Imaginea unor cercuri de raza r prin functii analitice remarcabile

Diana-Florina Haliţă

Facultatea de Matematică şi Informatică
Masterat Matematică Didactică

10 Mai 2014

Rezumat

- Teoria Geometrică a Funcţiilor = Analiză Complexă + Geometrie
- Studiul Funcţiilor Analitice Remarcabile
- Clasele Speciale de Funcţii Univalente
- Observarea proprietăţilor funcţiilor din reprezentările grafice

Funcţii univalente

Definiţie

$A \subseteq \mathbb{C}$ domeniu, $f : A \to \mathbb{C}$. f univalentă pe A dacă f este olomorfă şi injectivă pe A.

Observaţie

$\mathcal{H}_u(A)$*=mulţimea Funcţiilor Univalente pe A*

Exerciţiu

Să se reprezinte cercurile cu centrul în origine şi de rază r, $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}(0; r)$ *prin funcţiile* f_a*, unde* $f_a(z) = z + az^2, a \in \{0.3, 0.5, 0.6\}$*, iar* $r \in \{0.5, 0.7, 0.9, 1\}$

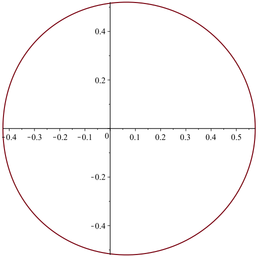

Figure 1 :
a=0.3,r=0.5

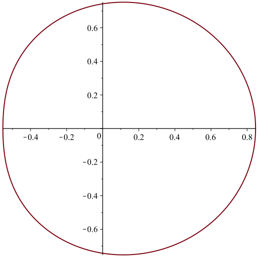

Figure 2 :
a=0.3,r=0.7

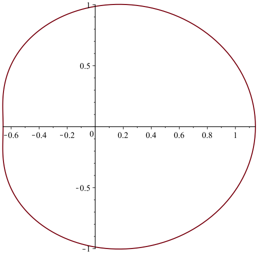

Figure 3 :
a=0.3,r=0.9

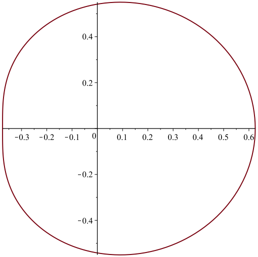

Figure 4 :
a=0.5,r=0.5

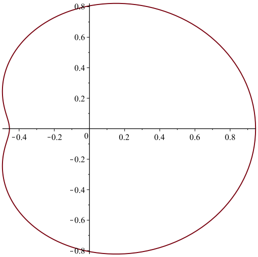

Figure 5 :
a=0.5,r=0.7

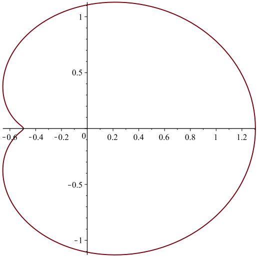

Figure 6 :
a=0.5,r=0.9

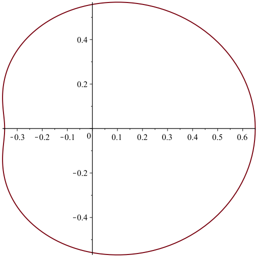

Figure 7 :
a=0.6,r=0.5

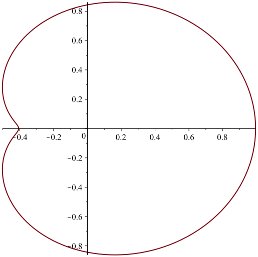

Figure 8 :
a=0.6,r=0.7

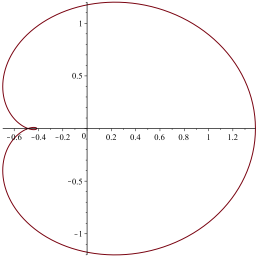

Figure 9 :
a=0.6,r=0.9

Clasa S
Clasa funcţiilor normate univalente pe discul unitate

Definiţie

$$S = \{f \in \mathcal{H}_u(U) \mid f(0) = 0,\ f'(0) = 1\}$$

Exemplu

Funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = az^2 + z$ *cu* $a \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *este univalentă. [3]*

Clasa S^*
Clasa funcţiilor stelate

Definiţie

$$S^* = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) \mid f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots,\ Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0,\ z \in U \right\}.$$

Clasa S^*
Clasa funcţiilor stelate

Exerciţiu

Să se reprezinte cercurile cu centrul în origine şi de rază r, $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}(0; r)$ prin funcţia lui Koebe $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, cand $r \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$.

Clasa S^*
Clasa funcţiilor stelate

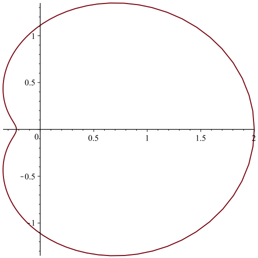

Figure 10 : r=0.5

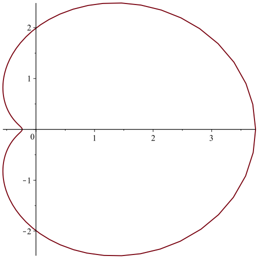

Figure 11 : r=0.6

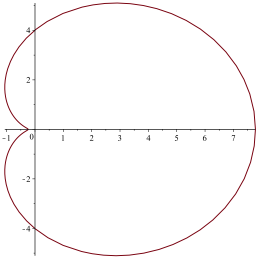

Figure 12 : r=0.7

Clasa S^*
Clasa funcţiilor stelate

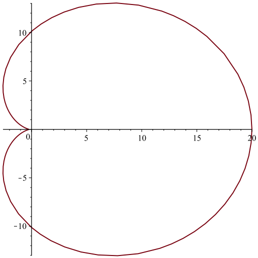

Figure 13 : r=0.8

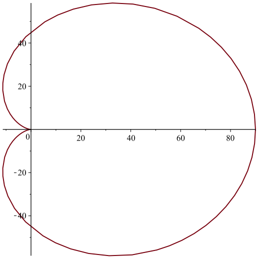

Figure 14 : r=0.9

Clasa S^*
Clasa funcţiilor stelate

Exerciţiu

Funcţia $f(z) = -2z + z^2 + 6\log\dfrac{2+z}{z}$ *este o funcţie care are partea reală a derivatei pozitivă. Aceasta este un exemplu de funcţie care nu este stelată. Demonstraţia acestui fapt se găseşte în [2], p. 89. Însă intuitiv, acest lucru se observă astfel:*

Clasa S^*
Clasa funcţiilor stelate

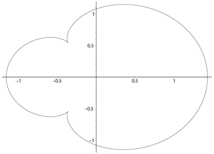

Figure 15 : r=1

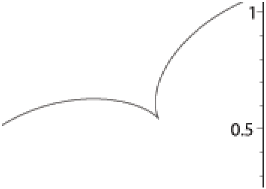

Figure 16 : r=1,zoom

Clasa K
Clasa funcţiilor convexe

Definiţie

$$\mathcal{K} = \{f \in A : Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, z \in U\}$$

Clasa K
Clasa funcţiilor convexe

Exerciţiu

Să se reprezinte cercurile cu centrul în origine şi de rază r, $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}(0; r)$ *prin functia convexă a lui Koebe* $s(z) = \dfrac{z}{1-z}$, *cand* $r \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$.
Funcţia s *se numeste funcţia convexă a lui Koebe deoarece* $zs'(z) = k(z)$.

Clasa K
Clasa funcţiilor convexe

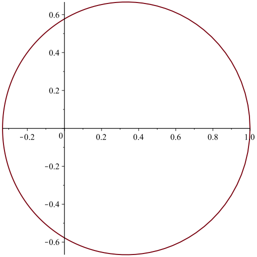

Figure 17 : r=0.5

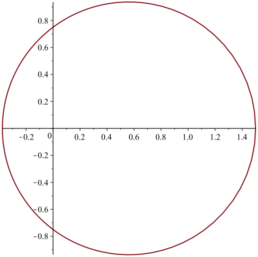

Figure 18 : r=0.6

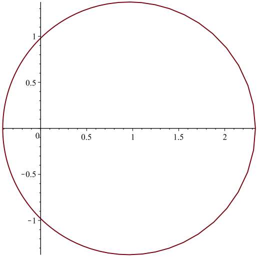

Figure 19 : r=0.7

Clasa K
Clasa funcţiilor convexe

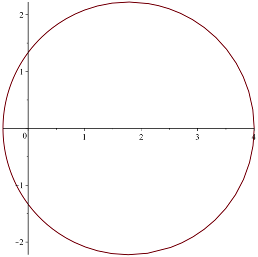

Figure 20 : r=0.8

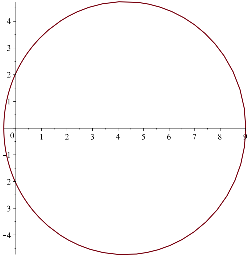

Figure 21 : r=0.9

Clasa funcţiilor spiralate

Definiţie

O funcţie f $\in \mathcal{H}_u(U)$, *cu* $f(0) = 0$, *este o funcţie spiralată de tip* γ *în discul unitate* U *dacă f este univalentă în* U *si domeniul* U *este spiralat de tip* γ.

Clasa funcţiilor spiralate

Exerciţiu

Fie funcţia $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^{2e^{-i\gamma}\cos\gamma}}$. *Ea transformă discul unitate pe complementul unei spirale de tip* γ. *Să se reprezinte grafic imaginile discurilor cu raza subunitară prin această funcţie pentru valori diferite ale lui* γ.

Clasa funcţiilor spiralate

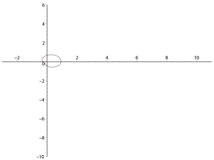

Figure 22 : $\gamma = \frac{\pi}{6}$, r=0.4

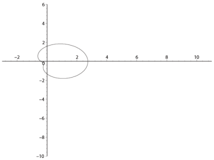

Figure 23 : $\gamma = \frac{\pi}{6}$,r=0.6

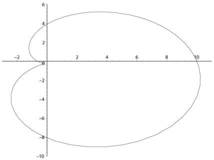

Figure 24 : $\gamma = \frac{\pi}{6}$,r=0.8

Clasa funcţiilor spiralate

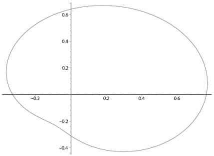

Figure 25 : $\gamma = \frac{\pi}{4}$, r=0.4

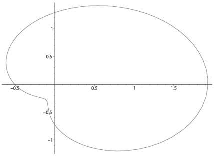

Figure 26 : $\gamma = \frac{\pi}{4}$,r=0.6

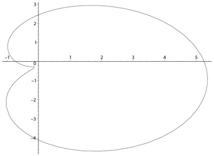

Figure 27 : $\gamma = \frac{\pi}{4}$,r=0.8

Clasa funcţiilor spiralate

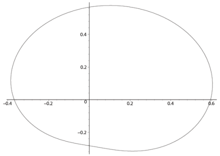

Figure 28 : $\gamma = \frac{\pi}{3}$, r=0.4

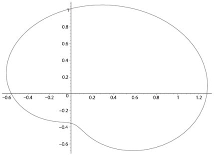

Figure 29 : $\gamma = \frac{\pi}{3}$,r=0.6

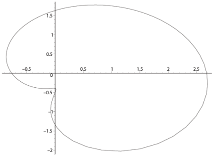

Figure 30 : $\gamma = \frac{\pi}{3}$,r=0.8

- P. Hamburg, P. T. Mocanu, N. Negoescu - *Analiză matematică (Funcţii complexe)*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982.
- P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G.S. Sălăgean - *Teoria Geometrică a funcţiilor univalente*, Editura Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2006
- G.S. Sălăgean - *Geometria planului complex*, Editura ProMedia plus, Cluj-Napoca, 1997

Multumesc!

Q & A