Rezolúció

Skolem forma

Definíció
A $\forall x_1 x_2 \ldots x_n A$ alakú formulát *univerzális Skolem-formá*nak nevezzük (*A* kvantormentes formula, a Skolem-forma *magja*, vagy *mátrixa*). Ha a Skolem-forma magja konjunktív normálforma, akkor a formulát *univerzális Skolem-normálformá*nak nevezzük.

Skolem tétel
Tetszőleges *A* formulához megszerkeszthető egy $\forall x_1 x_2 \ldots x_n B$ univerzális Skolem-forma úgy, hogy A akkor és csakis akkor ellentmondásos, ha a $\forall x_1 x_2 \ldots x_n B$ univerzális Skolem-forma is ellentmondásos, azaz

$$\dashv A \Leftrightarrow \dashv \forall x_1 x_2 \ldots x_n B$$

Megjegyzés
A két formula nem ekvivalens, *B* egy bővebb nyelvben van, mint *A*, tartalmazhat új konstans, illetve függvényszimbólumokat.

Szerkesztés (példa)

$$\dashv \forall x(\exists y \forall z P(x,y,z) \supset \exists z Q(y,z))$$

1. lépés: literál formára kell alakítani

$$\dashv \forall x(\neg \exists y \forall z P(x,y,z) \vee \exists z Q(y,z))$$

$$\dashv \forall x(\forall y \exists z \neg P(x,y,z) \vee \exists z Q(y,z))$$

2. lépés: kvantorok hatáskörének minimizálása

$$\dashv \forall x \forall y \exists z \neg P(x,y,z) \vee \exists z Q(y,z)$$

3. lépés: Skolemizálás – az egzisztenciális kvantoros előtagokat elhagyjuk, a kötött változót helyettesítjük
   - ha nincs univerzális kvantor hatáskörében, akkor egy új konstans-szimbólummal
   - ha univerzális kvantor hatáskörében van, akkor egy új függvény-szimbólummal, melynek argumentumai az univerzális kvantor(ok) által kötött változók

Pl. ha az eredeti nyelvben nincs *a* konstansszimbólum és *f*, *g* függvény-szimbólum:

$$\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\exists x}\forall y\underset{\substack{\uparrow\\ f(y)}}{\exists z}\forall t\underset{\substack{\uparrow\\ g(y,t)}}{\exists u}P(x,y,z,t,u) \to \forall y\forall tP(a,y,f(y),t,g(y,t))$$

Példa folytatása:

$$\dashv\ \forall x\forall y\underset{\substack{\uparrow\\ f(x,y)}}{\exists z}\neg P(x,y,z)\vee\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\exists z}Q(y,z)$$

$$\dashv\ \forall x\forall y\neg P(x,y,f(x,y))\vee Q(y,a)$$

4. lépés: változótiszta alakra hozzuk

$$\dashv\ \forall x\forall z\neg P(x,z,f(x,z))\vee Q(y,a)$$

5. lépés: kiemeljük az univerzális kvantorokat (egyoldali kiemelés)

$$\dashv\ \forall x\forall z(\neg P(x,z,f(x,z))\vee Q(y,a))$$

$$\dashv\ \forall x\, z\,(\neg P(x,z,f(x,z))\vee Q(y,a))$$

Példa:

$$
\begin{array}{ll}
\models \exists xy\forall z(R(x,y)\supset R(y,z)\wedge R(z,z)) & \text{– tagadás}\\
\Dashv \neg\exists xy\forall z(R(x,y)\supset R(y,z)\wedge R(z,z)) & \text{– literál alak}\\
\Dashv \forall xy\exists z\neg(\neg R(x,y)\vee(R(y,z)\wedge R(z,z))) & \\
\Dashv \forall xy\exists z(R(x,y)\wedge(\neg R(y,z)\vee\neg R(z,z))) & \text{– kvantorok}\\
\Dashv \forall xy(R(x,y)\wedge\exists z(\neg R(y,z)\vee\neg R(z,z))) & \quad\text{hatáskörének}\\
\Dashv \forall xy(R(x,y)\wedge(\exists z\neg R(y,z)\vee\exists z\neg R(z,z))) & \quad\text{csökkentése}\\
\Dashv \forall xyR(x,y)\wedge\forall xy(\exists z\neg R(y,z)\vee\exists z\neg R(z,z)) & \\
\Dashv \forall xyR(x,y)\wedge(\forall y\underset{\substack{\uparrow\\ f(y)}}{\exists z}\neg R(y,z)\vee\underset{\substack{\uparrow\\ a}}{\exists z}\neg R(z,z)) & \text{– Skolemizálás}\\
\Dashv \forall xyR(x,y)\wedge(\forall y\neg R(y,f(y))\vee\neg R(a,a)) & \text{– változótiszta}\\
\Dashv \forall xyR(x,y)\wedge(\forall z\neg R(z,f(z))\vee\neg R(a,a)) & \text{– kiemelés}\\
\Dashv \forall xyz(R(x,y)\wedge(\neg R(z,f(z))\vee\neg R(a,a))) &
\end{array}
$$

univerzális Skolem-normálforma

Legyen

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ t_1 & \dots & t_m \end{pmatrix}, \quad \mathrm{r}(\theta) = \mathrm{Fv}(t_1, \dots, t_m)$$

Herbrandt tétel

Egy $\forall x_1 x_2 \dots x_n B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ univerzális Skolem-forma akkor és csak akkor ellentmondásos, ha létezik véges számú $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ helyettesítés, amelyre $\mathrm{dom}\,\theta_i = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $\mathrm{r}(\theta_i) \subseteq \mathrm{Fv}(\forall x_1 x_2, \dots x_n B)$ és $B\theta_1 \wedge \dots \wedge B\theta_k$ hamis.

Példa:

$$\dashv \forall xyz(R(x,y) \wedge (\neg R(z,f(z)) \vee \neg R(a,a)))$$

legyen

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & a & a \end{pmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & f(a) & a \end{pmatrix}$$

$$(R(x,y) \wedge (\neg R(z,f(z)) \vee \neg R(a,a)))\theta_1 \wedge (R(x,y) \wedge (\neg R(z,f(z)) \vee \neg R(a,a)))\theta_2$$

$$\sim (R(a,a) \wedge (\neg R(a,f(a)) \vee \neg R(a,a))) \wedge$$

$$\wedge (R(a,f(a)) \wedge (\neg R(a,f(a)) \vee \neg R(a,a)))$$

$$\sim R(a,a) \wedge (\neg R(a,f(a)) \vee \neg R(a,a)) \wedge R(a,f(a))$$

$$\sim (R(a,a) \wedge R(a,f(a))) \wedge \neg(R(a,f(a)) \wedge R(a,a))$$

$$\sim \perp$$

Illesztő helyettesítés (unifikáció)

Helyettesítés

$$\theta = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix} \text{ vagy } \theta = \{x_1 / t_1, \dots, x_n / t_n\}$$

$$\mathrm{dom}(\theta) = \{x_1, \dots, x_n\}, \quad \mathrm{r}(\theta) = \mathrm{Fv}(t_1, \dots, t_n)$$

Üres helyettesítés:

$$\varepsilon = \{\}, \text{ azaz } \mathrm{dom}(\varepsilon) = \varnothing$$

Triviális kapcsolat: x / x

Helyettesítések kompozíciója (összetétele)

Legyenek $\theta = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ t_1 & \dots & t_n \end{pmatrix}$ és $\eta = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_m \\ s_1 & \dots & s_m \end{pmatrix}$ helyettesítések

$$(\theta\eta) = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & y_{i_1} & y_{i_2} & \dots & y_{i_k} \\ t_1\eta & \dots & t_n\eta & s_{i_1} & s_{i_2} & \dots & s_{i_k} \end{pmatrix},$$

ahol $\{y_{y_1}, y_{y_2}, \dots, y_{y_k}\} = \mathrm{dom}(\eta) \setminus \mathrm{dom}(\theta)$

Tulajdonságok:

$K(\theta\eta) = (K\theta)\eta \qquad$ (K – kifejezés)

$((\theta\eta)\xi) = (\theta(\eta\xi))$ – asszociatív

$(\theta\varepsilon) = (\varepsilon\theta) = \theta \qquad$ – ε semleges elem

Példa

$$\theta = \begin{pmatrix} x & y & \bar{x} \\ y & x & f(x,\bar{y}) \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad \eta = \begin{pmatrix} x & y & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ c & z & \bar{y} & \bar{x} & f(x,\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$(\theta\eta) = \begin{pmatrix} x & y & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ z & c & f(c,\bar{x}) & \bar{x} & f(x,\bar{x}) \end{pmatrix}$$

$$(\eta\theta) = \begin{pmatrix} x & y & \bar{x} & \bar{y} & \bar{z} \\ c & z & \bar{y} & f(x,\bar{y}) & f(y,f(x,\bar{y})) \end{pmatrix}$$

A kompozíció művelet nem kommutatív!

Illesztő helyettesítés

Legyen $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ azonos predikátumszimbólumot tartalmazó atomi formulák véges, nem üres részhalmaza. Az atomhalmaz *illesztő helyettesítése* olyan θ helyettesítés, amelyre $A_1\theta, A_2\theta, \ldots, A_k\theta$ atomi formulák rendre azonosak.

Az $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ halmaz atomi formuláit *egymáshoz illeszthető*knek nevezzük (unifikálható), ha van a halmazhoz illesztő helyettesítés.

Legyenek θ és η egy atomhalmaz illesztő helyettesítései. Az η *általánosabb* a θ illesztő helyettesítésnél, ha van olyan λ helyettesítés, amelyre $\theta = (\eta\lambda)$.

η az atomhalmaz *legáltalánosabb illesztő helyettesítése* (legáltalánosabb unifikátora), ha általánosabb az atomhalmaz tetszőleges illesztő helyettesítésénél.

Példa

$$S = \{P(a,x,h(g(z))), P(z,h(y),h(y))\}$$

legáltalánosabb illesztő helyettesítése:

$$\theta = \{x / h(g(a)), y / g(a), z / a\}$$

mert

$$\begin{array}{c} P(a,x,h(g(z)))\theta = P(a,h(g(a)),h(g(a))) \\ = \\ P(z,h(y),h(y))\theta = P(a,h(g(a)),h(g(a))) \end{array}$$

Herbrandt algoritmus (1935)
Bemenet:

$$\begin{cases} E_1 = F_1 \\ \quad\cdots \\ E_m = F_m \end{cases}$$ – atomi formulák formális egyenlőségei

Döntött rendszer:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 \\ \quad\cdots \\ x_k = t_k \end{cases},$$

ahol $x_1,\ldots,x_k$ különböző változók, és $x_1,\ldots,x_k$ nem szerepel egyetlen t_i termben sem.

Ha az eredeti formális egyenlőségrendszerből döntött rendszert lehet képezni, akkor $\theta = \{x_1 / t_1,\ldots,x_k / t_k\}$ a rendszer legáltalánosabb illesztő helyettesítése.

A bemeneti rendszerből döntött rendszert igyekszünk képezni.
Ha a rendszerben van:

a. $x = x$ – töröljük (x változó)

b. $c = c$ – töröljük (c konstansszimbólum)

c. $t = x \quad \to x = t$ (x változó, t term, nem változó)

d. $c = d$ – nincs illesztő helyettesítés (c,d különböző konst.)

e. $f(t_1,\dots,t_k) = g(s_1,\dots,s_l)$ – nincs illesztő helyettesítés (c,d különböző függvényszimbólumok)

f. $x = t(x)$ – nincs illesztő helyettesítés – *occur check* – (t nem változó)

g. $f(t_1,\dots,t_k) = f(s_1,\dots,s_k)$ vagy $P(t_1,\dots,t_k) = P(s_1,\dots,s_k)$ $\to \begin{cases} t_1 = s_1 \\ \cdots \\ t_k = s_k \end{cases}$

h. $x = t$, $x \notin \mathrm{Fv}(t)$ – a többi egyenlőségben x/t helyettesítés

Véges számú lépésben vagy döntött rendszert kapunk, vagy azt, hogy nincs legáltalánosabb helyettesítés

Példa

$$S = \{P(a, x, h(g(z))), P(z, h(y), h(y))\}$$

$$P(a, x, h(g(z))) = P(z, h(y), h(y)) \to$$

$$\to \begin{cases} a = z \\ x = h(y) \\ h(g(z)) = h(y) \end{cases} \to \begin{cases} z = a \\ x = h(y) \\ g(z) = y \end{cases} \xrightarrow{\{z/a\}} \begin{cases} z = a \\ x = h(y) \\ y = g(a) \end{cases} \xrightarrow{\{y/g(a)\}} \begin{cases} z = a \\ y = g(a) \\ x = h(g(a)) \end{cases}$$

Döntött rendszert kaptunk.
Legáltalánosabb illesztő helyettesítés:

$$\theta = \{x / h(g(a)), y / g(a), z / a\}$$

Robinson algoritmus

Legyen $S = \{E_1, \ldots, E_n\}$ azonos predikátumszimbólumot tartalmazó atomi formulák halmaza.

S formulahalmaz *különbségi halmaza* (összeférhetetlenségi halmaza): ballról jobbra haladva meghatározzuk az első olyan pozíciót, amelyen nem egyezik meg az összes E_i formula, és vesszük az összes, ezen a pozíción kezdődő, különböző (rész)termek halmazát.

Példa:

$$\begin{cases} P(x, g(\,\vert\, f(y,z), x)) \\ P(x, g(\,\vert\, a, g(y,z))) \\ P(x, g(\,\vert\, a, b)) \end{cases} \quad \text{formulák különbségi halmaza} \quad D = \{f(y,z), a\}$$

Illesztő algoritmus

1. $k := 0,\ S_k = S,\ \theta_k = \varepsilon.$
2. Ha S_k egyetlen elemű halmaz, akkor θ_k legáltalánosabb illesztő helyettesítés, sikeresen vége;
   különben legyen D_k az S_k különbségi halmaza.
3. Ha van D_k-ban olyan x_k változó és t_k term, hogy x_k nem fordul elő t_k-ban, akkor a 4. lépéssel folytatjuk;
   különben sikertelenül vége, S nem illeszthető.
4. $\theta_{k+1} := \theta_k(x_k / t_k)$, $S_{k+1} := \{A(x_k / t_k) \mid A \in S_k\}$, $k := k+1$, a 2. lépéssel folytatjuk.

1. Példa

$$S = \{P(a,x,h(g(z))), P(z,h(y),h(y))\}$$

1. $S_0 :== \{P(|a,x,h(g(z))), P(|z,h(y),h(y))\}, \quad \theta_0 := \varepsilon$
2. $D_0 := \{a,z\}$
3. $\theta_1 := \{z/a\}$

   $S_1 := \{P(a,x,h(g(z)))\{z/a\}, P(z,h(y),h(y))\{z/a\}\}$

   $= \{P(a,|x,h(g(a))), P(a,|h(y),h(y))\}$
4. $D_1 := \{x,h(y)\}$
5. $\theta_2 := \{z/a\}\{x/h(y)\} = \{z/a, x/h(y)\}$

   $S_2 := S_1\{x/h(y)\} = \{P(a,h(y),h(|g(a))), P(a,h(y),h(|y))\}$
6. $D_2 := \{g(a), y\}$
7. $\theta_3 := \{z/a, x/h(y)\}\{y/g(a)\} = \{z/a, x/h(g(a)), y/g(a)\}$

   $S_3 := S_2\{y/g(a)\} = \{P(a,h(g(a)),h(g(a))), P(a,h(g(a)),h(g(a)))\} =$

   $= \{P(a,h(g(a)),h(g(a)))\}$

Legáltalánosabb illesztő helyettesítés: $\theta = \{x/h(g(a)), y/g(a), z/a\}$

2. Példa

$$S = \{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\}$$

1. $S_0 := \{Q(|f(a), g(x)), Q(|y, y)\}, \quad \theta_0 := \varepsilon$
2. $D_0 := \{f(a), y\}$
3. $\theta_1 := \{y / f(a)\}, \quad S_1 := S_0\{y / f(a)\} = \{Q(f(a),|g(x)), Q(f(a),|f(a))\}$
4. $D_1 := \{g(a), f(a)\}$

   D_1-ben nincs változó, tehát S nem illeszthető

3. Példa

$$S = \{P(x, x), P(y, f(y))\}$$

1. $S_0 := \{P(|x, x), P(|y, f(y))\}, \quad \theta_0 := \varepsilon$
2. $D_0 := \{x, y\}$
3. $\theta_1 := \{x / y\}, \quad S_1 := S_0\{x / y\} = \{P(y,|y), P(y,|f(y))\}$
4. $D_1 := \{y, f(y)\}$

   S nem illeszthető, mert y paramétere $f(y)$-nak (occur check).

Rezolúció

Egy elsőrendű mat-log nyelvben egy atomi formulát vagy annak tagadását közös néven *elsőrendű literál*nak nevezünk.

Pozitív literál egy atomi formula; *negatív literál* egy tagadott atomi formula.

Egy elsőrendű literál *alapja* a literálban szereplő atomi formula. Ha két literálban az atomi formula ugyanaz, *azonos alapú literálok*nak nevezzük őket.

Komplemens literálpár két azonos alapú literál, ha az egyikben az alap tagadva, a másikban tagadás nélkül szerepel.

*Elsőrendű klóz*nak nevezünk egy olyan zárt univerzális Skolem-formát, amelynek a magja elsőrendű literálok diszjunkciója.

Definíció
Legyen W egy C elsőrendű klózban előforduló legalább két azonos alapú egyformán negált literál alapjainak a halmaza. Ha W atomjai illeszthetők egymáshoz és θ a W legáltalánosabb illesztő helyettesítése, akkor a $C^M\theta$ magú klózt a C klóz *faktorá*nak nevezzük.

Példa
Legyen $C = \forall x \forall y (P(x) \vee P(f(y)) \vee \neg Q(x))$
A két P-vel kezdődő atom legáltalánosabb illesztő helyettesítése $\theta = (x / f(y))$
A $\forall y (P(f(y)) \vee \neg Q(f(y)))$ klóz a C klóz faktora.

Definíció

Legyenek C_1 és C_2 változóikban tiszta klózok. Legyenek C_1 és C_2 magjai rendre $C_1^M = C_1^{M'} \vee L_1$ és $C_2^M = C_2^{M'} \vee L_2$ alakúak, ahol L_1 és L_2 legyenek ellentétesen tagadott literálok. Ha az L_1 és L_2 literálok alapjai illeszthetők egymáshoz, legyen θ a legáltalánosabb illesztő helyettesítésük. Ekkor a C_1 és C_2 klózok *bináris rezolvense* a $C_1^{M'}\theta \vee C_2^{M'}\theta$ magú klóz.

Definíció

A C_1 és C_2 klózok *elsőrendű rezolvense* a következő bináris rezolvensek valamelyike:

1. a C_1 és C_2 klózok bináris rezolvense,
2. a C_1 klóz egy faktorának és a C_2 klóznak a bináris rezolvense,
3. a C_1 klóznak és C_2 klóz egy faktorának a bináris rezolvense,
4. a C_1 klóz egy faktorának és C_2 klóz egy faktorának a bináris rezolvense.

Tétel

Legyen a C elsőrendű klóz a C_1 és C_2 klózok elsőrendű rezolvense. Ekkor $\{C_1, C_2\} \vDash C$ (logikai következmény).

Példa

Legyen $C_1 = \forall x(P(x) \vee Q(x))$ és $C_2 = \forall y(\neg P(a) \vee R(y))$

$$C_1^M = \underline{P(x)} \vee Q(x)$$

$$C_2^M = \underline{\neg P(a)} \vee R(y)$$

$$\theta = (x/a)$$

$$C^M = Q(a) \vee R(y)$$

$C = \forall y(Q(a) \vee R(y))$ a C_1 és C_2 klózok bináris rezolvense.

Példa

Legyen $C_1 = \forall x \forall y(P(x) \vee P(f(y)) \vee R(g(y)))$ és $C_2 = \underline{\neg P(f(g(a)))} \vee Q(b)$

$C_1' = \forall y(\underline{P(f(y))} \vee R(g(y)))$ a C_1 klóz egy faktora

$$\theta = \{y/g(a)\}$$

$C = R(g(g(a))) \vee Q(b)$ a C_1' és a C_2 bináris rezolvense,

C a C_1 és C_2 klózok elsőrendű rezolvense

Definíció
Egy S elsőrendű klózhalmazból való *elsőrendű rezolúciós levezetés* elsőrendű klózok egy olyan véges $k_1, k_2, \ldots, k_m$ $(m \geq 1)$ sorozata, ahol minden $j = 1,2,\ldots,m$ -re

1. vagy $k_j \in S$

2. vagy van olyan $1 \leq s,t < j$, hogy k_j a k_s és a k_t klózok elsőrendű rezolvense.

Tétel (helyesség)
Ha egy S elsőrendű klózhalmazból van az üres klóznak elsőrendű rezolúciós levezetése, akkor S kielégíthetetlen.

Tétel (teljesség)
Ha egy S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen, akkor S-ből van az üres klóznak elsőrendű rezolúciós levezetése.

Rezolúciós bizonyítás lépései:

Igazolni akarjuk, hogy egy A formula logikai törvény

1. Tagadjuk a formulát. Igazolni kell, hogy $\neg A$ ellentmondásos.
2. Megszerkesztjük $\neg A$ K univerzális Skolem-normálformáját. $\neg A$ akkor és csakis akkor ellentmondásos, ha K ellentmondásos (Skolem tétel).
3. Egy K univerzális Skolem-normálforma felírható elsőrendű klózok konjunkciójaként (visszafele alkalmazzuk a konjunkcióra vonatkozó kétoldali kvantorkiemelési szabályt). Legyen S ezen klózok halmaza. K akkor és csakis akkor ellentmondásos, ha az S elsőrendű klózhalmaz kielégíthetetlen.
4. Megszerkesztjük S-ből az üres klóznak egy elsőrendű rezolúciós levezetését.

Ha véges számú rezolúciós lépés után megkapjuk az üres klózt, akkor $\neg A$ ellentmondásos, tehát az A formula logikai törvény.

Rezolúciós stratégiák

Definíció
Egy S elsőrendű klózhalmazból való *lineáris rezolúciós levezetés* egy olyan $k_1, l_1, k_2, l_{12}, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ rezolúciós levezetés, amelyben minden $j = 2,3,\ldots,m$-re k_j a (k_{j-1}, l_{j-1}) klózpár rezolvense. A k_j klózokat *centrális klózok*nak, az l_j klózokat *mellékklózok*nak nevezzük.

Tétel
A lineáris rezolúciós kalkulus teljes.

Definíció
Egy *S* klózhalmazból való *lineáris inputrezolúciós levezetés* egy olyan $k_1, l_1, k_2, l_{12}, \ldots, k_{m-1}, l_{m-1}, k_m$ lineáris rezolúciós levezetés, amelyben minden $j = 1,2,\ldots,m-1$-re $l_j \in S$, azaz a lineáris inputrezolúciós levezetésben a mellékklózok *S*-nek elemei.

Definíció
Egy *S* klózhalmazból való *egységrezolúciós levezetés* egy olyan $k_1, k_2,, \ldots, k_m$ rezolúciós levezetés, amelyben minden $j = 1,2,\ldots,m$-re, ha $k_j \notin S$, akkor k_j két olyan, őt a levezetésben megelőző k_s, k_t $(1 \leq s,t < j)$ klóznak a rezolvense, amelyek közül az egyik egységklóz.

Megjegyzés
A lineáris inputrezolúció és az egységrezolúció nem teljes stratégia (ha *S* nem tartalmaz egységklózt a levezetés nem mindig kapjuk meg az üres klózt, illetve el se lehet kezdeni).

Példa

$$\models \exists xy\forall z(R(x,y) \supset R(y,z) \wedge R(z,z)) \qquad \text{– tagadás}$$

$$\dashv \neg\exists xy\forall z(R(x,y) \supset R(y,z) \wedge R(z,z))$$

$$\ldots \qquad \text{– 5. oldal}$$

$$\dashv \forall xyz(R(x,y) \wedge (\neg R(z,f(z)) \vee \neg R(a,a)))$$

univerzális Skolem-normálforma

$$\dashv \forall xyR(x,y) \wedge \forall z(\neg R(z,f(z)) \vee \neg R(a,a))$$

$$\{\forall xyR(x,y), \forall z(\neg R(z,f(z)) \vee \neg R(a,a))\} \qquad \text{– klózok halmaza}$$

Mivel a formula zárt, a kvantoros előtagokat nem szoktuk kiírni, a klózokat literálok halmazaként írjuk fel:

1. $\{\underline{R(x,y)}\}$
2. $\{\underline{\neg R(z,f(z))}, \neg R(a,a)\}$
   $\theta = \{x/z, y/f(z)\}$
3. $\{\underline{\neg R(a,a)}\}$ – 1, 2 rezolvense
   $\theta_1 = \{x/a, y/a\}$
4. $\{\}$ – 1, 3 rezolvense

Példa:

1. Mindenki, aki tud olvasni írástudó.
2. A delfinek nem írástudók.
3. Vannak intelligens delfinek.

---

4. Vannak olyan intelligensek, akik nem tudnak olvasni

Legyen

objektumtartomány – élőlények

R(x) – x tud olvasni

L(x) – x írástudó

D(x) – x delfin

I(x) – x intelligens

1. $\forall x(R(x) \supset L(x))$
2. $\forall x(D(x) \supset \neg L(x))$
3. $\exists x(D(x) \wedge I(x))$

---

4. $\exists x(I(x) \wedge \neg R(x))$

$$\models \ \forall x(R(x) \supset L(x)) \wedge \forall x(D(x) \supset \neg L(x)) \wedge \exists x(D(x) \wedge I(x)) \supset \exists x(I(x) \wedge \neg R(x))$$

– tagadás

$$\Dashv \ \neg(\forall x(R(x) \supset L(x)) \wedge \forall x(D(x) \supset \neg L(x)) \wedge \exists x(D(x) \wedge I(x)) \supset$$
$$\supset \exists x(I(x) \wedge \neg R(x)))$$

– literál alak

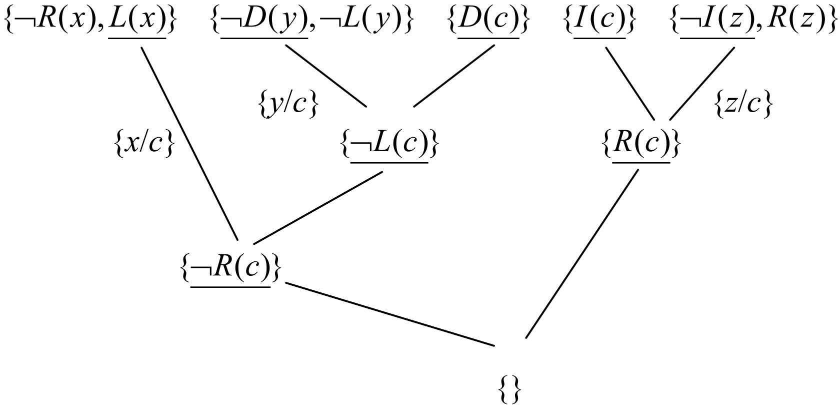
$$\Dashv \neg(\neg(\forall x(\neg R(x) \vee L(x)) \wedge \forall x(\neg D(x) \vee \neg L(x)) \wedge \exists x(D(x) \wedge I(x))) \vee$$
$$\vee \exists x(I(x) \wedge \neg R(x)))$$

$$\Dashv \forall x(\neg R(x) \vee L(x)) \wedge \forall x(\neg D(x) \vee \neg L(x)) \wedge \exists x(D(x) \wedge I(x)) \wedge$$
$$\wedge \neg \exists x(I(x) \wedge \neg R(x))$$

$$\Dashv \forall x(\neg R(x) \vee L(x)) \wedge \forall x(\neg D(x) \vee \neg L(x)) \wedge \exists x(D(x) \wedge I(x)) \wedge$$
$$\wedge \forall x(\neg I(x) \vee R(x))$$

– Skolemizálás

$$\Dashv \forall x(\neg R(x) \vee L(x)) \wedge \forall y(\neg D(y) \vee \neg L(y)) \wedge D(c) \wedge I(c) \wedge$$
$$\wedge \forall z(\neg I(z) \vee R(z))$$


{¬R(x), L(x)}
{¬D(y), ¬L(y)}
{D(c)}
{I(c)}
{¬I(z), R(z)}
{y/c}
{z/c}
{x/c}
{¬L(c)}
{R(c)}
{¬R(c)}
{}

Példa (a predikátumszimbólumok után az áttekinthetőség kedvéért a zárójeleket elhagyjuk $R(x,y) \to Rxy$)

$$\models \exists xy\forall z((Rxy \supset Ryz \wedge Rzz) \wedge (Rxy \wedge Pxy \supset Pxz \wedge Pzz))$$

$$\dashv \neg\exists xy\forall z((Rxy \supset Ryz \wedge Rzz) \wedge (Rxy \wedge Pxy \supset Pxz \wedge Pzz))$$

$$\dashv \forall xy\exists z(\neg(\neg Rxy \vee (Ryz \wedge Rzz)) \vee \neg(\neg(Rxy \wedge Pxy) \vee (Pxz \wedge Pzz)))$$

$$\dashv \forall xy\exists z((Rxy \wedge (\neg Ryz \vee \neg Rzz)) \vee ((Rxy \wedge Pxy) \wedge (\neg Pxz \vee \neg Pzz)))$$

$$\dashv \forall xy\exists z(Rxy \wedge (\neg Ryz \vee \neg Rzz \vee (Pxy \wedge (\neg Pxz \vee \neg Pzz)))$$

$$\dashv \forall xy(Rxy \wedge (\exists z\neg Ryz \vee \exists z\neg Rzz \vee (Pxy \wedge (\exists z\neg Pxz \vee \exists z\neg Pzz)))$$

$$\dashv \forall xy(Rxy \wedge (\exists z\neg Ryz \vee \exists z\neg Rzz \vee Pxy) \wedge$$

$$\wedge (\exists z\neg Ryz \vee \exists z\neg Rzz \vee \exists z\neg Pxz \vee \exists z\neg Pzz))$$

$$\dashv \forall xyRxy \wedge \forall xy(\exists z\neg Rzz \vee \exists z\neg Ryz \vee Pxy) \wedge$$

$$\wedge \forall xy(\exists z\neg Rzz \vee \exists z\neg Pzz \vee \exists z\neg Ryz \vee \exists z\neg Pxz))$$

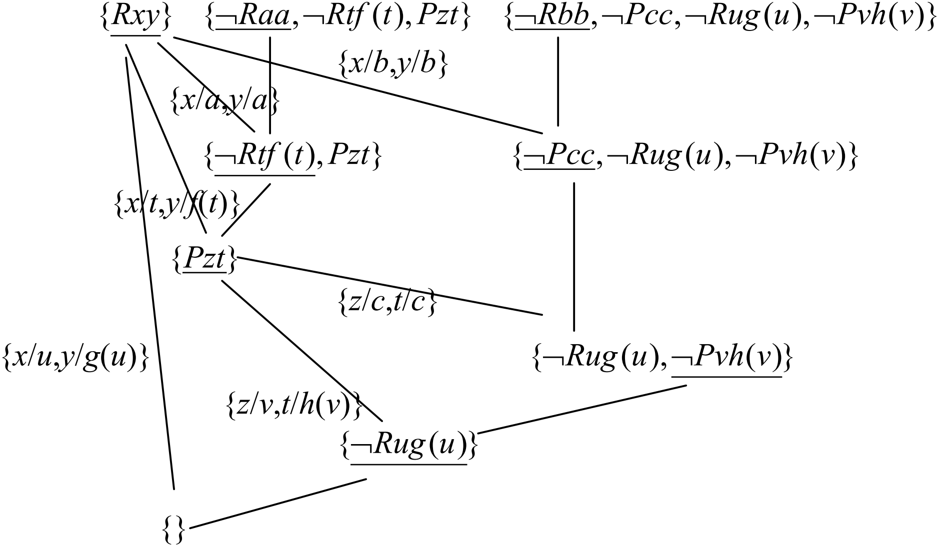
$$\dashv \forall xyRxy \wedge (\exists z\neg Rzz \vee \forall y(\exists z\neg Ryz \vee \forall xPxy)) \wedge$$

$$\wedge (\exists z\neg Rzz \vee \exists z\neg Pzz \vee \forall y\exists z\neg Ryz \vee \forall x\exists z\neg Pxz)$$

$$\dashv \forall xyRxy \wedge (\neg Raa \vee \forall y(\neg Ryf(y) \vee \forall xPxy)) \wedge$$

$$\wedge (\neg Rbb \vee \neg Pcc \vee \forall y\neg Ryg(y) \vee \forall x\neg Pxh(x))$$

$$\dashv \ \forall xyRxy \wedge \forall tz(\neg Raa \vee \neg Rtf(t) \vee Pzt) \wedge$$
$$\wedge \ \forall uv(\neg Rbb \vee \neg Pcc \vee \neg Rug(u) \vee \neg Pvh(v))$$



Horn programozás

Definíció. Egy *elsőrendű Horn-formula* olyan Skolem-formula, amelynek magja legfeljebb egy pozitív literált tartalmazó klózok (*Horn-klózok*) konjunkciója.

Horn klózok:

– általános szabály:

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_k (\underbrace{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n}_{\text{test}} \supset \underbrace{B}_{\text{fej}})$$

zárt formula, $A_j \; (j = \overline{1,n}), B$ atomi formulák

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_k (\neg A_1 \vee \neg A_2 \vee \ldots \vee \neg A_n \vee B)$$

– általános tény

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_k B$$

– cél formula (negatív klóz):

$$\forall x_1, x_2, \ldots, x_k (\neg C_1 \vee \ldots \vee \neg C_n) \sim \neg \exists x_1, x_2, \ldots, x_k (C_1 \wedge \ldots \wedge C_n)$$

Definíció. *Definit-klóz*nak nevezünk egy pontosan egy pozitív literált tartalmazó Horn-klózt (altalános tény vagy általános szabály).

Horn levezetés problémája: egy speciális szerkezetű formula logikai törvény-e:

$$\vDash H_1 \wedge \ldots \wedge H_m \supset C\,,$$

ahol $H_1,\ldots,H_m$ Horn-klózok, C cél formula.

Ha létezik egy θ helyettesítés, amelyre

$$\vDash H_1 \wedge \ldots \wedge H_m \supset (C_1 \wedge \ldots \wedge C_n)\theta$$

kvantormentes formula, akkor a feladat kielégíthető, a program eredménye a θ helyettesítés (*válasz helyettesítés*).

A megoldást megkaphatjuk lineáris rezolúcióval.

Tétel. Elsőrendű Horn-formulák esetén az elsőrendű lineáris inputrezolúció teljes stratégia.

Megjegyzés:

$$\vDash H_1 \wedge \ldots \wedge H_m \supset C$$

$$\dashv \neg(H_1 \wedge \ldots \wedge H_m \supset C)$$

$$\dashv H_1 \wedge \ldots \wedge H_m \wedge \neg C) \qquad \text{Horn formula}$$

Két Horn-klóz rezolvense Horn-klóz.

SLD rezolúció (Linear resolution with Selection function for Definite sentences)

(D) definit klózokat használ
(L) lineáris inputstratégiával dolgozik
(S) a célklózban a feldolgozandó literált és a rezolválás során felhasználandó definit-klózt egy rögzített (S) stratégia alapján választja ki

Az alkalmazott (S) stratégia alapján beszélhetünk mélységi, szélességi, ill. más (pl. heurisztikán alapuló) keresésről.

Az algoritmus a célklózból indul, és a definit-klózok szerkezete miatt minden rezolvens is célklóz alakú lesz.

Az SLD algoritmus lépései a mélységi-bejárás stratégia (*S*) szerint (a teljes levezetési fát felépíti):

1. Legyen az aktuális célklóz az eredeti célklóz (ez lesz a levezetési fa gyökere).
2. Ha az aktuális célklóz az üres klóz, akkor megkaptuk a rezolúciós cáfolatot. A célklóz sikeres minősítést kap, az alg. jelzi, hogy van sikeres levezetés, a 6. lépés következik.
3. Kiválasztjuk a célklózból a „balról eső” literált (*S* stratégia).
4. Kiválasztjuk hozzá a megfelelő fejjel rendelkező soron következő (induláskor első) definit-klózt (*S* stratégia). Ha már nincs több adott fejjel rendelkező elem, a 6. lépés következik.
5. Ha a kiválasztott célklózbeli literál és a definit-klóz fejének az illesztése sikeres, akkor előállítjuk a rezolvenst, ez lesz az aktuális célklóz és a 2. pont következik. Különben ez a választás „kudarcos” minősítést kap, és újból a 4. pont következik.
6. Ha az aktuális célklóz a gyökér, az alg. befejeződik. Különben visszalépünk az aktuális célklózból az előző célklózra (ez lesz az új aktuális célklóz), és a 3. lépéssel folytatjuk.

Prológ

Deklaratív programozás

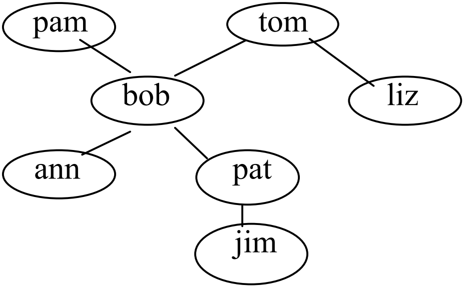
- szabály:
  B:–A_1, A_2, …, A_n. ha A_1, A_2, …, A_n , akkor B
- tény:
  B.
- cél formula:
  ?–C_1,C_2, …, C_m.
- program:

szabályok tények

cél

- SLD rezolúció mélységi bejárással

Példa: családfa



Predikátumok:

parent(X,Y)	X az Y szülője
female(X)	X nő
male(X)	X f
male(X)	X férfi

tények:

parent(pam,bob).
parent(tom,bob).
parent(tom,liz).
parent(bob,ann).
parent(bob,pat).
parent(pat,jim).
female(pam).
female(liz).
female(ann).
female(pat).
male(bob).
male(tom).
male(jim).

Adatbázis:

- csak tények
- nincsenek szabályok
- nincsenek változók

?–*parent(X,liz)*.

X=tom

?=*parent(bob,X)*.

X=ann;
X=pat;
no

az adatbázisban nincs több információ
procedurális tagadás, nem tudjuk bizonyítani, hogy bobnak nincs több gyereke

?–*parent(X,Y)*.

X=pam Y=bob;
X=tom Y=bob;
…

új predikátumok:

```
mother(X,Y):–        parent(X,Y),
                     female(X).
sister(X,Y):–        parent(Z,X),
                     parent(Z,Y),
                     female(X),
                     X=/=Y.
predecessor(X,Y):–   parent(X,Y).
predecessor(X,Y):–   parent(X,Z),
                     predecessor(Z,Y).
```

Tudásbázis:

- szabályok
- változók

?–*mother(X,bob)*.

X=pam

illesztés, új cél:

?–*parent(X,bob),female(X)*.

illesztés: parent(pam,bob).

?–*female(pam)*.

?–*sister(ann,pat).* yes	illesztés: sister(X,Y) ?–*parent(Z,ann), parent(Z,pat),* *female(ann),ann=/=pat.* illesztés: parent(bob,ann) ?–*parent(bob,pat),female(ann), ann=/=pat.* illesztés: parent(bob,pat) ?– *female(ann), ann=/=pat.* illesztés: female(ann) ?– *ann=/=pat.* yes

?–*predecessor(pam,pat)*. yes	illesztés: predecessor(X,Y) ?–*parent(pam,pat)*. zsákutca, backtracking ?–*predecessor(pam,pat)*. illesztés: predecessor(X,Y) köv. ?–*parent(pam,Z), predecessor(Z,pat)*. illesztés: parent(pam,bob) ?–*predecessor(bob,pat)*. illesztés: predecessor(X,Y) ?–*parent(bob,pat)*. yes

Könyvészet:

1. Pásztorné Varga Katalin, Várterész Magda, *A matematikai logika alkalmazásszemléletű tárgyalása*, Panem, Budapest, 2003.

2. Jean Gallier, *Logic for Computer Science: Foundations of Automatic Theorem Proving*, Wiley, 1986. (http://www.cis.upenn.edu/~jean/gbooks/logic.html)