

UNIVERSITATEA "BABEȘ-BOLYAI"  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ

# Gestiunea formelor grafice

*Referat de doctorat*

**Doctorand**  
Radu-Lucian Lupșa

**Conducător științific**  
Prof. dr. Leon Țâmbulea

2002

# Cuprins

<b>1</b>	<b>Noțiuni fundamentale</b>	<b>2</b>
1.1	Imagini și forme . . . . .	2
1.2	Forme cu domeniu continuu . . . . .	3
1.2.1	Distanțe . . . . .	3
1.2.2	Conexitate . . . . .	4
1.2.3	Convexitate . . . . .	4
1.3	Forme în domeniu discret . . . . .	4
1.3.1	Conexitate . . . . .	4
1.3.2	Distanțe . . . . .	6
1.3.3	Convexitate . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Transformări morfologice</b>	<b>10</b>
2.1	Eroziunea și dilatarea . . . . .	10
2.2	Închiderea și deschiderea . . . . .	13
2.3	Convoluție cu discriminare . . . . .	13
2.4	Transformarea Hit-or-miss . . . . .	14
2.5	Scheletul unei forme . . . . .	14
2.6	Imagini și mulțimi de nivel . . . . .	16
2.7	Transformări independente de contrast . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Reprezentarea formelor</b>	<b>25</b>
3.1	Caracteristici globale . . . . .	25
3.2	Reprezentări geometrice . . . . .	25
3.3	Reprezentarea prin pixeli . . . . .	27
3.4	Metode avansate de reprezentare a formelor . . . . .	28

# Capitolul 1

## Noțiuni fundamentale

### 1.1 Imagini și forme

Vom numi *imagine* o funcție  $f : D \rightarrow C$ , unde:

- $D$  este o mulțime de puncte, submulțime a lui  $\mathbb{R}^2$  sau  $\mathbb{R}^3$ ,
- $C$  este mulțimea culorilor pe care le poate avea un punct.

În limbajul comun, imagine este o imagine *bidimensională* ( $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ), însă pentru a simplifica anumite notații și întrucât anumite construcții pot fi trecute ușor de la imagini bidimensionale la spațiul tridimensional vom folosi termenul de *imagine tridimensională* conform definiției de mai sus, cu  $D \subseteq \mathbb{R}^3$ .

Vom numi imagine *discretă* o imagine în care  $D$  este o multime discretă (de obicei, intersecția unui interval din  $\mathbb{R}^d$  cu  $\mathbb{Z}^d$  ( $d \in \{2, 3\}$ )) și *imagine continuă* dacă  $D$  este un interval (eventual nemărginit) din  $\mathbb{R}^2$  sau  $\mathbb{R}^3$ .

În cazul imaginilor discrete, punctele domeniului se numesc *pixeli*, iar dacă domeniul este tridimensional punctele sale se mai numesc *voxeli*. Vom accepta denumirea de pixel pentru punctele unui domeniu discret, indiferent de dimensiune.

Pixelii reprezintă elemente într-un pavaj al unui domeniului continuu. Pentru a preciza noțiunile, vom stabili denumirile:

- *pixel* este un element al unui domeniu discret. Pixelii îi vom nota în general cu litere mici  $(p, q)$ .
- *zona unui pixel* este, după caz, pătratul, hexagonul, cubul, etc. din pavajul domeniului continuu, asociat pixelului. Vom nota zona unui

pixel  $p$  prin  $Z(p)$ . Vom lua  $Z(p)$  mulțime închisă, astfel ca

$$\bigcup_{p \in \mathbb{Z}^d} Z(p) = \mathbb{R}^d.$$

- *centrul unui pixel* este un punct din domeniul continuu — de regulă centrul zonei — asociat pixelului. Vom nota centrul pixelului  $p$  prin  $c(p)$ .

Este util uneori să considerăm  $D$  nemărginit ( $D = \mathbb{R}^d$  sau  $D = \mathbb{Z}^d$ ) pentru a evita tratarea ca și caz particular a punctelor de pe margine; în acest scop fie se “completează” imaginea cu o culoare fixată  $c_0 \in C$  peste tot în afara domeniului de interes, fie se repetă la infinit imaginea (rezultând astfel o funcție  $f$  periodică).

În sfârșit, mulțimea  $C$  a culorilor poate fi:

- $\{0, 1\}$ , caz în care imaginea se numește *alb-negru*, sau *cu două nivele*;
- $\{0, 1, \dots, k-1\}$ , caz în care imaginea se numește *cu  $k$  nivele de gri*;
- $(0, \infty)$ , în cazul imaginii *monocrome*;
- $(0, \infty)^3$  sau alte variante, pentru imagini color.

O imagine alb-negru definește o submulțime a lui  $D$ , și anume  $\{p \in D : f(p) = 1\}$ .

Vom numi *formă* o submulțime a lui  $D$ . Prin extensie, vom numi tot formă și imaginea alb-negru care o determină.

## 1.2 Forme cu domeniu continuu

### 1.2.1 Distanțe

În  $\mathbb{R}^d$ , cel mai frecvent se folosește distanța euclidiană, definită prin

$$\text{dist}_2(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|^2.$$

Mai rar, se folosește

$$\text{dist}_1(x, y) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$$

sau

$$\text{dist}_\infty(x, y) = \max_{i=1, d} |x_i - y_i|.$$

## 1.2.2 Conexitate

O curbă rectificabilă (sau *Jordaniană*) este o funcție  $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$  care satisface proprietățile:

1.  $c$  este continuă,
2.  $c$  este cu variație mărginită, adică

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^n \|c(x_{i-1}) - c(x_i)\| : (x_i)_{i=1, n} \text{ diviziune a lui } [0, 1] \right\} < \infty.$$

Acest supremum se numește lungimea curbei.

O formă  $F \subseteq D$  este *conexă* (*prin arce*) dacă pentru orice pereche de puncte  $p, q \in F$  există o curbă rectificabilă  $c$  cu  $c(0) = p$ ,  $c(1) = q$  și cu  $c([0, 1]) \subseteq F$ .

De remarcat că:

1. În definiția lungimii unei curbe, putem folosi distanțele  $\text{dist}_\infty$  sau  $\text{dist}_1$  în locul distanței euclidiene. Datorită echivalenței celor trei metrice, mulțimea curbelor rectificabile rămâne aceeași, oricare dintre cele trei metrice se folosește; doar lungimile curbelor se vor schimba.
2. Distanța între două puncte  $x$  și  $y$  este lungimea celei mai scurte curbe ce unește punctele  $x$  și  $y$ .

## 1.2.3 Convexitate

O formă  $F \subseteq \mathbb{R}^d$  se numește *convexă* dacă  $\forall x, y \in F$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1)$  avem:

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in F$$

*Învelitoarea convexă* a unei mulțimi  $F$  este definită ca intersecția tuturor mulțimilor convexe în  $\mathbb{R}^d$  care conțin pe  $F$ .

Deoarece o intersecție de mulțimi convexe este o mulțime convexă, învelitoarea convexă a unei mulțimi  $F$  este cea mai mică mulțime convexă care include pe  $F$ .

## 1.3 Forme în domeniu discret

### 1.3.1 Conexitate

În cazul formelor discrete, o formă  $F$  este numită *conexă* dacă pentru orice pereche de puncte din  $F$  există un lanț, în sensul teoriei grafurilor, inclus în  $F$ , care le unește.

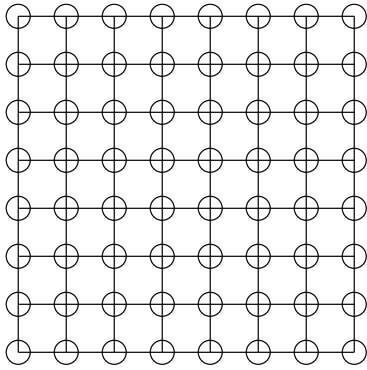


Figura 1.1: Graful de vecinătate pentru 4-vecini

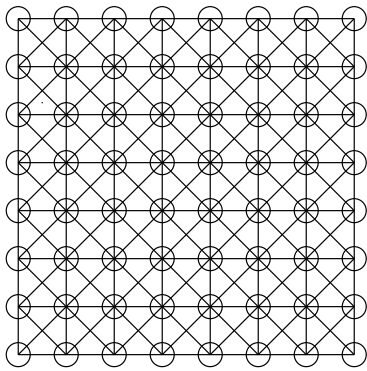


Figura 1.2: Graful de vecinătate pentru 8-vecini

Pentru a defini lanțul de mai sus se consideră un graf având ca vârfuri punctele domeniului  $D$  al imaginii. Punctele ce alcătuiesc domeniul  $D$  pot fi varfurile unui caroiaj de pătrate, caz în care putem considera vecinii direcți pe linie și coloană — sistem numit și 4-vecini — (fig. 1.1), sau și pe diagonală — sistem numit și 8-vecini — (fig. 1.2).

De asemenea, se pot lua ca puncte ale domeniului vârfurile unui caroiaj de triunghiuri, iar vecinii direcți ai unui vârf vor fi celelalte vârfuri ale triunghiurilor ce au ca vârf vârful considerat — sistem numit și 6-vecini — (fig. 1.3).

În plan avem o proprietate (pe cât de intuitivă, pe atât de dificil de demonstrat riguros), și anume faptul că o curbă simplu închisă împarte planul în exact două componente conexe (teorema lui Jourdan).

În domeniu discret, numim curbă un lanț în graful vecinătăților. O curbă

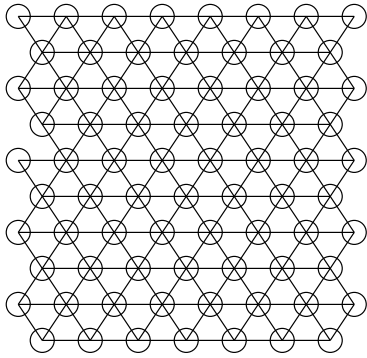


Figura 1.3: Graful de vecinătate pentru 6-vecini

simplă va fi atunci un lanț cu următoarele două proprietăți suplimentare:

- lanțul este simplu (nu trece de două ori prin același vârf)
- nici un vârf al lanțului nu are alți vecini, printre vârfurile din lanț, decât pe predecesorul și pe succesorul său din lanț.

Analog, o curbă închisă va fi un ciclu în grafurile vecinătăților, iar o curbă simplă închisă va fi un ciclu cu cele două proprietăți de mai sus.

Analogul teoremei lui Jourdan — o curbă simplă închisă împarte “planul” (domeniul de lucru,  $D$ , considerat nemărginit) în două componente conexe — este valabilă direct doar în cazul sistemului de 6-vecini.

Pentru sistemele de 4-vecini sau 8-vecini, pentru a păstra valabilitatea echivalentului teoremei lui Jourdan va trebui să considerăm 4-vecini pentru curbă și 8-vecini pentru verificarea conexității, sau viceversa (a se vedea figurile 1.4 și 1.5).

### 1.3.2 Distanțe

În cazul imaginilor discrete, există mai multe abordări distincte pentru definirea noțiunii de distanță:

1. Restrângerea distanței din cazul continuu: distanța între doi pixeli  $p$  și  $q$  este definită ca fiind distanța (una din cele trei variante) în  $\mathbb{R}^d$ , dintre centrele lor  $c(p)$  și  $c(q)$ .
2. Distanță în graf. Distanța între doi pixeli este definită ca distanța între vârfurile asociate celor doi pixeli în grafurile vecinilor.

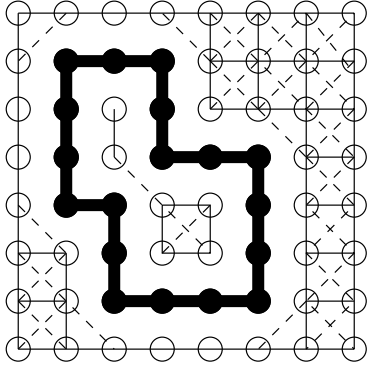


Figura 1.4: Curbă în 4-vecini; în 4-vecini, “interiorul” curbei este despărțit în două componente conexe; în 8-vecini acestea sunt reunite

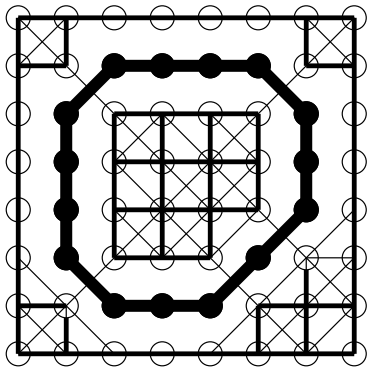


Figura 1.5: Curbă în 8-vecini: “interiorul” și “exteriorul” sunt conectate în 8-vecini; în 4-vecini acest lucru este corectat



6	5	4	4	4	4	4	5	6
5	4	4	3	3	3	4	4	5
4	4	3	2	2	2	3	4	4
4	3	2	2	1	2	2	3	4
4	3	2	1	0	1	2	3	4
4	3	2	2	1	2	2	3	4
4	4	3	2	2	2	3	4	4
5	4	4	3	3	3	4	4	5
6	5	4	4	4	4	4	5	6

Figura 1.6: 4-8 distanța

3. Modele mixte. În această categorie intră diverse încercări de-a aproxima în numere întregi distanța euclidiană. Printre aceste încercări amintim:
  - (a) partea întreagă din distanța euclidiană;
  - (b) 4-8 distanța: Fie un pixel  $x$ : punem  $\text{dist}(x, x) = 0$ . În continuare, considerăm 4-vecinii lui  $x$  ca fiind la distanță 1 față de  $x$ . 8-vecinii acestora îi considerăm ca fiind la distanță 2 față de  $x$ . La distanță 3 față de  $x$  vor fi 4-vecinii pixelilor de la distanță 2, ș. a. m. d. (vezi figura 1.6).

### 1.3.3 Convexitate

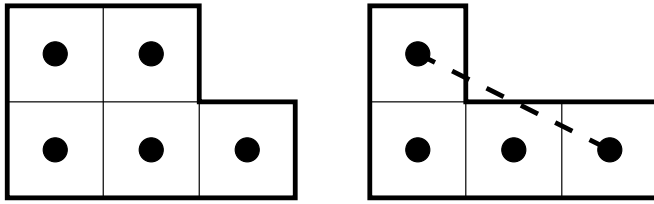
Ca și în cazul definirii unei metrici, definirea convexității pentru mulțimi într-un spațiu discret ridică anumite dificultăți.

Este probabil dezirabil din partea oricărei definiții a convexității ca o intersecție de mulțimi convexe să fie o mulțime convexă.

O abordare directă ar fi să spunem că o mulțime de pixeli este convexă dacă mulțimea centrelor lor este convexă sau dacă reuniunea zonelor pixelilor componenți este o mulțime convexă. În conformitate cu prima variantă de definiție, singurele mulțimi convexe sunt mulțimea vidă și mulțimile formate dintr-un singur pixel. În conformitate cu cea de-a doua definiție, pentru un pavaj din pătrate, mulțimi convexe sunt doar dreptunghiurile.

O definiție mai elaborată este următoarea: o mulțime  $F$  este convexă dacă orice segment determinat de centrele a doi pixeli din  $F$  este inclus în reuniunea zonelor pixelilor din  $F$  (figura 1.7).

În [14] și [15] sunt prezentate mai multe posibilități, echivalente, de definire a convexității pentru domenii discrete. Formularea echivalentă cea



(a) mulțime convexă

(b) mulțime concavă

Figura 1.7: Prima încercare de definire a convexității

mai simplă este următoarea: O mulțime de pixeli  $F$  este convexă dacă interiorul învelitorii convexe a mulțimii centrelor pixelilor din  $F$  nu conține centrul niciunui pixel din afara lui  $F$ .

# Capitolul 2

## Transformări morfologice

Numim *transformări morfologice* funcțiile ce transformă o formă (sau, echivalent, o imagine alb-negru) într-o altă formă.

În cele ce urmează, dacă nu este specificat altfel, domeniul  $D$  este de forma  $D = \mathbb{R}^d$  sau  $D = \mathbb{Z}^d$ .

### 2.1 Eroziunea și dilatarea

Cele mai simple transformări morfologice sunt eroziunea și dilatarea.

Ca operator pe mulțimi, eroziunea de parametru  $r$  a unei mulțimi  $X$  este  $E_r(X) = \{x \in D : \mathcal{D}(x, r) \subseteq X\}$ , unde prin  $\mathcal{D}(x, r)$  am notat discul de centru  $x$  și de rază  $r$ . (vezi fig. 2.1)

Pe un caz mai general, eroziunea se poate defini ca  $E_S(X) = \{x \in D : x + S \subseteq X\}$ , unde  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  este o mulțime oarecare, care va fi numită *element structurant*.

Dilatarea unei mulțimi este definită prin  $G_r(X) = \{x \in D : \mathcal{D}(x, r) \cap X \neq \emptyset\}$ . (vezi fig. 2.2)

Ca și în cazul eroziunii, putem defini dilatarea cu element structurant  $S$  prin  $G_S(X) = \{x \in D : x - S \cap X \neq \emptyset\}$ .

Eroziunea are următoarele proprietăți:

1. Dacă  $X \subseteq Y$ , atunci  $E_S(X) \subseteq E_S(Y)$  (este monotonă)
2.  $E_S(X) \subseteq X$  (este antiextensivă)
3.  $E_S(\cap X_i) = \cap E_S(X_i)$  (comută cu intersecția)
4.  $E_{\cup S_i}(X) = \cap E_{S_i}(X)$
5.  $E_S(\cup X_i) \supseteq \cup E_S(X_i)$

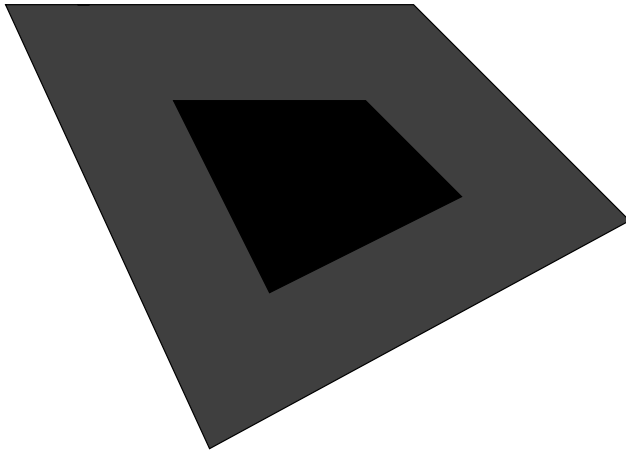


Figura 2.1: Eroziunea unei mulțimi. Mulțimea originală este desenată în gri; în urma eroziunii rămâne doar partea în negru.

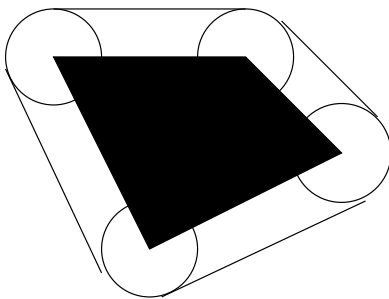


Figura 2.2: Dilatarea unei mulțimi. Mulțimea originală este desenată în negru, rezultatul dilatării este marcat prin linia continuă.

$$6. E_{\cap S_i}(X) \supseteq \cup E_{S_i}(X)$$

$$7. E_S \circ E_T = E_T \circ E_S = E_{S+T} \text{ (comutativitatea)}$$

Dilatarea are următoarele proprietăți:

$$1. \text{dacă } X \subseteq Y, \text{ atunci } G_S(X) \subseteq G_S(Y) \text{ (monotonie)}$$

$$2. G_S(D \setminus X) = D \setminus E_{-S}(X) \text{ (dualitatea eroziune-dilatare)}$$

$$3. X \subseteq G_S(X) \text{ (extensivitate)}$$

$$4. G_S(X) = G_X(S) = X + S \text{ (altfel spus, dilatarea coincide cu suma Minkovski)}$$

$$5. G_S(\cup X_i) = \cup G_S(X_i)$$

$$6. G_{\cup S_i} = \cup G_{S_i}(X)$$

$$7. G_S(\cap X_i) \subseteq \cap G_S(X_i)$$

$$8. G_{\cap S_i}(X) \subseteq \cap G_{S_i}(X)$$

$$9. G_S \circ G_T = G_T \circ G_S = G_{S+T}$$

Pornind de la o mulțime oarecare  $S \subseteq \mathbb{R}^d$ , putem obține o familie de elemente structurante prin scalarea mulțimii date. Altfel spus, notând  $\lambda S = \{\lambda x : x \in S\}$ , putem defini familiile de eroziuni, respectiv dilatări,  $E_{\lambda S}$ , respectiv  $G_{\lambda S}$ .

Se poate arăta că, dacă elementul structurant  $S$  este o mulțime convexă, atunci

$$E_{(\lambda+\mu)S} = E_{\lambda S} \circ E_{\mu S}, \quad \forall \lambda, \mu \in (0, \infty)$$

și reciproc, dacă proprietatea de mai sus este verificată, atunci  $S$  este o mulțime convexă. Același lucru este valabil și pentru dilatare.

Ca utilitate practică, eroziunile și dilatățile servesc în special la eliminarea zgomotului din imagine. Eroziunile elimină “petele” de valoare 1 din imagini, iar dilatățile pe cele de valoare 0.

Proprietățile 4 de la eroziune și 5 de la dilatare ne permit o implementare eficientă a operațiilor prin descompunerea elementului structurant.

Eroziunile și dilatățile “deplasează” frontiera obiectelor; așa cum arată și denumirea, eroziunea micșorează suprafața obiectelor, iar dilatarea mărește suprafața.

## 2.2 Închiderea și deschiderea

Pentru a contrabalansa creșterea ariei obiectelor datorată unei dilatări, putem aplica ulterior o eroziune folosind același element structurant. Transformarea astfel obținută,  $C_S(X) = E_S(G_S(X))$ , se numește *închidere*. Denumirea este adecvată, deoarece  $C_S$  este un operator de închidere, având proprietățile:

1.  $X \subseteq C_S(X)$  (extensivitate)
2. dacă  $X \subseteq Y$ , atunci  $C_S(X) \subseteq C_S(Y)$  (monotonie)
3.  $C_S(C_S(X)) = C_S(X)$  (idempotență)

Dacă, dimpotrivă, aplicăm întâi eroziunea și apoi dilatarea, obținem o transformare numită *deschidere*:  $O_S(X) = G_S(E_S(X))$ .

Deschiderea este duala închiderii în sensul că  $O_S(D \setminus X) = D \setminus C_{-S}(X)$ . Deschiderea are proprietăți similare cu închiderea, și anume:

1.  $O_S(X) \subseteq X$  (antiextensivitate)
2. dacă  $X \subseteq Y$ , atunci  $O_S(X) \subseteq O_S(Y)$  (monotonie)
3.  $O_S(O_S(X)) = O_S(X)$  (idempotență)

## 2.3 Convoluție cu discriminare

Fie o funcție  $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  măsurabilă, fie  $\alpha \in \mathbb{R}$ , și să considerăm că imaginea este la rândul ei o funcție măsurabilă (sau echivalent, forma este o submulțime măsurabilă a lui  $D$ ).

Definim atunci transformarea numită *convoluția cu funcția  $\phi$  cu discriminare la pragul  $\alpha$* :

$$T(X) = \left\{ x \in D : \int_X \phi(x-t)dt \geq \alpha \right\}$$

Particularizând convoluția cu discriminare pentru cazul când

$$\phi(t) \geq 0, \forall t \in D,$$

$$\int_D \phi(t)dt = 1$$

și

$$\alpha = 1/2,$$

obținem transformarea numită *filtru median*.

De obicei, în cazul filtrului median funcția  $\phi$  are ca suport o mulțime mărginită (convexă) ce conține originea.

Filtrul median combină, într-o oarecare măsură, închiderea și deschiderea.

Toate transformările enumerate până aici sunt utile în reducerea zgomotului din imagini. Alegerea unui element structurant de dimensiuni mari (respectiv, a unei funcții  $\phi$  cu suport de dimensiuni mari) duce la eliminarea completă a elementelor din imagine de dimensiuni mai mici decât a elementului structurant.

Filtrul median are tendința de-a deplasa frontiera formelor, cu atât mai mult cu cât curbura frontierei este mai mare. Aplicat în mod repetat, el elimină “punctele” și sinuozițiile conturului, lăsând pe loc părțile rectilinii din frontieră.

## 2.4 Transformarea Hit-or-miss

Transformarea hit-or-miss este definită în modul următor: Fie  $B_1, B_2 \subseteq D$ , disjuncte. Atunci  $H_{B_1, B_2}(X) = E_{B_1}(X) \cap E_{B_2}(D \setminus X)$ .

Altfel spus,  $H_{B_1, B_2}(X)$  este formată din acele puncte în care dacă deplasăm elementul structurant  $(B_1, B_2)$ ,  $B_1$  va fi inclus în  $X$ , iar  $B_2$  va fi inclus în complementara lui  $X$ .

## 2.5 Scheletul unei forme

În cazul formelor în domeniu continuu, *scheletul* unei forme  $X$  este mulțimea acelor puncte din  $X$  care au cel puțin două cele mai apropiate puncte pe frontiera lui  $X$ .

Scheletul unei forme are aceleași proprietăți de conexitate ca și forma inițială; din acest motiv el poate fi folosit de exemplu în recunoașterea optică a caracterelor.

Din păcate, scheletul este foarte sensibil la zgomot. Astfel, scheletul unui disc este format dintr-un singur punct (centrul discului). Dacă adăugăm la marginea discului o proeminență, aceasta “adaugă o ramură” la schelet (fig. 2.4).

Pentru a extinde scheletul și pentru cazul discret, vom observa mai întâi că în cazul continuu un punct  $x$  al formei  $X$  aparține scheletului lui  $X$  dacă și numai dacă frontiera discului maximal centrat în  $x$  și inclus în  $X$  are cel puțin două puncte distincte comune cu frontiera lui  $X$ .

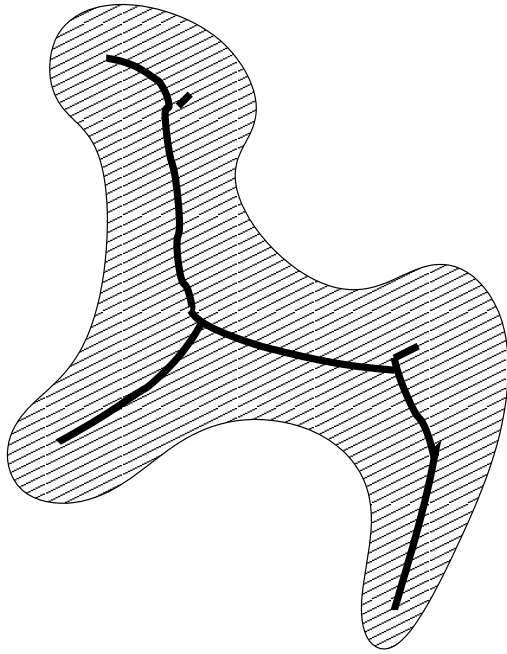


Figura 2.3: Scheletul unei forme

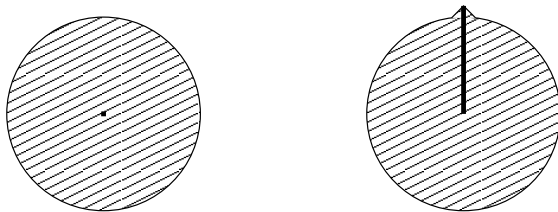


Figura 2.4: Sensibilitatea scheletului la zgomot



În cazul discret, aproximând atât forma  $X$  cât și discurile maximale incluse în  $X$ , frontiera unui disc maximal va “însoți” frontiera formei de-a lungul a mai mulți pixeli. Pentru a obține ceva asemănător scheletului definit în cazul continuu, va trebui să impunem restricții suplimentare asupra celor două puncte comune ale frontierei discului maximal cu frontiera formei.

Vom putea impune condiția ca între cele două puncte să fie o distanță mai mare de o anumită valoare, ca unghiul arcului de cerc delimitat de cele două puncte să fie mai mare de o anumită valoare, sau ca între cele două puncte să găsim un punct al frontierei discului care să nu fie comun cu frontiera formei.

O altă abordare a definiției scheletului în cazul discret este prin descrierea unui algoritm iterativ de “subțiere” a formei inițiale. Algoritmul de subțiere va trebui să păstreze conectivitatea și să nu elimine extremitățile scheletului.

Conform [2], scheletul cu element structurant  $B$  este definit prin

$$S_B(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_B^k(X) \setminus O_B(E_B^k(X)))$$

unde  $n$  este cel mai mic număr natural cu  $E_B^n(X) = \emptyset$  și unde prin  $O_B$  și  $E_B$  am notat deschiderea și respectiv eroziunea de element structurant  $B$ , iar  $E_B^k$  reprezintă eroziunea aplicată de  $k$  ori.

## 2.6 Imagini și mulțimi de nivel

Vom considera în cele ce urmează domeniul  $D$  pe care sunt definite imaginile,  $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(D)$  o  $\sigma$ -algebră de mulțimi și  $\mathcal{F}$  mulțimea funcțiilor  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  măsurabile.

**Definiția 2.1** Fiind dată o funcție  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , se numește mulțimea de nivel  $\lambda$  a funcției  $f$ , și se notează  $\chi_\lambda$ , mulțimea

$$\chi_\lambda f = \{x \in D : f(x) \geq \lambda\}.$$

Așa cum se va arăta mai jos, o funcție este complet definită de mulțimile sale de nivel. În aceste condiții, o transformare morfologică satisfăcând anumite proprietăți se va putea extinde la o transformare asupra imaginilor monocrome, aplicând transformarea morfologică în mod independent mulțimilor de nivel ale funcției și reconstituind funcția care are ca mulțimi de nivel mulțimile astfel obținute.

**Teorema 2.2** Familia mulțimilor de nivel  $\chi_\lambda f$  ale unei funcții  $f$  satisface:

- (i) dacă  $\mu \leq \lambda$ , atunci  $\chi_\mu f \supseteq \chi_\lambda f$ ;

$$(ii) \chi_\lambda f = \bigcap_{\mu < \lambda} \chi_\mu f;$$

$$(iii) \bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} \chi_\lambda f = \emptyset \text{ și } \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \chi_\lambda f = D.$$

Demonstrația este imediată.

**Teorema 2.3** *Dacă două funcții  $f$  și  $g$  satisfac  $\chi_\lambda f = \chi_\lambda g$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , atunci  $f = g$ .*

**Demonstrație** Presupunem  $f \neq g$ . Prin urmare, există  $x \in D$  cu  $f(x) \neq g(x)$ ; fie  $f(x) < g(x)$ . Atunci  $x \notin \chi_{g(x)} f$  și  $x \in \chi_{g(x)} g$ , și deci  $\chi_{g(x)} f \neq \chi_{g(x)} g$ , fapt ce contravine ipotezei.  $\diamond$

**Teorema 2.4** *Dacă  $(X_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$  este o familie de mulțimi din  $\mathcal{K}$  care satisface condițiile:*

$$(i) \text{ dacă } \mu \leq \lambda, \text{ atunci } X_\mu \supseteq X_\lambda,$$

$$(ii) X_\lambda = \bigcap_{\mu < \lambda} X_\mu,$$

$$(iii) \bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} \chi_\lambda f = \emptyset \text{ și } \bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} \chi_\lambda f = D,$$

atunci ea este familia mulțimilor de nivel ale funcției dată prin

$$f(x) = \sup\{\mu \in \mathbb{R} : x \in X_\mu\}.$$

**Demonstrație** Să observăm mai întâi că, în virtutea ipotezei (i), mulțimea  $\{\mu \in \mathbb{R} : x \in X_\mu\}$  este un interval cu marginea inferioară  $-\infty$ ; în plus, în virtutea ipotezei (iii) acest interval nu este nici vid, nici egal cu  $\mathbb{R}$ ; prin urmare supremumul său este un număr real, și deci funcția  $f$  este bine definită.

Fie  $f$  definită prin  $f(x) = \sup\{\mu \in \mathbb{R} : x \in X_\mu\}$  și fie  $\chi_\lambda f$  mulțimile de nivel ale funcției  $f$

Oricare ar fi  $x \in \chi_\lambda f$ , avem, conform definiției mulțimilor de nivel,  $f(x) \geq \lambda$ , și, conform definiției lui  $f$ ,

$$\sup\{\mu \in \mathbb{R} : x \in X_\mu\} \geq \lambda,$$

de unde

$$\forall \lambda' < \lambda \exists \mu > \lambda' : x \in X_\mu.$$

Mai departe, dacă  $\mu > \lambda'$  atunci, conform proprietății (i),  $X_\mu \subseteq X_{\lambda'}$  și deci avem

$$\forall \lambda' < \lambda : x \in X_{\lambda'},$$

adică

$$x \in \bigcap_{\lambda' < \lambda} X_{\lambda'},$$

de unde, aplicând acum proprietatea (ii)

$$x \in X_{\lambda}.$$

Reciproc, dacă  $x \in X_{\lambda}$ , avem

$$\lambda \in \{\mu \in \mathbb{R} : x \in X_{\mu}\},$$

și ca urmare

$$\sup\{\mu \in \mathbb{R} : x \in X_{\mu}\} \geq \lambda,$$

adică  $f(x) \geq \lambda$ , sau  $x \in \chi_{\lambda}f$

Prin urmare,  $X_{\lambda} = \chi_{\lambda}f$ , adică  $X_{\lambda}$  sunt mulțimile de nivel ale funcției  $f$ .

◇

Să observăm în plus că, deoarece  $x \in \chi_{f(x)}f$ , rezultă că de fapt  $f(x) = \max\{\lambda \in \mathbb{R} : x \in X_{\lambda}\}$ .

Cele trei teoreme de mai sus ne arată că o imagine monocromă poate fi reprezentată prin mulțimile sale de nivel, sau echivalent, printr-o familie de imagini alb-negru.

În cele ce urmează, prin *schimbare de contrast* se înțelege o funcție  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , nedescrescătoare.

Dacă două imagini diferă între ele doar printr-o schimbare de contrast strict crescătoare și continuă, atunci ele vor avea aceleași mulțimi de nivel, asociate doar unor valori diferite. Altfel spus:

**Propoziția 2.5** *Fie  $f_1$  și  $f_2$  două imagini monocrome astfel încât  $f_2 = g \circ f_1$ , unde  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  strict crescătoare și continuă. Atunci pentru orice  $\lambda \in \mathbb{R}$  există un  $\mu \in \mathbb{R}$  (și reciproc, pentru orice  $\mu \in \mathbb{R}$  există  $\lambda \in \mathbb{R}$ ) astfel încât  $\chi_{\lambda}f_1 = \chi_{\mu}f_2$ .*

## 2.7 Transformări independente de contrast

Mulțimile de nivel permit ca anumite transformări ale imaginilor alb-negru să fie extinse pentru imagini monocrome, în modul următor:

**Definiția 2.6** *Fie  $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$  o transformare pentru imagini alb-negru. Numim extinderea transformării  $T$  la imagini monocrome transformarea  $\bar{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  care asociază imaginii  $f \in \mathcal{F}$  imaginea  $f' = \bar{T}(f)$  ce are ca mulțimi de nivel*

$$\chi_{\lambda}f' = T(\chi_{\lambda}f).$$

Pentru ca extinderea să se poată face, trebuie ca mulțimile  $T(\chi_\lambda f)$  să fie mulțimile de nivel ale unei funcții, adică să verifice condițiile teoremei 2.4.

**Teorema 2.7** *Pentru ca transformarea morfologică  $T$  să se poată extinde la o transformare pentru imagini monocrome, conform definiției 2.6, este necesar și suficient ca  $T$  să îndeplinească următoarele condiții:*

(i) *dacă  $X \subseteq Y$ , atunci  $T(X) \subseteq T(Y)$ ;*

(ii) *dacă  $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ , atunci*

$$T\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i\right) \supseteq \bigcap_{i=1}^{\infty} T(X_i);$$

(iii)  *$T(\emptyset) = \emptyset$  și  $T(D) = D$ .*

De notat că incluziunea în sens invers celei cerute de proprietatea (ii) este consecință directă a monotoniei. De asemenea, de notat că imaginea rezultată în urma transformării este măsurabilă întrucât mulțimile sale de nivel sunt mulțimi măsurabile.

### Demonstrație

*Necesitatea:*

(i) Fie  $X, Y \in \mathcal{K}$ , cu  $X \subseteq Y$ . Considerăm imaginea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin Y \\ 1 & , x \in Y \setminus X \\ 2 & , x \in X \end{cases}$$

Avem  $\chi_1 f = Y$  și  $\chi_2 f = X$ . Imaginea transformată,  $f'$ , are mulțimile de nivel  $\chi_\lambda f' = T(\chi_\lambda f)$ . În particular,  $\chi_1 f' = T(Y)$  și  $\chi_2 f' = T(X)$ . Deoarece  $\chi_1 f'$  și  $\chi_2 f'$  sunt mulțimi de nivel, rezultă  $\chi_1 f' \supseteq \chi_2 f'$ , adică  $T(Y) \supseteq T(X)$ .

(ii) Fie  $(X_k)_{k \geq 1} \subseteq \mathcal{K}$ , cu  $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots$ . Considerăm imaginea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin X_1 \\ 1 - 1/k & , x \in X_{k-1} \setminus X_k \\ 1 & , x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \end{cases}$$

Avem  $\chi_{1-1/k} f = X_k$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$  și  $\chi_1 f = \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k$ . Funcția  $f' = \overline{T}(f)$  va avea deci printre mulțimile sale de nivel mulțimile  $\chi_{1-1/k} f' = T(X_k)$  și  $\chi_1 f' = T(\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k)$ . Deoarece  $1 - 1/k \nearrow 1$  când  $k \rightarrow \infty$ , din a doua proprietate a mulțimilor de nivel rezultă imediat că

$$\chi_1 f' = \bigcap_{k=1}^{\infty} \chi_{1-1/k} f',$$

adică

$$T \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \right) = \bigcap_{k=1}^{\infty} T(X_k).$$

(iii) Fie imaginea  $f(x) = 0$ ,  $\forall x \in D$ . Avem  $\emptyset = \bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} T(\chi_\lambda f) = T(\emptyset) \cap$

$T(D) = T(\emptyset)$ . Analog se arată și că  $T(D) = D$ .

*Suficiența:*

Va trebui să demonstrăm că dacă  $T$  satisface proprietățile (i), (ii) și (iii) din enunț, și dacă  $f$  este o imagine, atunci familia  $(X_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{N}}$  dată prin  $X_\lambda = T(\chi_\lambda f)$  verifică ipotezele teoremei 2.4.

Mai întâi, dacă  $\lambda \leq \mu$ , atunci  $\chi_\lambda f \supseteq \chi_\mu f$  și din monotonia lui  $T$  rezultă  $X_\lambda \supseteq X_\mu$ .

Mai departe, deoarece  $X_\lambda \subseteq X_\mu$ ,  $\forall \mu < \lambda$ , rezultă  $X_\lambda \subseteq \bigcap_{\mu < \lambda} X_\mu$ . Mai rămâne de demonstrat incluziunea în sens invers.

Fie  $x \in \bigcap_{\mu < \lambda} X_\mu$ . Considerăm un șir  $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ , crescător și convergent către  $\lambda$ . Vom avea

$$x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_{\mu_i} = \bigcap_{i=1}^{\infty} T(\chi_{\mu_i} f) = T \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} \chi_{\mu_i} f \right)$$

și cum se demonstrează imediat că

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} \chi_{\mu_i} f = \bigcap_{\mu < \lambda} \chi_\mu f = \chi_\lambda f,$$

rezultă  $\bigcap_{\mu < \lambda} X_\mu \subseteq X_\lambda$ .

În sfârșit,  $\bigcap_{\lambda \in \mathbb{R}} X_\lambda = \emptyset$  și  $\bigcup_{\lambda \in \mathbb{R}} X_\lambda = D$  sunt imediate.  $\diamond$

Denumirea de *extindere* este justificată de faptul că, indiferent dacă privim o imagine alb-negru ca o submulțime a domeniului  $D$  sau ca o funcție cu valori în  $\{0, 1\}$ , rezultatul aplicării lui  $T$ , respectiv  $\bar{T}$ , este același. Mai exact:

**Propoziția 2.8** *Dacă  $f \in \mathcal{F}$  este funcția caracteristică a mulțimii  $X \in \mathcal{K}$ , atunci  $\bar{T}(f)$  este funcția caracteristică a mulțimii  $T(X)$ .*

Demonstrația este imediată.

Să examinăm ce proprietăți are o transformare de imagini rezultată prin extensia unei transformări de forme.

**Definiția 2.9** *O transformare  $\bar{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  se numește independentă de contrast dacă, pentru orice imagine  $f$  și pentru orice schimbare de contrast  $g$  continuă la dreapta (sau — echivalent datorită monotoniei — semicontinuă inferior), avem*

$$\bar{T}(g \circ f) = g \circ (\bar{T}(f)).$$

**Teorema 2.10** *Dacă  $\overline{T} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  este extinderea la imagini monocrome a unei transformări de forme  $T : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{K}$ , atunci pentru orice imagine monocromă  $f$  și pentru orice schimbare de contrast  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  nedescrescătoare și continuă la dreapta, avem*

$$g \circ (\overline{T}(f)) = \overline{T}(g \circ f),$$

*altfel spus,  $\overline{T}$  este independentă de contrast.*

**Demonstrație** Pentru orice  $\lambda \in \mathbb{R}$  și pentru orice  $x \in D$  astfel încât  $\lambda \leq f(x)$  avem  $g(\lambda) \leq (g \circ f)(x)$ . Prin urmare, pentru orice  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\chi_\lambda f \subseteq \chi_{g(\lambda)} g \circ f$  și prin urmare  $T(\chi_\lambda f) \subseteq T(\chi_{g(\lambda)} g \circ f)$ . Luând un  $x \in D$  arbitrar și punând  $\lambda = \overline{T}(f)(x)$ , obținem

$$x \in T(\chi_\lambda f) \subseteq T(\chi_{g(\lambda)} g \circ f)$$

de unde  $g(\lambda) \leq \overline{T}(g \circ f)$  adică  $g(\overline{T}(f)(x)) \leq \overline{T}(g \circ f)(x)$ .

Pentru a demonstra egalitatea, să presupunem prin absurd că, pentru un anumit  $x \in D$ ,  $g(\overline{T}(f)(x)) < \overline{T}(g \circ f)(x)$ . Să notăm  $\mu^* = \overline{T}(g \circ f)(x)$ . Fie  $\lambda^* = \inf\{\lambda \in \mathbb{R} : g(\lambda) \geq \mu^*\}$ . Deoarece  $\mu^* > g(\overline{T}(f)(x))$ , rezultă că  $\lambda^* \geq \overline{T}(f)(x) > -\infty$ .

Mai departe, avem două cazuri:

1.  $\mu^* \in g(\mathbb{R})$  : În acest caz, deoarece  $g$  este continuă la dreapta, deducem  $g(\lambda^*) = \mu^*$  și de aici  $\lambda^* > \overline{T}(f)(x)$ . De aici rezultă că  $x \notin T(\chi_{\lambda^*} f)$ .

Pe de altă parte, deoarece  $\lambda^* = \min\{\lambda \in \mathbb{R} : g(\lambda) = \mu^*\}$ , orice  $y \in D$  care satisface  $g(f(y)) \geq g(\lambda^*)$  satisface și  $f(y) \geq \lambda^*$ . Prin urmare,  $\chi_{g(\lambda^*)} g \circ f \subseteq \chi_{\lambda^*} f$  și prin urmare  $T(\chi_{g(\lambda^*)} g \circ f) \subseteq T(\chi_{\lambda^*} f)$ . Acum din definiția lui  $\mu^*$  rezultă  $x \in T(\chi_{\mu^*} g \circ f)$  și din incluziune rezultă  $x \in T(\chi_{\lambda^*} f)$ , contradicție.

2.  $\mu^* \notin g(\mathbb{R})$  : În acest caz, din continuitatea la dreapta a lui  $g$  deducem  $g(\lambda^*) > \mu^*$ . Mai departe, cum pentru orice  $y \in D$ , dacă  $g(f(y)) \geq \mu^*$  rezultă  $f(y) \geq \lambda^*$  și deci  $g(f(y)) \geq g(\lambda^*)$ , rezultă  $\chi_{\mu^*} g \circ f \subseteq \chi_{g(\lambda^*)} g \circ f$  și prin urmare  $\mu^*$  nu poate fi supremumul mulțimii  $\{\mu \in \mathbb{R} : x \in T(\chi_\mu g \circ f)\}$ .

Prin urmare, în ambele cazuri am ajuns la o contradicție. Înseamnă deci că presupunerea  $\overline{T}(g \circ f)(x) > g(\overline{T}(f)(x))$  a fost falsă, de unde rezultă  $g \circ \overline{T}(f) = \overline{T}(g \circ f)$ .  $\diamond$

Reciproc, orice transformare independentă de contrast este extinderea unei transformări morfologice care satisface condițiile teoremei 2.7. Avem următoarea teoremă:

**Teorema 2.11** Fie  $T' : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$  o transformare independentă de contrast. Atunci  $T'$  este extinderea operatorului morfologic  $T$  definit prin

$$T(X) = \{x \in D : T'(\psi_X) = 1\},$$

unde prin  $\psi_X$  am notat funcția caracteristică<sup>1</sup> a mulțimii  $X$ .

**Demonstrație** Începem prin a demonstra că  $T$  se poate extinde la o transformare pentru imagini monocrome, altfel spus  $T$  satisface condițiile teoremei 2.7.

(i) Fie  $X, Y \subseteq D$  cu  $X \subseteq Y$ . Considerăm imaginea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin Y \\ 1 & , x \in Y \setminus X \\ 2 & , x \in X \end{cases}$$

și schimbările de contrast

$$g_1(x) = \begin{cases} 0 & , x < 2 \\ 1 & , x \geq 2 \end{cases}$$

$$g_2(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 \\ 1 & , x \geq 1 \end{cases}$$

Se vede imediat că  $g_1 \circ f = \psi_X$  și  $g_2 \circ f = \psi_Y$ .

Considerăm acum un  $x \in T(X)$  oarecare și vom demonstra că  $x \in T(Y)$ . Dacă  $x \in T(X)$ , înseamnă că  $T'(\psi_X)(x) = 1$ , sau  $T'(g_1 \circ f)(x) = 1$ , de unde  $g_1(T'(f)(x)) = 1$ .

Rezultă că  $T'(f)(x) \geq 2$ , de unde  $T'(f)(x) \geq 1$  și deci  $g_2(T'(f)(x)) = 1$ . De aici  $T'(g_2 \circ f)(x) = 1$ , sau, echivalent,  $T'(\psi_Y) = 1$  și deci  $x \in T(Y)$ .

(ii) Considerăm imaginea

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \notin X_1 \\ 1 - 1/k & , x \in X_{k-1} \setminus X_k \\ 1 & , x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \end{cases}$$

și schimbările de contrast

$$g_k(x) = \begin{cases} 0 & , x < 1 - 1/(k+1) \\ 1 & , x \geq 1 - 1/(k+1) \end{cases} \quad , \text{ pentru } k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$$

---

<sup>1</sup>De obicei funcția caracteristică se notează cu  $\chi$ ; în acest context însă  $\chi$  desemnează multimi de nivel

Se vede imediat că  $g_k \circ f = \psi_{X_i}$  și  $g_\infty \circ f = \psi_{\bigcap_{i=1}^\infty X_i}$ .

Considerăm acum un  $x \in \bigcap_{i=1}^\infty T(X_i)$  și vom arăta că  $x \in T\left(\bigcap_{i=1}^\infty X_i\right)$ .

Avem:

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad x \in T(X_i)$$

adică

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad T'(g_i \circ f)(x) = 1$$

de unde

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad g_i(T'(f)(x)) = 1$$

sau

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad T'(f)(x) \geq 1 - 1/(i+1)$$

de unde rezultă că

$$T'(f)(x) \geq 1$$

De aici rezultă  $g_\infty(T'(f)(x)) = 1$ , și, deoarece  $T'$  comută cu schimbarea de contrast  $g_\infty$ , avem  $T'(g_\infty \circ f)(x) = 1$  adică  $x \in T\left(\bigcap_{i=1}^\infty X_i\right)$ .

(iii) Presupunem prin absurd că există  $x \in T(\emptyset)$ . Aceasta înseamnă că

$$T'(\psi_\emptyset)(x) = 1.$$

Fie acum schimbarea de contrast  $g(x) = 2x$ . Avem

$$\forall t \in D, \quad g(\psi_\emptyset(t)) = g(0) = 0 = \psi_\emptyset(t)$$

adică  $g \circ \psi_\emptyset = \psi_\emptyset$ . Înlocuind, obținem  $T'(g \circ \psi_\emptyset)(x) = 1$  și cum  $T'$  comută cu schimbarea de contrast  $g$  obținem  $g(T'(\psi_\emptyset)(x)) = 1$ . Dar cum  $T(\psi_\emptyset)(x) = 1$  obținem  $g(1) = 1$  adică  $2 = 1$ , absurd. Rezultă deci că  $T(\emptyset) = \emptyset$ . Analog se demonstrează și că  $T(D) = D$ .

Fie acum  $\bar{T}$  extinderea lui  $T$  și să arătăm că  $\bar{T} = T'$ . Pentru aceasta, să considerăm o imagine  $f \in \mathcal{F}$  oarecare și  $x \in D$ . Fie  $\lambda = T'(f)(x)$  și fie schimbarea de contrast

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < \lambda \\ 1 & , \quad t \geq \lambda \end{cases}.$$

Avem  $g(T'(f)(x)) = 1$  și, din independența de contrast a lui  $T'$ , deducem  $T'(g \circ f)(x) = 1$ . Deoarece  $g \circ f$  ia valori în  $\{0, 1\}$ ,  $g \circ f$  este funcția caracteristică a mulțimii  $\chi_{1g \circ f}$ , de unde, conform definiției lui  $T$ , avem  $x \in T(\chi_{1g \circ f})$ . Aplicând în continuare definiția lui  $\bar{T}$ , deducem  $\bar{T}(g \circ f)(x) \geq 1$ , sau, echivalent,  $g(\bar{T}(f)(x)) \geq 1$ , adică  $\bar{T}(f)(x) \geq \lambda$ .



Am demonstrat prin urmare că  $\overline{T}(f)(x) \geq T'(f)(x)$ . În mod cu totul analog, se demonstrează că  $T'(f)(x) \geq \overline{T}(f)(x)$ , și prin urmare  $T' = \overline{T}$ .  $\diamond$

În încheiere, să analizăm, sub aspectul posibilității de extindere la o transformare independentă de contrast, transformările morfologice analizate mai devreme în acest capitol, și anume eroziunea, dilatarea și convoluția cu discriminare (celelalte transformări nefiind monotone). Fie  $d = \mathbb{R}^d$ .

Eroziunea satisface condițiile pentru a putea fi extinsă la o transformare independentă de contrast (a se vedea proprietățile 1 și 3).

Dilatarea nu îndeplinește, în general, proprietatea (ii). Exemplu: fie  $X_k$  discul centrat în origine și de rază  $1/k$ , și fie  $S \subseteq \mathbb{R}^d$ . Se vede imediat că

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} X_k = \emptyset$$

și ca urmare

$$G_S \left( \bigcap_{k=1}^{\infty} X_k \right) = \emptyset,$$

în timp ce

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} G_S(X_k) = S.$$

Pentru a recăpăta proprietatea (ii), putem să ne restrângem la mulțimile închise din  $\mathbb{R}^d$ .

În sfârșit, convoluția cu discriminare poate fi și ea extinsă la o transformare independentă de contrast.

# Capitolul 3

## Reprezentarea formelor

### 3.1 Caracteristici globale

Ca proprietăți globale ale unei forme, putem enumera:

- aria formei, adică măsura contraimaginii lui 1;
- numărul de componente conexe;
- numărul de componente conexe ale complementarei;
- topologia formei.

### 3.2 Reprezentări geometrice

Reprezentările geometrice sunt reprezentări care pleacă de la forme geometrice elementare.

Cea mai simplă reprezentare geometrică este aceea prin poligoane: forma de reprezentat este aproximată prin reuniunea interioarelor unui număr finit de poligoane. Extinderea în spațiu 3D presupune reprezentarea formelor ca reuniune de poliedre.

Reprezentările poligonale, respectiv poliedrale, necesită un număr mare de vârfuri pentru o bună aproximare a formei. Aceasta se întâmplă indeosebi dacă se dorește folosirea reprezentării pentru grafică (destinată a fi vizualizată de om): aici “colțurile” sunt observate imediat și “deranjează”. Din acest motiv, se recurge fie la reprezentarea formelor prin zone delimitate de curbe sau suprafețe de ordin superior, fie la interpolări și neteziri pe imaginile generate spre a fi vizualizate.

La același număr de puncte de control, reprezentarea formelor plane ca zone delimitate de arce de curbe, de exemplu Bézier sau Spline, conduce la o

aproximare mai bună. Din păcate, crește de asemenea și dificultatea lucrului cu asemenea reprezentări.

Reprezentările prin figuri geometrice necesită o metodă de reprezentare a poziției vârfurilor. Cea mai comună este prin coordonatele carteziane ale vârfurilor. Se pune însă problema tipului numeric folosit pentru coordonate. Se pot alege reprezentări exacte, prin numere întregi sau raționale, sau reprezentări aproximative, cu virgulă mobilă.

Algoritmii care lucrează cu reprezentări geometrice au nevoie să calculeze coordonatele unor puncte, altele decât cele din datele de intrare — de exemplu, punctele de intersecție ale unor segmente date la intrare prin coordonatele extremităților. Dacă coordonatele extremităților a două segmente sunt date ca numere întregi pe  $n$  biți, atunci pentru reprezentarea coordonatelor punctului de intersecție avem nevoie de numere raționale, reprezentate pe  $3n$  biți ( $2n$  biți pentru numărător și  $n$  biți pentru numitor). În alte cazuri, este suficientă evaluarea unui predicat geometric; aceasta revine, în majoritatea cazurilor, la determinarea semnului unui polinom de un anumit grad, aplicat asupra coordonatelor punctelor.

Există mai multe metode pentru aflarea semnului polinoamelor (sau altor funcții) ce intervin în predicatul geometric:

1. Cea mai naturală metodă este ca punctele de plecare să aibă coordonate întregi, iar calculele să se facă folosind aritmetică întreagă pe număr variabil de biți — obținând astfel precizie nelimitată.
2. Dacă este totuși necesară determinarea unor puncte (de exemplu, punctele de intersecție ale unor drepte determinate de punctele inițiale), se face aritmetică cu numere raționale;
3. În anumite condiții, aritmetica în virgulă mobilă a calculatorului este suficientă. În [12] se arată că pe această cale se poate determina de ce parte se găsește un punct dat față de o dreaptă determinată de două puncte date, aceasta folosind doar aritmetică flotantă la aceeași precizie cu a datelor de intrare. Dublând precizia, se poate determina dacă un punct dat se găsește în interiorul cercului determinat de alte 3 puncte date.
4. În special acolo unde se cere determinarea unor coordonate sau unor dimensiuni care nu rezulta ca funcții polinomiale sau raționale aplicate datelor de intrare, se poate ține întreaga expresie care le determină, iar valoarea se calculează cu precizia necesară determinării semnului;
5. Shewchuk propune [13] un algoritm rapid pentru aritmetică cu precizie nelimitată, bazându-se pe o reprezentare ne-normalizată

O discuție asupra modului de alegere a reprezentării coordonatelor punctelor și implicațiilor asupra algoritmilor utilizabili și modului de implementare se găsește în [8], [7], [9].

O altă abordare a problemelor legate de precizia reprezentării este ca algoritmul geometric să nu încerce niciodată să evalueze un predicat geometric a cărui valoare de adevăr poate fi dedusă din valorile de adevăr ale predicatelor deja evaluate, sau din construcțiile efectuate de algoritm. De exemplu, dacă un punct  $P$  este construit de algoritm ca fiind punctul de intersecție al dreptelor  $d_1$  și  $d_2$ , atunci valoarea de adevăr a predicatului *punctul  $P$  aparține dreptei  $d_1$*  va fi găsită ca fiind *adevărat* fără a face calcule de coordonate, supuse eventual erorilor de aproximare. În felul acesta, reprezentarea aproximativă (prin numere cu virgulă mobilă) a coordonatelor vârfurilor nu dăunează bunei funcționări a algoritmilor geometrice. Din păcate, determinarea tuturor implicațiilor predicatelor geometrice este dificilă (vezi [11]).

### 3.3 Reprezentarea prin pixeli

Cea mai simplă este reprezentarea directă, numită *bitmap*, folosind câte un bit pentru fiecare pixel. Permite accesul rapid la valoarea fiecărui pixel, cu prețul unui consum mare de memorie.

Consumul de memorie se micșorează prin folosirea metodelor de compresie. Printre metodele de compresie amintim: compresia LZW (de la inițialele numelor autorilor, Lempel, Ziv, Welch) folosită de formatul GIF (Graphics Interchange Format), sau metoda *run-length encoding*, folosită pentru transmiterea faxurilor.

Alte metode de reprezentare bazate pe pixeli reprezintă, într-o formă sau alta, conturul (frontiera) formei. În acest sens, au fost explorate următoarele posibilități:

- enumerarea coordonatelor pixelilor de pe contur,
- secvanța direcțiilor conturului, sau char secvanța curburilor,
- *codul lanț* — numit și *codul Freeman* — este un tip particular de descriptor prin direcțiile tangentelor, distanța între două puncte succesive de pe contur în care reprezentăm tangentele este de exact un pixel,
- semnatura, care consta în șirul distanțelor de la un punct interior la frontieră, în funcție de unghi (altfel spus, șirul coordonatelor polare ale pixelilor).

## 3.4 Metode avansate de reprezentare a formelor

Pentru a fi utile în procesări ulterioare ale imaginilor, și îndeosebi în recunoașterea obiectelor, sunt dezirabile reprezentări având proprietăți cum ar fi:

- invarianță la translație, rotație, scalare;
- reprezentări multiscalare (multirezoluție);
- sensibilitate redusă la zgomot (adică mici variații ale imaginii, datorate zgomotului, să se reflecte în variații reduse la nivelul reprezentării);
- sensibilitate redusă la transformări de tip difeomorfism.

Pentru o formă stelată (adică, având proprietatea că există un punct aparținând interiorului, cu proprietatea că raza ce unește acel punct cu orice punct de pe frontieră este în întregime inclusă în interiorul formei) și în plan, se definește *semnătura* ca fiind secvența  $r_k = r(\theta_k) = r(\frac{2\pi k}{N})$  a coordonatelor polare ale pixelilor. Ca origine a sistemului de coordonate polare se ia *centroidul* conturului, adică punctul  $c = \sum_{k=1}^N p_k$ .

Semnătura este evident invariantă la translație. De asemenea, aducând punctul de rază maximă la  $\theta_0 = 0$ , semnătura devine invariantă la rotație.

Considerând punctele de pe contur ca fiind puncte în mulțimea numerelor complexe, frontiera (și prin urmare, forma) poate fi reprezentată prin transformata Fourier discretă a secvenței punctelor de pe frontieră. Din nou, avantajul este obținerea invarianței la rotire, translație și rotație.

Aplicațiile de recunoașterea formelor se confruntă cu următoarea problemă: dacă imaginea (discretă) are rezoluție mică, obiectele nu pot fi recunoscute; dacă, dimpotrivă, rezoluția imaginii este ridicată, atunci timpul necesar procesării este foarte ridicat. Este dezirabilă prin urmare disponibilitatea imaginii de analizat în mai multe rezoluții.

De asemenea, este dezirabil ca imaginea de rezoluție scăzută să conserve cât mai mult din proprietățile topologice și geometrice ale imaginii inițiale.

Metoda cea mai simplă de generare a unei imagini alb-negru de rezoluție mai scăzută este următoarea:

1. considerăm câte un pixel (voxel) din imaginea de rezoluție scăzută atașat unui pătrat (respectiv cub) de pixeli (voxeli) din imaginea originală;
2. fiecare pixel (voxel) este rezultatul unei operații *AND* sau *OR* asupra valorilor pixelilor voxelilor) originali.

Eventual se poate defini defini imaginea finală astfel: un pixel are valoarea 1 dacă și numai dacă cel puțin  $k$  dintre pixelii corespunzători din imaginea originală au valoarea 1.

În [10] se arată că alegerea grupării pixelilor imaginii originale în vederea reducerii rezoluției influențează mult rezultatul. Astfel, pentru o imagine plană din care se dorește obținerea unei imagini cu rezoluția înjumătățită pe fiecare direcție, fiecare pixel din imaginea rezultată este rezultatul combinării a 4 pixeli (formând un pătrat  $2 \times 2$ ) din imaginea originală. Există 4 posibilități de alegere a “grilei” de grupare în pătrate de  $2 \times 2$  a pixelilor din imaginea originală, fiecare ducând la alt rezultat.

Borgefors și coautorii propun trei metode mai bune de reducere a rezoluției.

Prima metodă constă în combinarea imaginilor ce s-ar obține alegând fiecare din cele 4 (în cazul 2D) sau 8 (în cazul 3D) grupări distincte ale pixelilor (voxelilor) vecini.

A doua metodă propusă pornește de la medierea valorilor pixelilor dintr-o zonă mai largă din imaginea inițială, dar pragul de discriminare folosit pentru a decide dacă pixelul din imaginea finală este influențat de poziția pixelului original ca maxim sau minim local, sau maxim sau minim local pe orizontală sau verticală.

Cea de-a treia metodă se bazează pe transformata distanță a imaginii originale. Transformata distanță asociază fiecărui pixel de valoare 1 raza celui mai mare disc centrat în acel pixel și inclus în mulțimea pixelilor de valoare 1. Metoda propusă în articol constă acum în a face ca în imaginea cu rezoluția redusă de  $n$  ori:

1. dacă un pixel original, asociat unui pixel din imaginea cu rezoluție redusă, este maxim local pentru transformata distanță, atunci și pixelul din imaginea de rezoluție redusă va fi maxim pentru transformata distanță;
2. raza corespunzătoare pixelului din imaginea de rezoluție redusă va fi  $1/n$  din raza corespunzătoare pixelului din imaginea inițială.

# Bibliografie

- [1] R. C. GONZALEZ, R. E. WOODS, *Digital Image Processing*, Addison-Wesley Publishing Company, 1993
- [2] V. GUI, D. LACRĂMĂ, D. PESCARU, *Prelucrarea imaginilor*, Editura politehnica Timișoara, 1999
- [3] P. BURGER, D. GILLIES, *Interactive Computer Graphics*, Addison-Wesley Publishing Company, 1990
- [4] TH. CORMEN, CH. LEISERSON, R. RIVEST, *Introducere în algoritmi*, Massachusetts Institute of Technology, 1990, trad. Computer Libris Agora
- [5] F. PREPARATA, M. SHAMOS, *Computational Geometry*, Springer-Verlag, 1985
- [6] J. MOREL, F. GUICHARD, *Traitement d'Images*, curs, ENS-Ulm, Paris, 1998
- [7] I. BALABAN, *An Optimal Algorithm for Finding Segment Intersections*, Proceedings of the Eleventh Annual Symposium on Computational Geometry, Vancouver, Canada, June 5-7, 1995, pg. 211-219
- [8] J.-D. BOISSONNAT, F. PREPARATA, *Robust Plane Sweep for Intersecting Segments*, Rapport de recherche no. 3270 sept. 1997, INRIA
- [9] R. LUPȘA, *Complexité algébrique des algorithmes géométriques*, stage de maîtrise, sept. 1998, ENS-Paris
- [10] G. BORGEFORS, G. RAMELA, G. SANNITI, S. SVENSSON, *On the Multiscale Representation of 2D and 3D Shapes*, Graphical Models and Image Processing, nr. 61, 1999
- [11] D. E. KNUTH, *Axioms and Hulls*, Lecture Notes in Computer Science #606, Springer-Verlag, Heidelberg, 1992

- [12] F. AVANIM, J. D. BOISSONNAT, O. DEVILLERS, F. PREPARATA, M. YVINEC, *Evaluating Signs of Determinants using Single-Precision Arithmetic*, Rapport de recherche, INRIA, 1995
- [13] J. R. SHEWCHUK, *Robust Adaptative Floating-Point Geometric Predicates* Carnegie Mellon University, [www.cs.cmu.edu](http://www.cs.cmu.edu) , 2000
- [14] C. E. KIM, A. ROSENFELD, *On the convexity of Digital Regions*, Proc. 5th JCPR, 1980
- [15] J.-M. CHASSERY, *Discrete Convexity: Definition, Parametrization, and Compatibility with Continuous Convexity*, Computer Vision, Graphics and Image Processing, nr. 21, 1983