Transformări Mobius

Diana-Florina Haliţă

Facultatea de Matematică şi Informatică
Masterat Matematică Didactică

10 Mai 2014

Rezumat

- Transformări Geometrice
- Structuri Algebrice $\Rightarrow$ Grupul Izometriilor, împreună cu subgrupurile acestuia
- Grupul Transformărilor Mobius + proprietăţi

Sfera Riemann

Definiţie

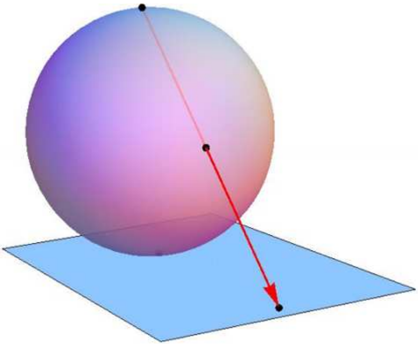
Sfera Riemann

$$\mathbb{P} = \left\{(z,t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} : |z|^2 + t^2 = 1\right\}.$$

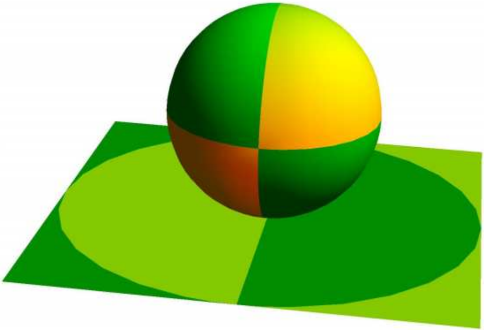
Definiţie

Prin proiecţie stereografică se întelege o aplicaţie care transformă fiecare punct al planului complex în plan de pe sfera Riemann şi reciproc.

Proiecţia stereografică



Proiectia stereografica



Proiectia stereografica a unei sfere

Proiecţia stereografică

$$\pi(z) = \left(\frac{2z}{1+|z|^2}, \frac{-1+|z|^2}{1+|z|^2}\right)$$

Această funcţie este bijectivă, iar inversa ei este $\pi^{-1} : \mathbb{P} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$\pi^{-1}(z,t) = \frac{z}{1-t}$$

Definiţie

Prin distanţă chordală între două puncte $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ se întelege distanţa euclidiană dintre proiecţiile stereografice ale celor două puncte, $\pi(z_1), \pi(z_2)$.

$$\kappa(z_1, z_2) = \frac{2|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + z_1^2}\sqrt{1 + z_2^2}}.$$

Proprietăţi

Proprietate

Proiecţia stereografică este o transformare conformă, adică păstrează unghiurile dintre două curbe.

Proprietate

Proiecţia stereografică transformă cercurile sau dreptele din planul complex în cercuri de pe sfera Riemann. Dreptele din planul complex vor corespunde cercurilor care trec prin polul nord al sferei Riemann.

Transformări Mobius

Definiţie

O transformare Mobius este o funcţie

$$T:\mathbb{C}\cup\{\infty\}\to\mathbb{C}\cup\{\infty\},\ T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ a,b,c,d\in\mathbb{C}, ad-bc\neq 0$$

Definiţie

Mulţimea tuturor transformărilor Mobius formează un grup:

$$(Mob,\circ)$$

Observaţie

Se pune în evidenţă omomorfismul între grupuri:

$$\Phi : GL_2(\mathbb{C}) \to Mob,\ \Phi\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{az+b}{cz+d}$$

Vizualizarea transformărilor Mobius - Puncte fixe

Teorema

O transformare Mobius diferită de transformarea identică are:

- *un punct fix, dacă matricea M corespunzătoare transformării este conjugată matricii* $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- *două puncte fixe, dacă matricea M corespunzătoare transformării este conjugată matricii* $M_k \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$

Observaţie

Dacă $c \neq 0$ *ambele puncte fixe sunt din* $\mathbb{C}$. *Dacă* $c = 0$ *atunci cel puţin unul din punctele fixe tinde spre* ∞.

Clasificarea Transformărilor Mobius

O transformare Mobius este:

- identitate, dacă M e conjugată $\pm\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- parabolică, dacă M e conjugată $\pm\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- eliptică, dacă M e conjugată $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, |\lambda| = 1$
- hiperbolică, dacă M e conjugată $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\{\pm 1\}$
- loxodromică, dacă M e conjugată $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, |\lambda| \neq 1$

Clasificarea Transformărilor Mobius

- parabolică, dacă $tr(M) = \pm 2$
- eliptică, dacă $-2 < tr(M) < 2$
- hiperbolică, dacă $tr(M) < -2$ sau $tr(M) > 2$
- loxodromică, dacă $tr(M) \notin \mathbb{R}$

sau echivalent,

- parabolică, dacă $tr(M)^2 = 4$
- eliptică, dacă $tr(M)^2 < 4$
- hiperbolică, dacă $tr(M)^2 > 4$
- loxodromică, dacă $tr(M)^2 \notin [0, \infty)$

Acţiunea Transformărilor Mobius asupra sferei Riemann

- transformare eliptică, $z \to e^{i\theta}z$ - această transformare roteşte sferă Riemann fixând punctele 0 şi ∞ - punctele se mişcă de-a lungul unui cerc

(a) elliptic

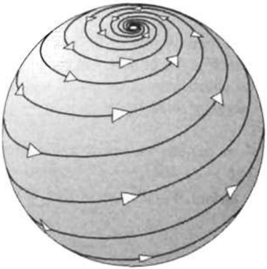
Acţiunea Transformărilor Mobius asupra sferei Riemann

- transformare hiperbolică, $z \to kz, k > 1$ - punctele se mişcă de-a lungul unui arc de cerc de la un punct fix la altul

(b) hyperbolic

Acţiunea Transformărilor Mobius asupra sferei Riemann

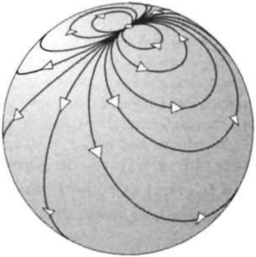
- transformare loxodromică, $z \to kz, k \notin \mathbb{R}$ - punctele se mişcă de-a lungul unei spirale logaritmice, de la un punct fix la altul



(c) loxodromic

Acţiunea Transformărilor Mobius asupra sferei Riemann

- transformare parabolică, $z \to z + 1$ - punctele se mişcă de-a lungul unui cerc, prin unicul punct fix.



(d) parabolic

Observaţie

Fie T o transformare Mobius $T(z) = Az + B$. În acest caz putem alege $A = \rho e^{i\alpha}$, cu scopul de a privi transformarea ca o compunere între o rotaţie de centru α, o dilatare de ordin ρ şi o translaţie de vector B.

Observaţie

$T(z) = Az + B$, $A = \rho e^{i\alpha}$.

Observaţie

Pentru $\alpha > 0, \rho = 1$ şi $B = 0$, $T(z)$ este o rotaţie a planului complex, care se mapează într-o rotaţie a sferei ((a)). Punctele fixe ale acestei transformări sunt cei doi poli ai sferei, care corespund în planul complex originii şi ∞-ului. Aceasta este o ***transformare Mobius eliptică****.*

Observaţie

$T(z) = Az + B$, $A = \rho e^{i\alpha}$.

Observaţie

Pentru $\alpha = 0, \rho > 1$ şi $B = 0$, $T(z)$ este o dilatare a planului complex centrată în origine ((b)). Punctele fixe ale acestei transformări sunt cei doi poli ai sferei, care corespund în planul complex originii şi ∞-ului.
Pentru $\alpha = 0, \rho < 1$ şi $B = 0$, $T(z)$ este o contracţie a planului complex centrată în origine.
*Aceste transformări sunt **transformări Mobius hiperbolice**.*

Observaţie

$T(z) = Az + B$, $A = \rho e^{i\alpha}$.

Observaţie

Pentru $\alpha \neq 0, \rho \neq 1$ şi $B = 0$, $T(z)$ este combinaţie dintre cele două cazuri anterioare ((c)). Punctele fixe ale acestei transformări sunt cei doi poli ai sferei, care corespund în planul complex originii şi ∞-ului. Aceasta este o ***transformare Mobius loxodromică.***

Observaţie

Pentru restul cazurilor posibile (adică $A = 0$ şi $B \neq 0$), $T(z)$ este o translaţie a planului complex ((d)). Singurul punct fix al acestei transformări este ∞, acesta corespunzând polului nord de pe sfera Riemann. Aceasta este o ***transformare Mobius parabolică****.*

Un scurt exemplu

- parabolică - $z \to \dfrac{z}{2iz+1}$ - punct fix 0
- loxodromică - $z \to 2iz$ -puncte fixe 0 şi ∞

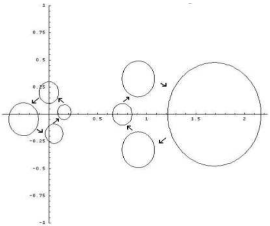
Un scurt exemplu

- eliptică - $z \rightarrow iz$ - puncte fixe 0 şi ∞

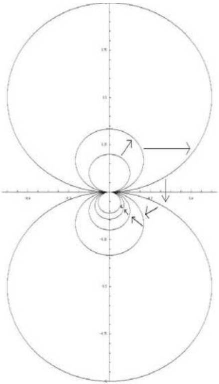
Observaţie

În cazul transformării eliptice, se observă faptul că prin aplicarea acesteia de 4 ori se ajunge la transformarea identică. Astfel, se observă faptul că prin transformarea aleasă fiecare cerc se transformă în el însuşi după 4 iteraţii.

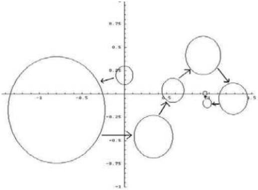
Tranformare eliptică



Transformare parabolică



Transformare loxodromică



Astfel, se observă principalele caracteristici ale transformărilor Mobius:

- parabolice: punctele de pe cercuri se mişcă spre punctele fixe
- eliptice: cercurile se mişcă în jurul punctului fix
- loxodromic: cercurile se mişcă în spirale cu extremităţile în cele două puncte fixe.

- Rich Schwartz: *Mobius Transformations and Circles*, *http : //www.math.brown.edu/ res/MFS/handout5.pdf*, 8 octombrie 2007
- -: *Classifying Mobius transformations: conjugacy, trace and applications to parabolic transformations*, http://www.maths.manchester.ac.uk/∼cwalkden/hyperbolic-geometry/lecture10.pdf
- -: *Classifying Mobius transformations: conjugacy, trace and applications to parabolic transformations*, http://www.maths.manchester.ac.uk/∼cwalkden/hyperbolic-geometry/lecture11.pdf

- Stephan Tillmann: *Geometry and Groups*, *http : //www.maths.usyd.edu.au/u/tillmann/2012 − amsi/g&g_02.pdf*, 12 ianuarie 2012
- Stephan Tillmann: *Geometry and Groups*, *http : //www.maths.usyd.edu.au/u/tillmann/2012 − amsi/g&g_04.pdf*, 12 ianuarie 2012
- *http : //www.math.tifr.res.in/ ∼ pablo/download/teichmuller/node4.html*
- T.K. Carne: *Geometry and Groups*, *https : //www.dpmms.cam.ac.uk/ tkc/GeometryandGroups/Geometryand* *https : //www.dpmms.cam.ac.uk/ tkc/GeometryandGroups/Corrections.pd* 2012

- *http : //en.wikipedia.org/wiki/M%C3%B6bius_transformation*
- Takis Konstantopoulos: *Complex Analysis*, *http : //www2.math.uu.se/ takis/L/ComplexAnalysis/complexnotes.pdf*
- L. Penaranda, L. Sacht, L. Velho : *Improving Projections of Panoramic Images with Mobius Transformations* *http : //dcc.ufrj.br/ luisp/publi/psv.pdf*
- Thomas Au :*Visualizing Complex Functions* *http : //www.math.cuhk.edu.hk/course/math3253/Notes02.pdf*

Multumesc!

Q & A