Teorema lui Napoleon. Cercul celor 9 puncte ale lui Euler

Diana Haliță

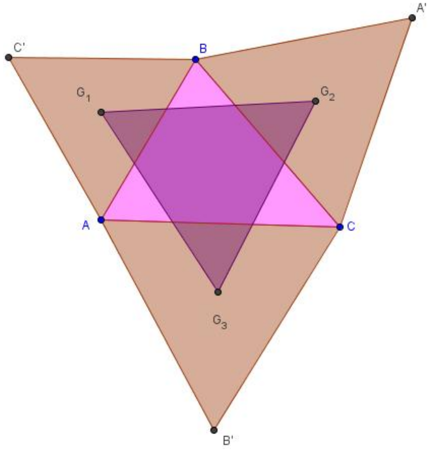
Facultatea de Matematică și Informatică

29 august 2011

Teorema lui Napoleon

Teorema lui Napoleon

- În exteriorul triunghiului ABC se construiesc triunghiurile echilaterale pozitiv orientate $AC'B$, $BA'C$, $CB'A$. Demonstrați că centrele de greutate ale acestor triunghiuri formează un triunghi echilateral.



Lemă și Observație

- Lemă
  Fie $A_1(a_1), A_2(a_2), A_3(a_3), B_1(b_1), B_2(b_2), B_3(b_3)$.
  Se dau triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$. Știind că cele două triunghiuri sunt la fel orientate putem spune că următoarele afirmații sunt echivalente:
  i) triunghiurile $A_1A_2A_3$ și $B_1B_2B_3$. sunt asemenea în această ordine
  ii) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$

- Observație:
  Triunghiul ABC este asemenea cu triunghiul $BCA \Leftrightarrow$ triunghiul ABC este echilateral și are loc $a + \varepsilon \cdot b + \varepsilon^2 \cdot c = 0$, unde ε este rădăcina complexă nereală, de ordinul 3 a unitățiii.

- $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ b_1 & b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$
  $\begin{vmatrix} a_2 - a_1 & a_3 - a_1 \\ b_2 - b_1 & b_3 - b_1 \end{vmatrix} = 0$
  $\Leftrightarrow (a_2 - a_1) \cdot (b_3 - b_1) - (a_3 - a_1) \cdot (b_2 - b_1) = 0 \Leftrightarrow$
  $(a_2 - a_1) \cdot (b_3 - b_1) = (a_3 - a_1) \cdot (b_2 - b_1)$
  $\Leftrightarrow \frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1} = \frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}$
  $\Leftrightarrow \left|\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}\right| = \left|\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1}\right|$ și $arg(\frac{a_2 - a_1}{a_3 - a_1}) = arg(\frac{b_2 - b_1}{b_3 - b_1})$
  $\Leftrightarrow \frac{|a_2 - a_1|}{|a_3 - a_1|} = \frac{|b_2 - b_1|}{|b_3 - b_1|}$ și $m(\angle(A_3 A_1 A_2)) = m(\angle(B_3 B_1 B_2))$
  $\Leftrightarrow \frac{A_1 A_2}{A_1 A_3} = \frac{B_1 B_2}{B_1 B_3}$ și $m(\angle(A_3 A_1 A_2)) = m(\angle(B_3 B_1 B_2))$
  $\Leftrightarrow$ triunghiurile $A_1 A_2 A_3$ și $B_1 B_2 B_3$ sunt asemenea.

Demonstrația observației

- Fie $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$. Conform lemei anterioare triunghiurile ABC și BCA sunt asemenea $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b & c & a \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ b & c-b & a-b \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ c-b & a-b \end{vmatrix} = 0$

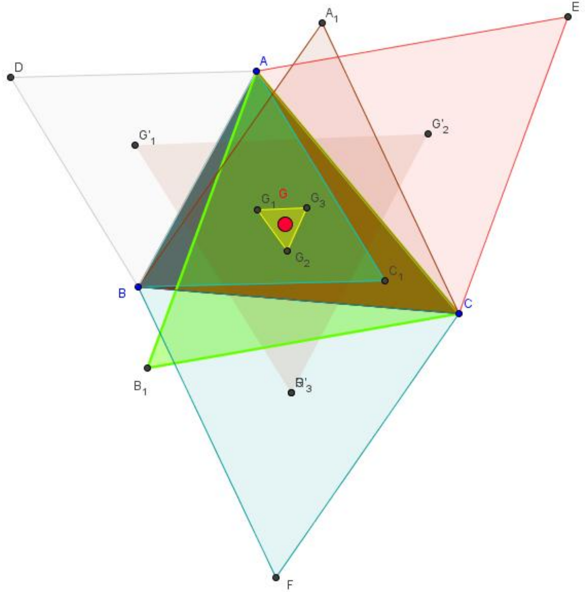
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-b)^2 = 0$

$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (a + \varepsilon \cdot b + \varepsilon^2 \cdot c) \cdot (a + \varepsilon \cdot c + \varepsilon^2 \cdot b) = 0 \\ \text{triunghiul } ABC \text{ este echilateral} \end{array} \right.$

- Fie $A(a), B(b), C(c), A'(a'), B'(b'), C'(c')$ și G_1, G_2, G_3 centrele de greutate ale triunghiurilor $AC'B, BA'C, CB'A$. Din observația anterioară și din ipoteza teoremei, conform căreia triunghiurile $AC'B, BA'C, CB'A$ sunt echilaterale stim:
  $a + c' \cdot \varepsilon + b \cdot \varepsilon^2 = 0$
  $b + a' \cdot \varepsilon + c \cdot \varepsilon^2 = 0$
  $c + b' \cdot \varepsilon + a \cdot \varepsilon^2 = 0$
  Centrele de greutate ale triunghiurilor echilaterale $AC'B, BA'C, CB'A$ sunt: $G_1(a''), G_2(b''), G_3(c'')$ unde:
  $a'' = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c')$
  $b'' = \frac{1}{3} \cdot (a' + b + c)$
  $c'' = \frac{1}{3} \cdot (a + b' + c)$
  Rămâne să demonstrăm că triunghiul $G_1G_2G_3$ este echilateral, adică
  $c'' + \varepsilon \cdot a'' + \varepsilon^2 \cdot b'' = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot ((a + b' + c) + (a + b + c') \cdot \varepsilon + (a' + b + c) \cdot \varepsilon^2)$
  $= \frac{1}{3} \cdot ((a + c' \cdot \varepsilon + b \cdot \varepsilon^2) + \varepsilon \cdot (b + a' \cdot \varepsilon + c \cdot \varepsilon^2) + \varepsilon^2 \cdot (c + \varepsilon \cdot b' + \varepsilon^2 \cdot a)) = 0$

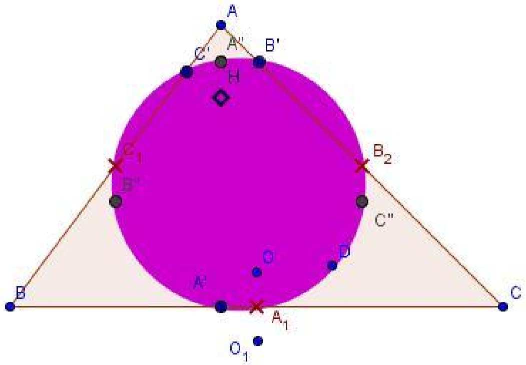
Teorema lui Napoleon



Cercul celor 9 puncte ale lui Euler

Cercul celor 9 puncte ale lui Euler

- Mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălțimilor , mijloacele segmentelor ce unesc vârfurile cu ortocentrul sunt nouă puncte situate pe un cerc, cu centrul în mijlocul segmentului care unește centrul cercului circumscris triunghiului dat cu ortocentrul și cu raza egală cu jumătate din raza cercului circumscris, numit cercul lui Euler.

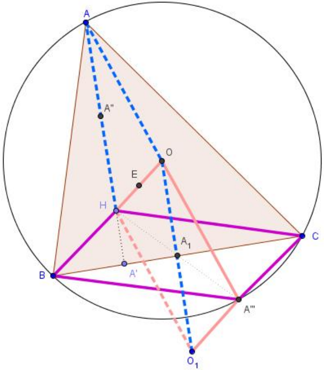


Demonstrație

- Fie triunghiului ABC, O centrul cercului circumscris acestui triunghi, H ortocentrul și A_1, B_1, C_1 mijloacele laturilor BC, AC, respectiv AB. Notez A'', B'', C'' mijloacele segmentelor AH, BH, CH, E mijlocul segmentului OH, și A', B', C' picioarele inălțimilor triunghiului ABC, utilizand litere mici pentru a nota afixele punctelor considerate.
- Fie O originea reperului ales și $A(a), B(b), C(c)$.
Rezultă: $a_1 = \frac{b+c}{2}$, $a'' = \frac{a+h}{2}$. Demonstrez că $h = a + b + c$.
- Fie O_1 simetricul lui O în raport cu $BC \Rightarrow o_1 = 2 \cdot a_1 - 0 = b + c$.
Fie A''' punctul de pe cerc obținut astfel încat $AB \perp BA'''$.
$BHCA'''$ paralelogram $\Rightarrow A_1$ este și mijlocul lui HA'''
OHO_1A''' paralelogram(diagonalele se intersectează în mijloc)
$\Rightarrow HO_1 \parallel AO$.
Dar $AH \parallel OO_1 \Rightarrow AOO_1H$ paralelogram $\Rightarrow o + h = o_1 + a$
$\Rightarrow h = a + b + c$

Demonstrație

- Avem $|a| = |b| = |c| = R$. Deoarece $e = \frac{h}{2}$ avem: $e = \frac{a+b+c}{2}$.
  Se observă că E este și mijlocul segmentului $A''A_1 \Rightarrow EA'' = EA_1$.
  Patrulaterul $A'A_1OH$ fiind trapez dreptunghic avem $A'E = EA_1$. Deci A', A_1, A'' sunt pe cercul cu centrul în E și de rază:
  $EA_1 = |a_1 - e| = |\frac{a}{2}| = \frac{R}{2}$. Analog se demonstreaza că și punctele $B_1, B', B'', C_1, C', C''$ sunt pe centrul de centru E si rază $\frac{R}{2}$



Bibliografie

1. T. Andreescu, D. Andrica, Complex Numbers from A to...Z, Birkhauser Boston, 2001
2. Liang-shin Hahn, Complex Numbers and Geometry, The Mathematical Association of America, 1994
3. G. S. Sălăgean, Geometria Planului Complex, Promedia-Plus, Cluj-Napoca, 1997
4. D. Andrica, N. Bișboacă, Numere Complexe. Probleme rezolvate din manualele alternative, Millenium Cluj-Napoca,2000
5. N. Mihăileanu, Utilizarea numerelor complexe în geometrie, Editura Tehnică, București 1968