Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie

Rezolvarea unor probleme de Geometrie cu metode ale Analizei Complexe

"Adevărul matematic, indiferent unde, la Paris sau la Toulouse, este unul și același." (Blaise Pascal)

Diana-Florina Haliță
grupa 331

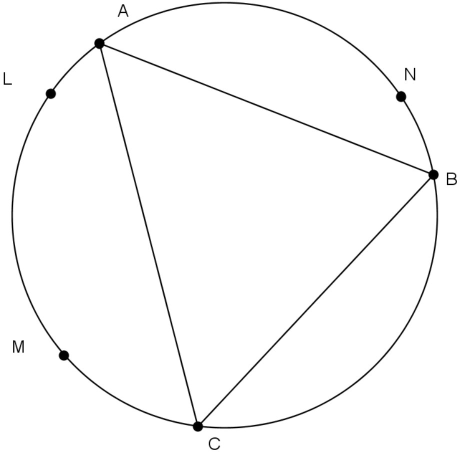
Universitatea Babeș-Bolyai Cluj-Napoca
Facultatea de Matematică și Informatică
Specializarea Matematică-Informatică, linia de studiu română

05 Mai 2012

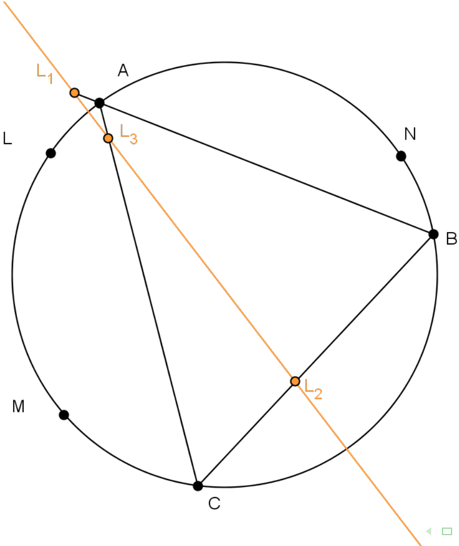
Problema 1.1

Fie A, B, C, L, M, N șase puncte pe un cerc. Atunci dreptele lui Simson ale punctelor L, M, N în raport cu triunghiul ABC se intersectează într-un singur punct dacă și numai dacă dreptele lui Simson ale punctelor A, B, C în raport cu triunghiul LMN se intersectează într-un singur punct. În plus în acest caz cele șase drepte ale lui Simson se intersectează în mijlocul segmentului format de ortocentrele triunghiurilor ABC și LMN.

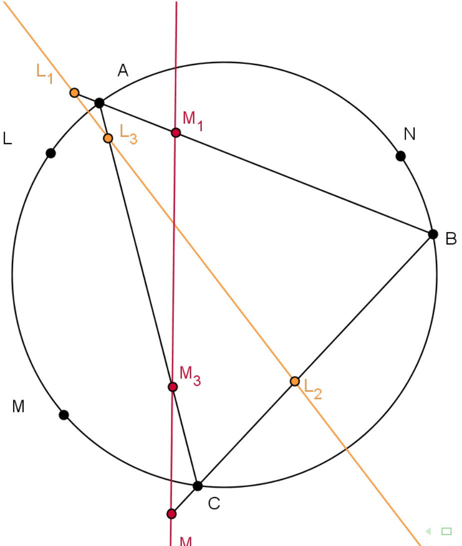
DREAPTA LUI SIMSON



DREAPTA LUI SIMSON



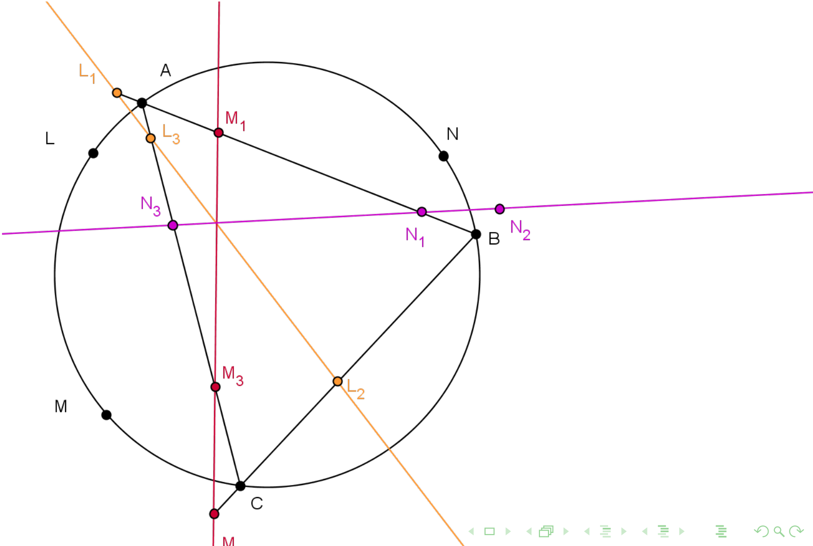
DREAPTA LUI SIMSON



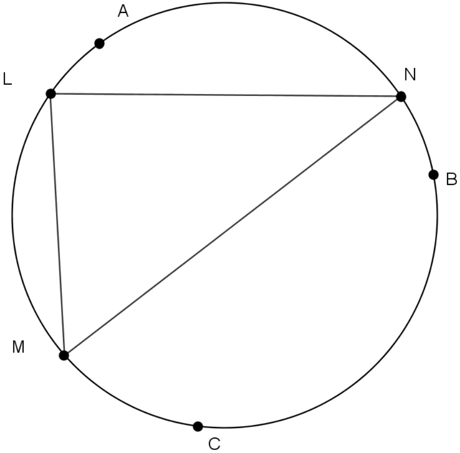
Rezolvarea unor probleme de Geometrie cu metode ale Analizei Complexe

Diana-Florina Haliță
grupa 331

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie



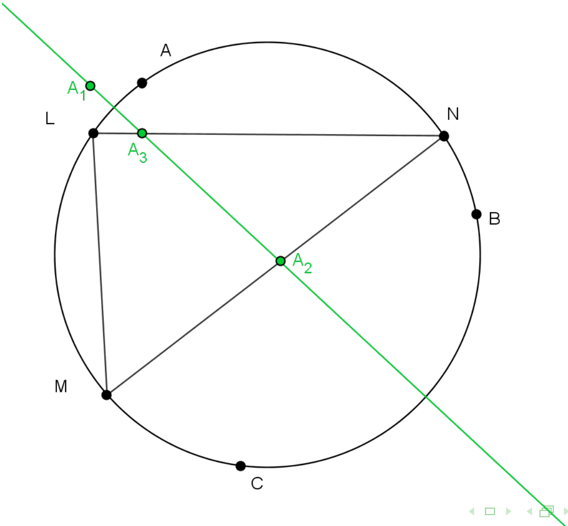
Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie



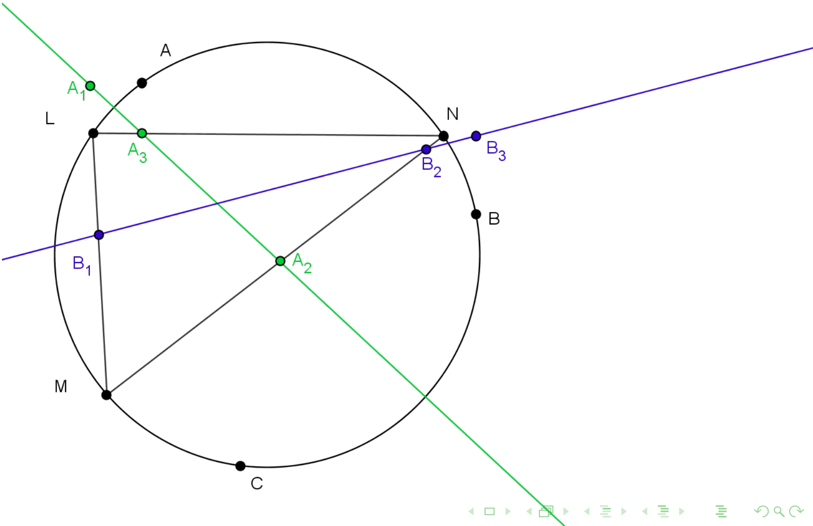
Diana-Florina Haliță
grupa 331

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie

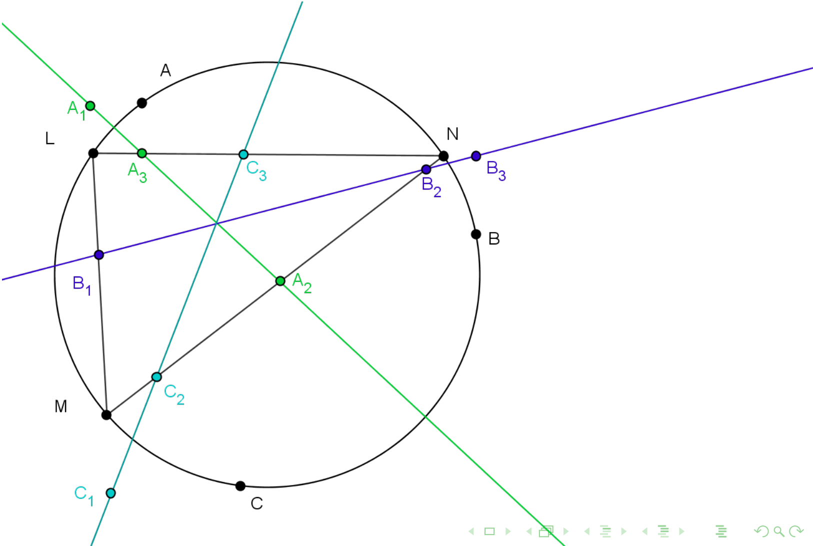
DREAPTA LUI SIMSON



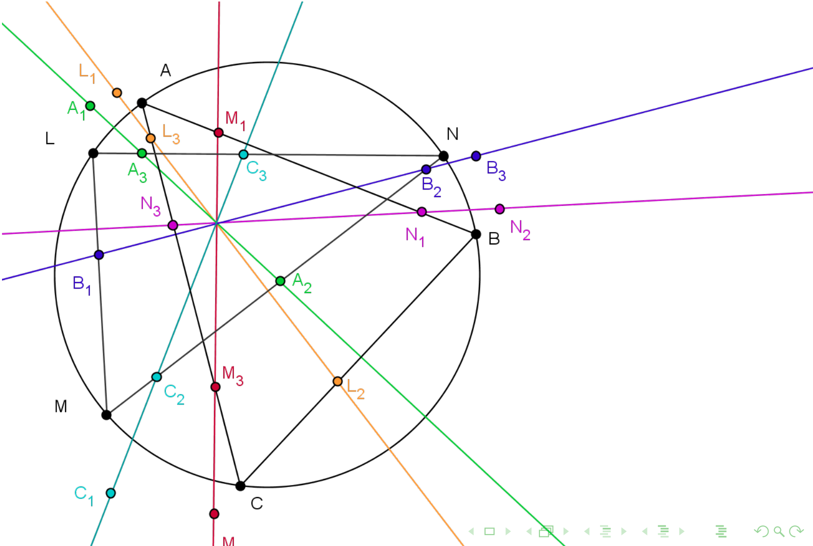
DREAPTA LUI SIMSON



DREAPTA LUI SIMSON



DREAPTA LUI SIMSON



Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie

DREAPTA LUI SIMSON

Notez cu literele mici corespunzătoare afixele punctelor A, B, C, L, M, N și presupun că cercul circumscris triunghiurilor ABC și LMN este **cercul unitate**.

Dreapta AB este de ecuație:

$$AB : \begin{vmatrix} a & \bar{a} & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a-b & \bar{a}-\bar{b} & 0 \\ b & \bar{b} & 1 \\ c-b & \bar{c}-\bar{b} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{AB} : \mathbf{z} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \cdot \bar{\mathbf{z}} - \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

DREAPTA LUI SIMSON

Perpendiculara din L pe AB este $LL_1 := z - l = \dfrac{a \cdot b}{1} \cdot (\bar{z} - \bar{l})$

$\mathbf{LL_1 : z - a \cdot b \cdot \bar{z} + a \cdot b \cdot \bar{l} - l = 0}$.

Știind că L_1 este punctul de intersecție al dreptelor LL_1 și AB putem afla afixul acestuia.

$$\mathbf{l_1 = \frac{1}{2} \cdot (-a \cdot b \cdot \bar{l} + l + a + b)}.$$

Analog se găsesc punctele L_2 (piciorul perpendicularei din L pe BC) și L_3 (piciorul perpendicularei din L pe AC)

$$\mathbf{l_2 = \frac{1}{2} \cdot (-b \cdot c \cdot \bar{l} + l + c + b)}$$

$$\mathbf{l_3 = \frac{1}{2} \cdot (-a \cdot c \cdot \bar{l} + l + a + c)}.$$

Ecuația dreptei lui Simson a lui L față de triunghiul ABC este:

$$L_1L_3 : \begin{vmatrix} l_1 & \overline{l_1} & 1 \\ l_3 & \overline{l_3} & 1 \\ z & \overline{z} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow L_1L_3 : \begin{vmatrix} l_1 - l_3 & \overline{l_1} - \overline{l_3} & 0 \\ l_3 & \overline{l_3} & 1 \\ z - l_3 & \overline{z} - \overline{l_3} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$L_1L_3 : 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot \overline{l}\cdot \overline{z} - 2\cdot z = \overline{l}\cdot (a\cdot c + a\cdot b + b\cdot c) - l - a - b - c + a\cdot b\cdot c\cdot \overline{l}^2$$

Înmulțind relația cu l și tinând cont de faptul că $l \cdot \overline{l} = 1$ se obține:

$$L_1L_3 : 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot \overline{z} - 2\cdot l\cdot z = a\cdot c + a\cdot b + b\cdot c - l^2 - l\cdot (a + b + c) + a\cdot b\cdot c\cdot \overline{l}$$

Notez $A_1 = a + b + c; A_2 = a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c; A_3 = a \cdot b \cdot c.$

$$\mathbf{L_1L_3} : \mathbf{2 \cdot A_3 \cdot \overline{z} - 2 \cdot l \cdot z = A_2 - l^2 - l \cdot A_1 + A_3 \cdot \overline{l}}.$$

DREAPTA LUI SIMSON

Diana-Florina Haliță
grupa 331

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie

Analog se obține:
$\mathbf{M_1M_3 : 2 \cdot A_3 \cdot \bar{z} - 2 \cdot m \cdot z = A_2 - m^2 - m \cdot A_1 + A_3 \cdot \bar{m}}$
$\mathbf{N_1N_3 : 2 \cdot A_3 \cdot \bar{z} - 2 \cdot n \cdot z = A_2 - n^2 - n \cdot A_1 + A_3 \cdot \bar{n}}$.
Intersectând L_1L_3 cu M_1M_3 se obține punctul de afix :

$$z_1 = \frac{1}{2} \cdot [m + l + A_1 + \frac{A_3}{m \cdot l}].$$

Intersectând L_1L_3 cu N_1N_3 se obține punctul de afix :

$$z_2 = \frac{1}{2} \cdot [n + l + A_1 + \frac{A_3}{n \cdot l}].$$

Condiția ca cele trei drepte să se intersecteze în același punct este ca $z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathbf{a \cdot b \cdot c = l \cdot m \cdot n}$
Deci punctul de intersecție al dreptelor este de afix:

$$\frac{1}{2} \cdot [a + b + c + l + m + n].$$

Procedând analog, prin simetrie se obține că: A_1A_3, B_1B_3 și C_1C_3 se intersectează în același punct $\Leftrightarrow a \cdot b \cdot c = l \cdot m \cdot n$.

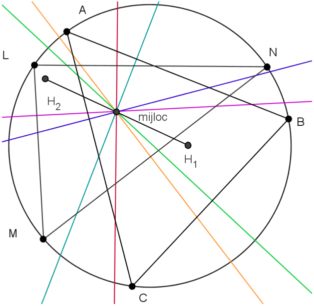
DREAPTA LUI SIMSON

Rezolvarea unor probleme de Geometrie cu metode ale Analizei Complexe

Diana-Florina Haliță grupa 331

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie

Ortocentrul H_1 al triunghiului ABC este de afix $h_1 = a + b + c$, iar ortocentrul H_2 al triunghiului LMN este de afix $h_2 = l + m + n$. Mijlocul segmentului H_1H_2 este de afix $z = \frac{h_1 + h_2}{2}$, adica $z = \frac{1}{2} \cdot [a + b + c + m + n + l]$ și deci coincide cu punctul de intersecție al celor șase drepte ale lui Simson.

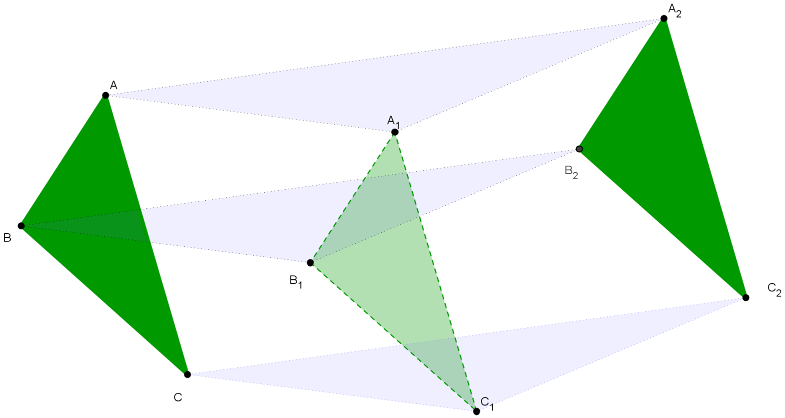


Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie

Problema 2.1

Presupunând că triunghiurile ABC și $A_1B_1C_1$ sunt asemenea și că triunghiurile AA_1A_2, BB_1B_2 și CC_1C_2 sunt și ele asemenea arătați că triunghiurile $A_2B_2C_2$ și ABC sunt asemenea.

J.PETERSEN-P.H.SCHOUTE



Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie

J.PETERSEN-P.H.SCHOUTE

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta AA_1A_2 \sim \Delta BB_1B_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a_1 & a_2 \\ b & b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\mathbf{a_2 = a + \frac{a_1 - a}{b_1 - b} \cdot (b_2 - b)}$$

$$\Delta BB_1B_2 \sim \Delta CC_1C_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & b_1 & b_2 \\ c & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{b_2 = b + \frac{b_1 - b}{c_1 - c} \cdot (c_2 - c)}$$

Din relațiile de mai sus se obține deci că:

$$\mathbf{a_2 = a + \frac{a_1 - a}{c_1 - c} \cdot (c_2 - c)}$$

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie

$$\Delta ABC \sim \Delta A_2B_2C_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Atunci:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a + \dfrac{a_1 - a}{c_1 - c} \cdot (c_2 - c) & b + \dfrac{b_1 - b}{c_1 - c} \cdot (c_2 - c) & c_2 \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{c_1 - c} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1(c_2 - c) & b_1(c_2 - c) & c_1(c_2 - c) \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

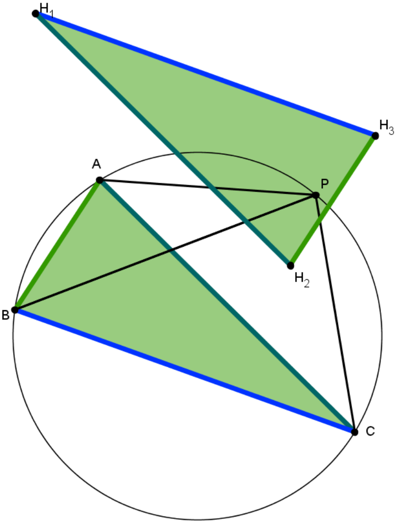
$$= \frac{c_2 - c}{c_1 - c} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

Diana-Florina Haliță
grupa 331

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie

Problema 3.1

Fie P un punct situat pe cercul circumscris unui triunghi ABC. Să se arate că ortocentrele triunghiurilor PAB, PBC, PCA formează un triunghi congruent cu cel dat.

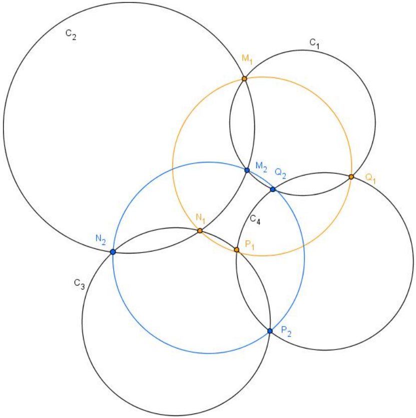

H1
H3
A
P
H2
B
C

Fie H_1 ortocentrul triunghiului $ABP \Rightarrow z_{H_1} = z_A + z_P + z_B$.
Fie H_2 ortocentrul triunghiului $BPC \Rightarrow z_{H_2} = z_B + z_P + z_C$.
Fie H_3 ortocentrul triunghiului $CPA \Rightarrow z_{H_1} = z_C + z_P + z_A$.
$H_1H_2 = |z_{H_2} - z_{H_1}| = |z_B + z_P + z_C - z_A - z_B - z_P| = |z_C - z_A| = AC$.
$H_2H_3 = |z_{H_3} - z_{H_2}| = |z_A + z_P + z_C - z_B - z_P - z_C| = |z_A - z_B| = AB$.
$H_1H_3 = |z_{H_3} - z_{H_1}| = |z_A + z_P + z_C - z_A - z_B - z_P| = |z_C - z_B| = BC$.
Rezultă că triunghiul $H_1H_2H_3$ este congruent cu triunghiul ABC.

Problema 4.1

Fie C_1, C_2, C_3, C_4 patru cercuri în plan și M_1, M_2 punctele de intersecție ale lui C_1 cu C_2, N_1, N_2 punctele de intersecție ale lui C_2 cu C_3, P_1, P_2 punctele de intersecție ale lui C_3 cu C_4 și Q_1, Q_2 punctele de intersecție ale lui C_4 cu C_1. Să se demonstreze că M_1, N_1, P_1, Q_1 sunt conciclice $\Leftrightarrow M_2, N_2, P_2, Q_2$ sunt conciclice.

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie



Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie

Introduc notiunea de *biraport* a patru numere complexe prin:

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

$M_1, M_2, Q_1, Q_2 \in$ cercului $C_1 \Rightarrow a_1 = (q_1, m_2, m_1, q_2) \in \mathbb{R}^*$

$M_1, M_2, N_1, N_2 \in$ cercului $C_2 \Rightarrow a_2 = (m_1, n_2, n_1, m_2) \in \mathbb{R}^*$

$N_1, N_2, P_1, P_2 \in$ cercului $C_3 \Rightarrow a_3 = (n_1, p_2, p_1, n_2) \in \mathbb{R}^*$

$P_1, P_2, Q_1, Q_2 \in$ cercului $C_4 \Rightarrow a_4 = (p_1, q_2, q_1, p_2) \in \mathbb{R}^*$

M_1, N_1, P_1, Q_1 conciclice $\Leftrightarrow R_1 = (m_1, p_1, n_1, q_1) \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$

$$R_1 = \frac{m_1 - n_1}{p_1 - n_1} : \frac{m_1 - q_1}{p_1 - q_1} \in \mathbb{R}^*$$

M_2, N_2, P_2, Q_2 conciclice $\Leftrightarrow R_2 = (m_2, p_2, n_2, q_2) \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$

$$R_2 = \frac{m_2 - n_2}{p_2 - n_2} : \frac{m_2 - q_2}{p_2 - q_2} \in \mathbb{R}^*$$

$R_1 = -\dfrac{a_2 \cdot a_4}{a_3 \cdot a_1} \cdot R_2$. Deci $R_1 \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow R_2 \in \mathbb{R}^*$.

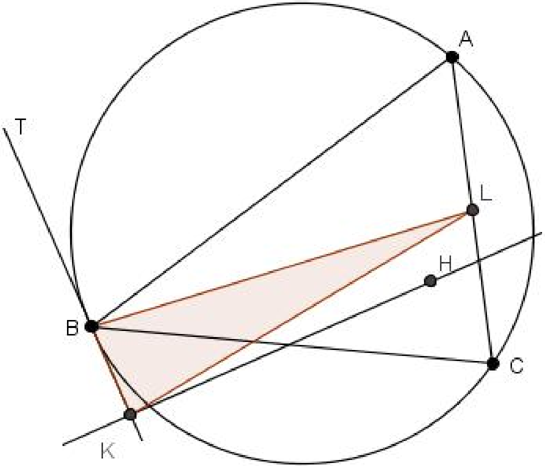
OM St. Petersburg 2000

Problema 5.1

Dreapta T este tangentă la cercul circumscris triunghiului ascuțitunghic ABC în punctul B. Fie K proiecția ortocentrului triunghiului ABC pe dreapta T. Fie L mijlocul laturii AC. Să se arate ca triunghiul BKL este isoscel.

OM St. Petersburg 2000

Problema 1
Problema 2
Problema 3
Problema 4
Problema 5
Problema 6
Bibliografie



OM St. Petersburg 2000

L este mijlocul laturii $AC \Rightarrow l = \dfrac{a+c}{2}$
Fie cercul circumscris triunghiului ABC cercul unitate si O, centrul cercului circumscris, originea sistemului de axe de coordonate. În acest caz ecuația cercului este: $z \cdot \bar{z} = 1$.
S-a demonstrat că ortocentul H este de afix $h = a + b + c$.
OB raza și BK e tangenta $\Rightarrow OB \perp BK$. Cum $HK \perp BK$ rezultă că $HK \parallel OB$.

Ecuația lui OB : $\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & \bar{b} & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow z \cdot \bar{b} - \bar{z} \cdot b = 0$

Ecuația lui HK : $z \cdot \bar{b} - \bar{z} \cdot b + q = 0$ și $H \in HK$
$\Rightarrow q = \bar{a} \cdot b - a \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot b - c \cdot \bar{b}$
Deci HK : $z \cdot \bar{b} - \bar{z} \cdot b + \bar{a} \cdot b - a \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot b - c \cdot \bar{b} = 0$

Ecuația tangentei BK se determină utilizând relația $BK \perp OB$

$$\Rightarrow BK : z - b = \frac{-b}{\bar{b}} \cdot (\bar{z} - \bar{b}) = 0 \Leftrightarrow z \cdot \bar{b} + \bar{z} \cdot b - 2 = 0$$

Coordonatele lui K se determină rezolvând : $BK \cap HK = \{K\}$

$$\begin{cases} z \cdot \bar{b} + \bar{z} \cdot b - 2 = 0 \\ z \cdot \bar{b} - \bar{z} \cdot b + \bar{a} \cdot b - a \cdot \bar{b} + \bar{c} \cdot b - c \cdot \bar{b} = 0 \end{cases}$$

Prin adunarea relațiilor se obține:

$$k = \frac{2 - \bar{a} \cdot b + a \cdot b - \bar{c} \cdot b + \bar{c} \cdot b}{2 \cdot \bar{b}}$$

$$BL = |l - b| = |\frac{a + c - 2 \cdot b}{2}|$$

$$KL = |l - k| = |\frac{\bar{a} + \bar{c} - 2 \cdot \bar{b}}{2}|$$

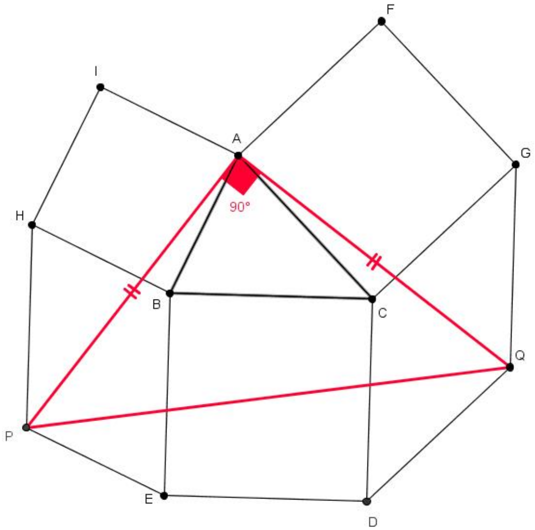
$KL = BL \Rightarrow$ triunghiul BKL este isoscel.

TST Iugoslavia 1992

Problema 6.1

Se construiesc în exteriorul triunghiului ABC pătratele $BCDE$, $CAFG$, $ABHI$. Fie $GCDQ$ și $EBHP$ paralelograme. Să se demonstreze că triunghiul APQ este isoscel.

TST Iugoslavia 1992



TST Iugoslavia 1992

E se obține din C prin rotație în jurul lui B cu 270°
$\Leftrightarrow e = b + (c - b) \cdot [\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ] =$
$b + (c - b) \cdot (-i) = b(1 + i) - c \cdot i$
H se obține din A prin rotație în jurul lui B cu 90°
$\Leftrightarrow h = b + (a - b) \cdot [\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ] = b + (a - b) \cdot i =$
$b(1 - i) + a \cdot i$
D se obține din B prin rotație în jurul lui C cu 90°
$\Leftrightarrow d = c + (b - c) \cdot [\cos 90^\circ + i \cdot \sin 90^\circ] = c + (b - c) \cdot i =$
$c(1 - i) + b \cdot i$
G se obține din A prin rotație în jurul lui C cu 270°
$\Leftrightarrow g = c + (a - c) \cdot [\cos 270^\circ + i \cdot \sin 270^\circ] =$
$c + (a - c) \cdot (-i) = c(1 + i) - a \cdot i$

$HBEP$ paralelogram
$\Leftrightarrow p + b = h + e \Leftrightarrow p = 2 \cdot b - c \cdot i + a \cdot i - b = b - c \cdot i + a \cdot i$
$CGQD$ paralelogram
$\Leftrightarrow q + c = d + g \Leftrightarrow q = 2 \cdot c + b \cdot i - a \cdot i - c = c + b \cdot i - a \cdot i$
$AP = |p - a| = |b - c \cdot i + a \cdot i - a|$
$AQ = |q - a| = |c + b \cdot i - a \cdot i - a| =$
$|i| \cdot | - c \cdot i + b - a + a \cdot i| = 1 \cdot AP = AP$
$\Rightarrow \Delta APQ$ isoscel

- T. Andreescu, D. Andrica, *Complex numbers from A to ... Z*. Birkhauser, Boston(2005)
- L.S. Hahn, *Complex Numbers&Geometry*.The Mathematichal Association of America(1984)
- P.S. Modenov, *Problems in Geometry*. Mir Publishers - Moscow(1981)
- G. Sălăgean, *Geometria planului complex*, Editura ProMedia Plus, Cluj-Napoca(1997)