphe PERT minimal en nombre de tâches fictives et/ou en nombre de sommets.

Bibliographie

- [AIG 67] M. AIGNER, On the linegraph of a directed graphs, 1967.
 [BER 73] C. BERGE, Graphes et hypergraphes, DUNOD, Paris, 1973.

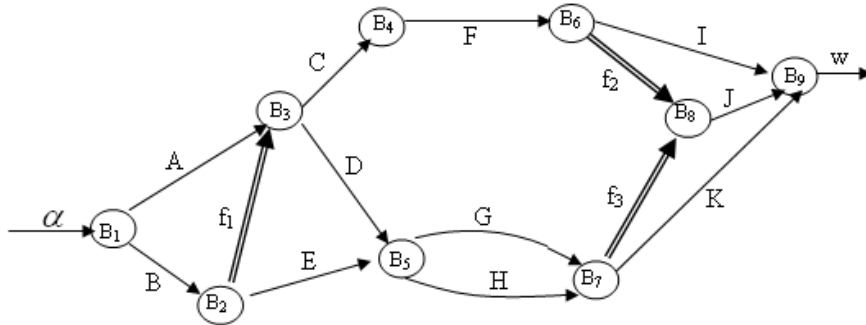


FIGURE 14. Construction du graphe PERT à partir du graphe des potentiels.

- [CAR 88] J. CARLIER et P. CHRETIENNE, Problèmes d'ordonnancement Modélisation, Complexité, Algorithmes, MASSON, Paris, 1988.
- [CRA 97] Y. CRAMA, L. DUPONT, G. FINKE, Recherche opérationnelle et gestion de la production, Nouvelles de la science et des technologies, 1997.
- [DAL 01] J. M. DALBARADE et B. PETIT-JEAN, Ordonnancement et gestion des projets, 2001.
- [ESQ 99] P. ESQUIROL et P. LOPEZ, L'ordonnancement, ECONOMICA, Paris, 1999.
- [FIS 68] A.C. FISHER, J.S. LIEBMAN et G.L. NEMHAUSER, Computer construction of project networks, Communications of ACM, volume 11, N 7, juillet 1969.
- [KEY 61] J. E.KELLEY, Critical-path planning and scheduling mathematical basis, 1961.
- [MOU 02] N. MOUHOUB, Vers le graphe PERT minimal, thèse de Magister, Université de Sétif, 2002
- [ROY 70] B. ROY, Algèbre moderne et théorie des graphes, tome 2, fascicule 3, Problèmes d'ordonnancement et ensembles de potentiels sur un graphe, DUNOD, Paris, 1970.
- [STE 81] F.STERBOUL, et D.WERTHEIMER, Comment construire un graphe PERTminimal, RAIRO, 1981.

INSTITUT D'INFORMATIQUE, CENTRE UNIVERSITAIRE DE BORDJ BOU ARRÉRIDJ, ALGERIE
E-mail address: n.mouhoub@yahoo.fr

DÉPARTEMENT D'INFORMATIQUE, UNIVERSITÉ MED BOUDIAF M'SILA, ALGERIE

INSTITUT D'INFORMATIQUE, CENTRE UNIVERSITAIRE DE BORDJ BOU ARRÉRIDJ, ALGERIE