Calculul celui de-al n-lea număr Fibonacci

Ne propunem să calculăm **fibo(n)** în timp **O(log n)**.

Vom porni de la următoarea ecuație matriceală:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} fibo(n) \\ fibo(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fibo(n+1) \\ fibo(n) \end{bmatrix}$$

Efectuând calcule în partea stângă obținem:

$$\begin{bmatrix} a \cdot fibo(n) + b \cdot fibo(n-1) \\ c \cdot fibo(n) + d \cdot fibo(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fibo(n+1) \\ fibo(n) \end{bmatrix}$$

De unde obținem:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Rezultă:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} fibo(n) \\ fibo(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fibo(n+1) \\ fibo(n) \end{bmatrix}$$

Sau, pentru a avea matrici de aceeași mărime:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} fibo(n) & fibo(n-1) \\ fibo(n-1) & fibo(n-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fibo(n+1) & fibo(n) \\ fibo(n) & fibo(n-1) \end{bmatrix}$$

Putem scrie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} fibo(2) & fibo(1) \\ fibo(1) & fibo(0) \end{bmatrix}$$

Așadar, vom avea:

$$\boldsymbol{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{n} = \begin{bmatrix} fibo(n+1) & fibo(n) \\ fibo(n) & fibo(n-1) \end{bmatrix}}$$

Astfel, putem determina exact orice număr Fibonacci în timp **O(log n)**, folosind algoritmul de exponențiere logaritmică pentru o matrice de 2x2.