

# Aplicații ale numerelor complexe în Geometrie

Absolvent: **Haliță Diana-Florina**

Coordonator științific: **Prof. Dr. Sălăgean Grigore**

UNIVERSITATEA "BABEȘ-BOLYAI" CLUJ-NAPOCA  
FACULTATEA DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ  
Specializarea Matematică-Informatică, linia de studiu română

29 Iunie 2012



## 1 Introducere

## 2 Capitolul I

## 3 Capitolul II

## 4 Probleme

## 5 DIDACTICA MATEMATICII 2011

## 6 DIDACTICA MATEMATICII 2012

## 7 Bibliografie

## Motivația:

- Cu ajutorul numerelor complexe se vor redescoperi vectorii, trigonometria și geometria.
- Îmbinarea dintre cele două domenii: cel al Numerelor Complexe și cel al Geometriei este una inedită.
- Interdisciplinaritatea

## Conținut:

- Capitolul I: sunt detaliate aspecte teoretice, rezultatele clasice ale analizei complexe referitoare la tema aleasă.
- Capitolul II: am propus spre rezolvarea cu ajutorul numerelor complexe teoreme și probleme de geometrie.

# CAPITOLUL I - Numere complexe - definiții

Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:  
Haliță

Diana-Florina  
Coordonator

științific:  
Prof. Dr.  
Sălăgean  
Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2011

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2012

- Proprietăți generale
- Măsura unui unghi. Unghiul a două drepte
- Caracterizarea segmentului, a semidrepte și a drepte
- Afixul unui punct care împarte un segment într-un raport dat
- Condiții de coliniaritate, perpendicularitate și conciclicitate
- Triunghiuri asemenea
- Ecuațiile drepte în plan
- Ecuațiile unui cerc în plan
- Produsul real. Produsul complex
- Transformări geometrice
  - Translația
  - Simetria
  - Rotația
  - Omotetia
  - Inversiunea

# CAPITOLUL II - Teoreme și probleme rezolvate cu ajutorul numerelor complexe

Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:  
Haliță

Diana-Florina  
Coordonator  
științific:  
Prof. Dr.  
Sălăgean  
Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2011

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2012

- Probleme diverse
- Probleme de coliniaritate și conciclicitate
- Probleme de asemănare a două triunghiuri
- Probleme de construcție de guri geometrice
- Teoreme faimoase din geometrie
  - TEOREMA LUI PAPPUS
  - TEOREMA LUI EULER
  - \*RELAȚIA LUI EULER
  - \*INEGALITATEA LUI PTOLEMEU
  - TEOREMA LUI POMPEIU
  - DREAPTA LUI EULER
  - DREAPTA LUI SIMSON
  - \*RELAȚIA LUI VAN AUBEL

# CAPITOLUL II - Teoreme și probleme rezolvate cu ajutorul numerelor complexe

Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:  
Haliță

Diana-Florina  
Coordonator

științific:  
Prof. Dr.  
Sălăgean  
Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2011

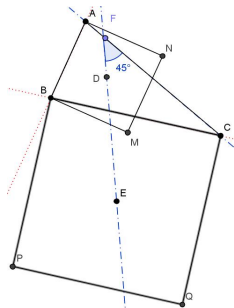
DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2012

- Probleme de paralelism și perpendicularitate
- Teoreme prezentate în cadrul Sesiunilor de Comunicări
  - \*TEOREMA LUI NAPOLEON
  - \* CERCUL CELOR NOUĂ PUNCTE ALE LUI EULER
  - \*DREAPTA LUI SIMSON
  - Problema celor 4 cercuri
  - \*J.PETERSEN-P.H.SCHOUTE
  - \*Problema triunghiurilor congruente
  - \*OM St. Petersburg 2000
  - \*TST Iugoslavia 1992
- Probleme date la concursuri și olimpiade școlare

# PROBLEME DIVERSE - 3.1.7

## Problema

Pe laturile  $AB$  și  $BC$  ale triunghiului  $ABC$  se construiesc pătrate având centrele  $D$  și  $E$ , a.î. punctele  $C$  și  $D$  sunt situate de aceeași parte a dreptei  $AB$ , iar punctele  $A$  și  $E$  sunt separate de dreapta  $BC$ . Să se arate că dreptele  $AC$  și  $DE$  se intersectează după un unghi de  $45^\circ$ .



Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:  
Haliță

Diana-Florina  
Coordonator  
științific:  
Prof. Dr.  
Sălăgean  
Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

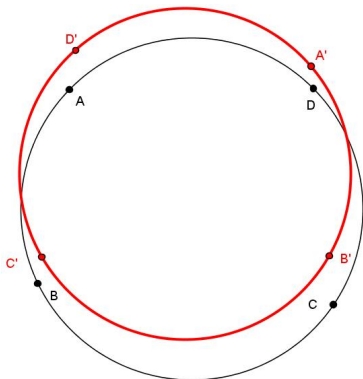
DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2011

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2012

# PROBLEME DE COLINIARITATE ȘI CONCICLICITATE - 3.2.8

## Problema

*Fie  $A(z_A), B(z_B), C(z_C), D(z_D)$  patru puncte pe un cerc. Arătați că picioarele perpendicularelor din  $A, B$  pe dreapta  $CD$  și picioarele perpendicularelor din  $C, D$  pe dreapta  $AB$  sunt conciclice.*



Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:  
Haliță

Diana-Florina  
Coordonator

științific:  
Prof. Dr.

Sălăgean  
Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2011

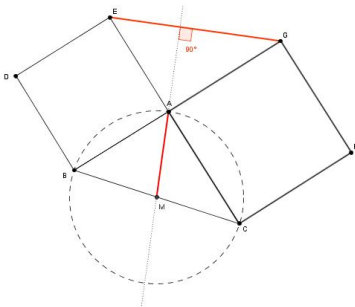
DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2012



# PROBLEME DE PARALELISM ȘI PERPENDICULARITATE - 3.6.2

## Problema

Fie triunghiul  $ABC$  și  $ABDE$ ,  $ACFG$  două pătrate exterioare acestuia pe laturile  $AB$  și  $AC$ . Fie  $M$  mijlocul lui  $BC$ . Să se arate că  $EG \perp AM$  și  $EG = 2 \cdot AM$ .



Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:

Haliță

Diana-Florina

Coordonator

științific:

Prof. Dr.

Sălăgean

Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA

MATEM-

ATICII

2011

DIDACTICA

MATEM-

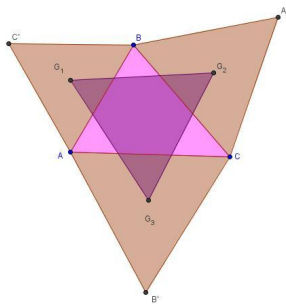
ATICII

2012

# Teorema lui Napoleon

## Problema

*În exteriorul triunghiului  $ABC$  se construiesc triunghiurile echilaterale pozitiv orientate  $ACB$ ,  $BAC$ ,  $CBA$ . Demonstrați că centrele de greutate ale acestor triunghiuri formează un triunghi echilateral.*



Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:  
Haliță

Diana-Florina  
Coordonator  
științific:  
Prof. Dr.  
Sălăgean  
Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2011

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2012

# Teorema lui Napoleon

În demonstrarea teoremei este nevoie de următoarele rezultate:

## Lemă:

Fie  $A_1(a_1), A_2(a_2), A_3(a_3), B_1(b_1), B_2(b_2), B_3(b_3)$ . Se dau triunghiurile  $A_1A_2A_3$  și  $B_1B_2B_3$ . Știind că cele două triunghiuri sunt la fel orientate putem spune că următoarele afirmații sunt echivalente:

i) triunghiurile  $A_1A_2A_3$  și  $B_1B_2B_3$  sunt asemenea în această ordine

ii) 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0.$$

## Observație:

Triunghiul  $ABC$  este asemenea cu triunghiul  $BCA \Leftrightarrow$  triunghiul  $ABC$  este echilateral și are loc  $a + \varepsilon \cdot b + \varepsilon^2 \cdot c = 0$ , unde  $\varepsilon$  este rădăcina complexă nereală, de ordinul 3 a unității.

# Teorema lui Napoleon

Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:

Haliță

Diana-Florina

Coordonator

științific:

Prof. Dr.

Sălăgean

Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA

MATEM-

ATICII

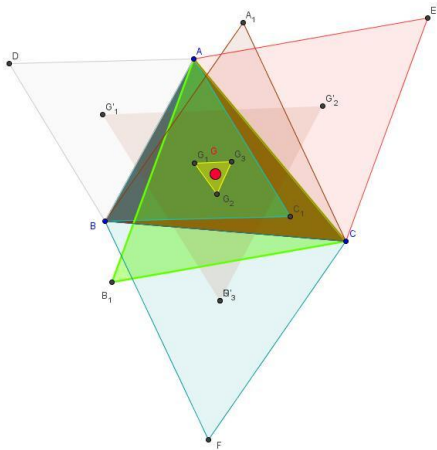
2011

DIDACTICA

MATEM-

ATICII

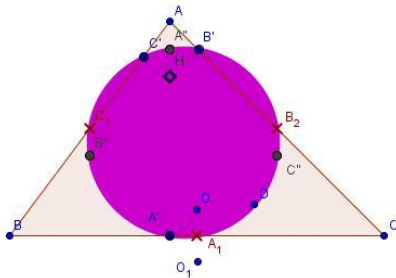
2012



# Cercul celor nouă puncte ale lui Euler

## Problema

*Mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălțimilor, mijloacele segmentelor ce unesc vârfurile cu ortocentrul sunt nouă puncte situate pe un cerc, cu centrul în mijlocul segmentului care unește centrul cercului circumscris triunghiului dat cu ortocentrul și cu raza egală cu jumătate din raza cercului circumscris, numit cercul lui Euler.*



Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:  
Haliță

Diana-Florina  
Coordonator  
științific:  
Prof. Dr.  
Sălăgean  
Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2011

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2012

## DREAPTA LUI SIMSON

### Problema

*Fie  $A, B, C, L, M, N$  șase puncte pe un cerc. Atunci dreptele lui Simson ale punctelor  $L, M, N$  în raport cu triunghiul  $ABC$  se intersectează într-un singur punct dacă și numai dacă dreptele lui Simson ale punctelor  $A, B, C$  în raport cu triunghiul  $LMN$  se intersectează într-un singur punct. În plus în acest caz cele șase drepte ale lui Simson se intersectează în mijlocul segmentului format de ortocentrele triunghiurilor  $ABC$  și  $LMN$ .*

# DREAPTA LUI SIMSON

Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:

Haliță

Diana-Florina

Coordonator

științific:

Prof. Dr.

Sălăgean

Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA

MATEM-

ATICII

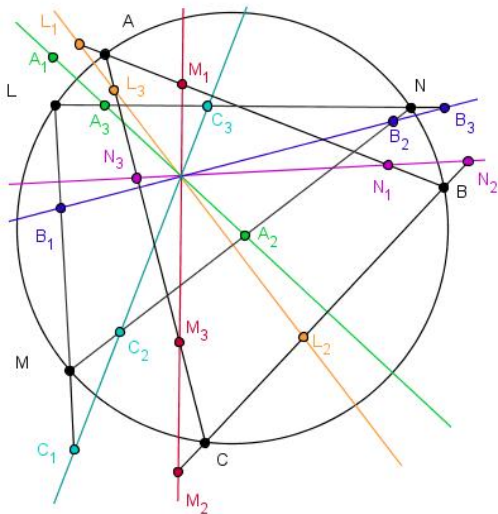
2011

DIDACTICA

MATEM-

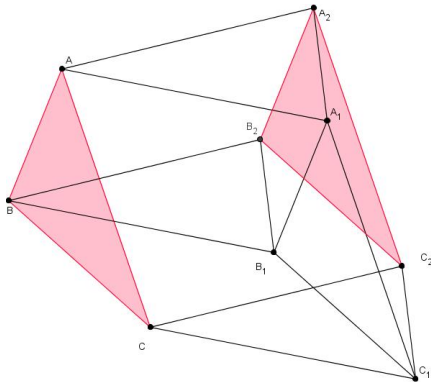
ATICII

2012



## Problema

*Presupunând că triunghiurile  $ABC$  și  $A_1B_1C_1$  sunt asemenea și că triunghiurile  $AA_1A_2, BB_1B_2$  și  $CC_1C_2$  sunt și ele asemenea arătați că triunghiurile  $A_2B_2C_2$  și  $ABC$  sunt asemenea.*

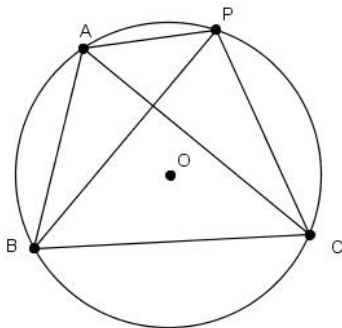




# Problema triunghiurilor congruente

## Problema

*Fie  $P$  un punct situat pe cercul circumscris unui triunghi  $ABC$ . Să se arate că ortocentrele triunghiurilor  $PAB$ ,  $PBC$ ,  $PCA$  formează un triunghi congruent cu cel dat.*



Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:  
Haliță

Diana-Florina  
Coordonator  
științific:  
Prof. Dr.  
Sălăgean  
Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

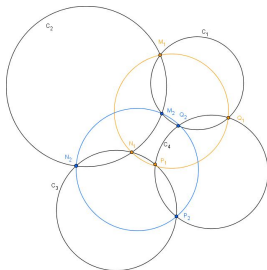
DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2011

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2012

# Problema celor 4 cercuri

## Problema

*Fie  $C_1, C_2, C_3, C_4$  patru cercuri în plan și  $M_1, M_2$  punctele de intersecție ale lui  $C_1$  cu  $C_2$ ,  $N_1, N_2$  punctele de intersecție ale lui  $C_2$  cu  $C_3$ ,  $P_1, P_2$  punctele de intersecție ale lui  $C_3$  cu  $C_4$  și  $Q_1, Q_2$  punctele de intersecție ale lui  $C_4$  cu  $C_1$ . Să se demonstreze că  $M_1, N_1, P_1, Q_1$  sunt conciclice  
 $\Leftrightarrow M_2, N_2, P_2, Q_2$  sunt conciclice.*



Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:  
Haliță

Diana-Florina  
Coordonator  
științific:  
Prof. Dr.  
Sălăgean  
Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

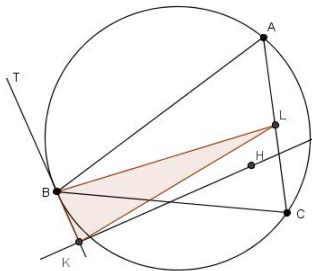
Probleme

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2011

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2012

## Problema

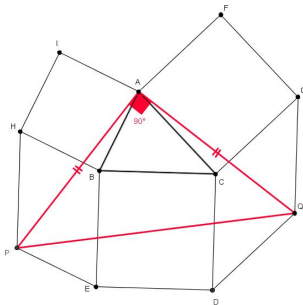
*Dreapta  $T$  este tangentă la cercul circumscris triunghiului ascuțitunghic  $ABC$  în punctul  $B$ . Fie  $K$  proiecția ortocentrului triunghiului  $ABC$  pe dreapta  $T$ . Fie  $L$  mijlocul laturii  $AC$ . Să se arate ca triunghiul  $BKL$  este isoscel.*



# TST Iugoslavia 1992

## Problema

Se construiesc în exteriorul triunghiului  $ABC$  pătratele  $BCDE$ ,  $CAFG$ ,  $ABHI$ . Fie  $GCDQ$  și  $EBHP$  paralelograme. Să se demonstreze că triunghiul  $APQ$  este isoscel.



Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:

Haliță

Diana-Florina

Coordonator

științific:

Prof. Dr.

Sălăgean

Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA

MATEM-

ATICII






2011

DIDACTICA

MATEM-

ATICII

2012

-  T. Andreescu, D. Andrica, *Complex numbers from A to ...*  
Z. Birkhauser, Boston(2005)
-  D. Andrica, N. Bișboacă *Numere Complexe. Probleme rezolvate din manualele alternative.* Editura Millenium(2000)
-  D. Andrica, C. Varga, D. Văcărețu, *Teme și probleme alese de geometrie.* Editura ProMedia Plus, Cluj-Napoca(1997)
-  V. Boskoff, L. Nicolescu, *Probleme practice de geometrie.* Editura tehnică(1990)
-  L.S. Hahn, *Complex Numbers&Geometry.*The Mathematichal Association of America(1984)



N. Mihăileanu, *Utilizarea numerelor complexe în geometrie*.  
Editura Tehnică, București (1968)



P.S. Modenov, *Problems in Geometry*. Mir Publishers -  
Moscow(1981)



G. Sălăgean, *Geometria planului complex*, Editura  
ProMedia Plus, Cluj-Napoca(1997)



A. Stan, *Sinteze matematice*, Editura Rafet(1997)



P.J. Nahin, *An imaginary tale. The story of  $\sqrt{-1}$* ,  
Princeton University Press(1998)



[www.imomath.com](http://www.imomath.com)

Aplicații ale  
numerelor  
complexe în  
Geometrie

Absolvent:  
Haliță  
Diana-Florina  
Coordonator  
științific:  
Prof. Dr.  
Sălăgean  
Grigore

Introducere

Capitolul I

Capitolul II

Probleme

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2011

DIDACTICA  
MATEM-  
ATICII  
2012

## Vă mulțumesc pentru atenție!



Absolvent: **Haliță Diana - Florina**