Imaginea unor cercuri de rază r prin funcţii analitice remarcabile

Absolvent: Diana - Florina HALIŢĂ
Coordonator ştiinţific: Prof. dr. Grigore SĂLĂGEAN
Universitatea "Babeş-Bolyai" Cluj-Napoca

1 Iulie 2014

CUPRINS

REZUMAT

- Teoria Geometrică a Funcţiilor
  = Analiză Complexă + Geometrie;
- Aplicaţii ale Informaticii în Matematică;
- Studiul Funcţiilor Analitice Remarcabile;
- Clasele Speciale de Funcţii Univalente;
- Observarea proprietăţilor funcţiilor din reprezentările grafice.

Rezultatele au fost prezentate la sesiunea de comunicări din cadrul Conferinţei Naţionale ”Didactica Matematicii”.

CAPITOLUL I

Noţiuni preliminare

- noţiuni generale despre funcţiile olomorfe;
- notaţii ce vor fi utilizate în lucrare.

CAPITOLUL II

Funcţii univalente

- funcţii univalente şi local univalente;
- clase speciale de funcţii univalente:
  - clasa funcţiilor normate univalente pe discul unitate;
  - clasa funcţiilor stelate;
  - clasa funcţiilor convexe;
  - clasa funcţiilor α-convexe;
  - clasa funcţiilor spiralate.

CAPITOLUL III

Imaginea unor cercuri de raza r prin funcţii analitice remarcabile

- aplicaţii concrete
  = imaginea unor cercuri de rază r prin funcţii remarcabile;
- **ideea de bază**: observarea proprietăţilor funcţiilor.

FUNCŢII UNIVALENTE

Definiţie

$A \subseteq \mathbb{C}$ domeniu, $f : A \to \mathbb{C}$. f univalentă pe A dacă f este olomorfă şi injectivă pe A.

Observaţie

$\mathcal{H}_u(A)$=mulţimea Funcţiilor Univalente pe A

FUNCŢII UNIVALENTE

Aplicaţie

Să se reprezinte cercurile cu centrul în origine şi de rază r,
$\mathcal{C}_r = \mathcal{C}(0; r)$ *prin funcţiile* f_a*, unde*
$f_a(z) = z + az^2, a \in \{0.3, 0.5, 0.6\}$*, iar* $r \in \{0.5, 0.7, 0.9, 1\}$

FUNCŢII UNIVALENTE

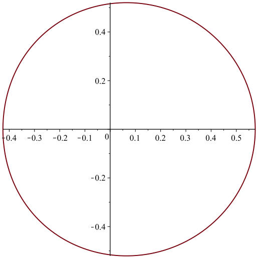

Figure: a=0.3,r=0.5

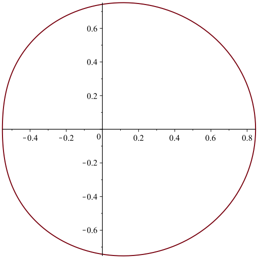

Figure: a=0.3,r=0.7

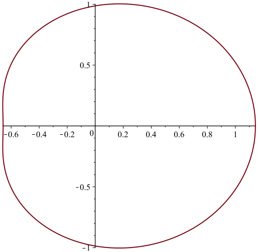

Figure: a=0.3,r=0.9

FUNCŢII UNIVALENTE

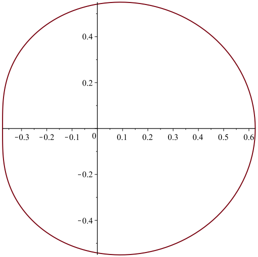

Figure: a=0.5,r=0.5

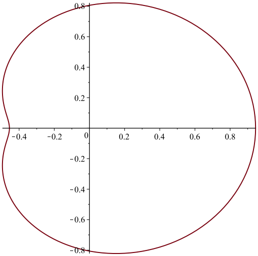

Figure: a=0.5,r=0.7

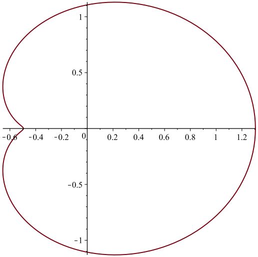

Figure: a=0.5,r=0.9

FUNCŢII UNIVALENTE

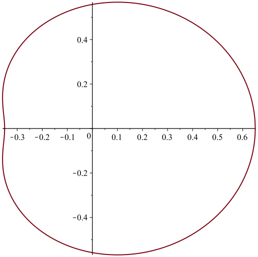

Figure: a=0.6,r=0.5

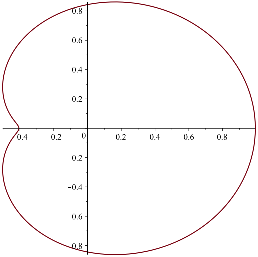

Figure: a=0.6,r=0.7

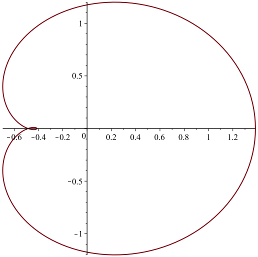

Figure: a=0.6,r=0.9

CLASA S
CLASA FUNCŢIILOR NORMATE UNIVALENTE PE DISCUL UNITATE

Definiţie

$$S = \{f \in \mathcal{H}_u(U) \mid f(0) = 0,\ f'(0) = 1\}$$

Exemplu

Funcţia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = az^2 + z$ *cu* $a \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *este univalentă.* [6]

CLASA S^*
CLASA FUNCŢIILOR STELATE

Definiţie

$$S^* = \left\{ f \in \mathcal{H}(U) \mid f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots,\ Re\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right) > 0,\ z \in U \right\}.$$

CLASA S^*
CLASA FUNCŢIILOR STELATE

Aplicaţie

Să se reprezinte cercurile cu centrul în origine şi de rază r, $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}(0; r)$ *prin funcţia lui Koebe* $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, *când* $r \in \{0.5,\ 0.6,\ 0.7,\ 0.8,\ 0.9\}$.

Clasa S^*
Clasa funcţiilor stelate

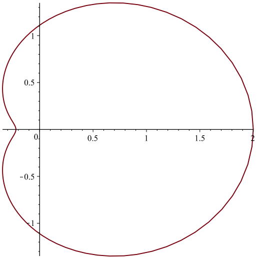

Figure: r=0.5

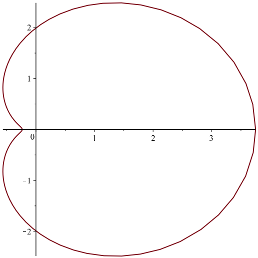

Figure: r=0.6

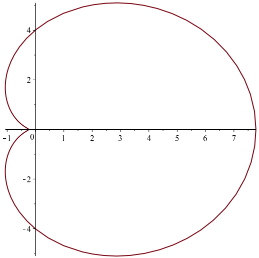

Figure: r=0.7

CLASA S^*
CLASA FUNCŢIILOR STELATE

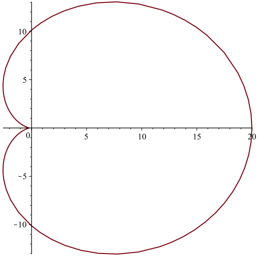

Figure: r=0.8

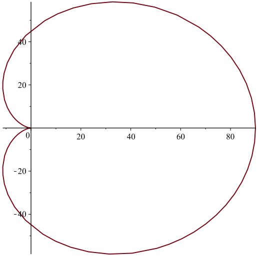

Figure: r=0.9

CLASA S^*
CLASA FUNCŢIILOR STELATE

Aplicaţie

Funcţia $f(z) = -2z + z^2 + 6\log\dfrac{2+z}{z}$ *este o funcţie care are partea reală a derivatei pozitivă. Aceasta este un exemplu de funcţie care nu este stelată. Demonstraţia acestui fapt se găseşte în [5], p. 89. Însă intuitiv, acest lucru se observă astfel:*

CLASA S^*
CLASA FUNCŢIILOR STELATE

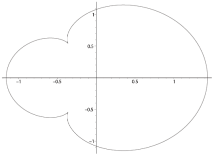

Figure: r=1

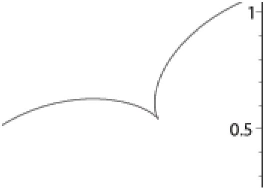

Figure: r=1,zoom

CLASA K
CLASA FUNCŢIILOR CONVEXE

Definiţie

$$\mathcal{K} = \{f \in A : Re\frac{zf''(z)}{f'(z)} + 1 > 0, z \in U\}$$

Clasa K
Clasa funcţiilor convexe

Aplicaţie

Să se reprezinte cercurile cu centrul în origine şi de rază r, $\mathcal{C}_r = \mathcal{C}(0; r)$ *prin funcţia convexă a lui Koebe* $s(z) = \dfrac{z}{1-z}$, *când* $r \in \{0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9\}$.
Funcţia s *se numeşte funcţia convexă a lui Koebe deoarece* $zs'(z) = k(z)$.

CLASA K
CLASA FUNCŢIILOR CONVEXE

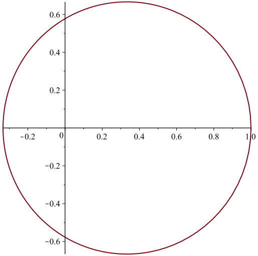

Figure: r=0.5

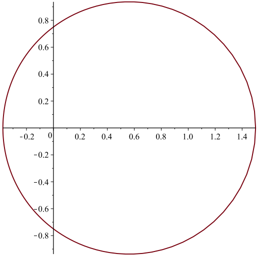

Figure: r=0.6

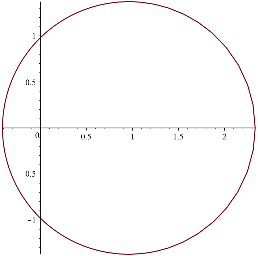

Figure: r=0.7

CLASA K
CLASA FUNCŢIILOR CONVEXE

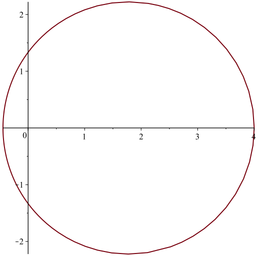

Figure: r=0.8

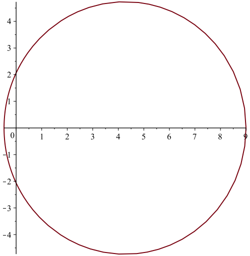

Figure: r=0.9

CLASA FUNCŢIILOR SPIRALATE

Definiţie

O funcţie $f \in \mathcal{H}_u(U)$, cu $f(0) = 0$, este o funcţie spiralată de tip γ în discul unitate U dacă f este univalentă în U si domeniul U este spiralat de tip γ.

CLASA FUNCŢIILOR SPIRALATE

Aplicaţie

Fie funcţia $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^{2e^{-i\gamma}\cos\gamma}}$. *Ea transformă discul unitate pe complementul unei spirale de tip* γ. *Să se reprezinte grafic imaginile discurilor cu raza subunitară prin această funcţie pentru valori diferite ale lui* γ.

CLASA FUNCŢIILOR SPIRALATE

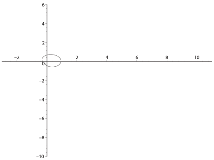

Figure: $\gamma = \frac{\pi}{6}$, r=0.4

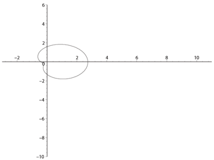

Figure: $\gamma = \frac{\pi}{6}$,r=0.6

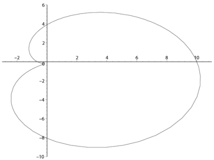

Figure: $\gamma = \frac{\pi}{6}$,r=0.8

CLASA FUNCŢIILOR SPIRALATE

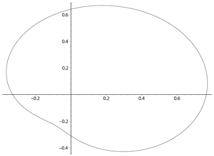

Figure: $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$, r=0.4

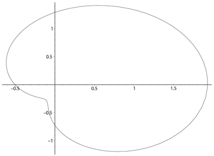

Figure: $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$,r=0.6

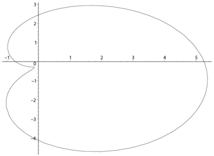

Figure: $\gamma = \dfrac{\pi}{4}$,r=0.8

CLASA FUNCŢIILOR SPIRALATE

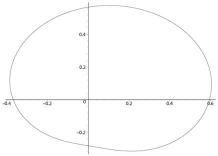

Figure: $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$, r=0.4

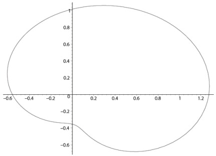

Figure: $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$,r=0.6

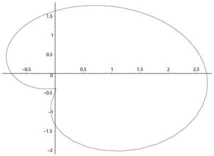

Figure: $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$,r=0.8

FUNCŢII EXTREMALE

Aplicaţie

Fie funcţiile cu coeficienţi negativi de forma $f(z) = z + az^2$. *Să se reprezinte grafic imaginile acestor funcţii prin discul unitate, pentru* $a \in \left\{ \frac{-1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{4} \right\}$

FUNCŢII EXTREMALE

- $f_2(z) = z - \dfrac{z^2}{2}$ funcţie extremală pentru mulţimea funcţiilor stelate;
- pentru $n = 2$ imaginea domeniului prin funcţia f_2 este o mulţime stelată;
- $f_4(z) = z - \dfrac{z^2}{4}$ este funcţie extremală pentru mulţimea funcţiilor convexe;
- pentru $n = 4$ imaginea domeniului prin funcţia f_4 este o mulţime convexă;
- $f_3(z) = z - \dfrac{z^2}{3}$ nu este funcţie extremală;

FUNCŢII EXTREMALE

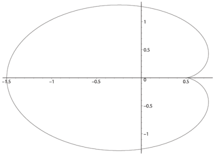

Figure: r=1,a=-1/2

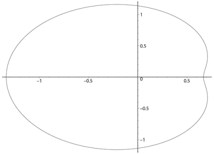

Figure: r=1,a=-1/3

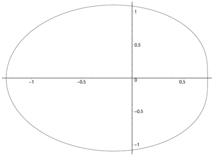

Figure: r=1,a=-1/4

FUNCŢIA "OPEN DOOR"

Aplicaţie

Funcţia $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z} + \dfrac{2n\alpha z}{1-z^2}$ *se numeşte funcţie "opendoor". Să se reprezinte grafic imaginile discurilor cu raza subunitară prin această funcţie.*

Funcţia "opendoor" a fost numită astfel de către S. S. Miller si P. T. Mocanu, deoarece ea transformă discul unitate în planul complex tăiat de semidreptele $Re\omega = 0$ şi $|Im\omega| \geq \sqrt{n\alpha(n\alpha+2)}$, deci în semiplanele stâng şi drept, unite printr-o "poartă deschisă".

FUNCŢIA "OPEN DOOR"

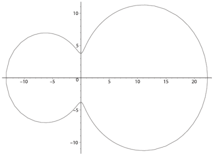

Figure:
r=0.8,$\alpha = 1$,n=3

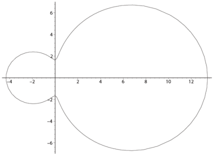

Figure:
r=0.8,$\alpha = 1$,n=1

FUNCŢIA "OPEN DOOR"

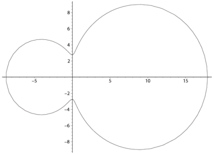

Figure:
r=0.8,$\alpha = 1$,n=2

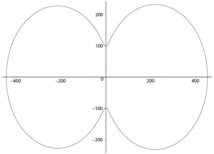

Figure:
r=0.8,$\alpha = 100$,n=1

Se observă că în unele cazuri reprezentarea grafică este simetrică fată de Oy. Pentru valori suficient de mici ale lui r, reprezentarea grafică va fi un cerc cu centrul în origine şi de rază r.

- G. Călugăreanu - *Elemente de teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, Editura Didactic i Pedagogic, Bucureti, 1963
- I. Graham, G. Kohr - *Geometric function theory in one and higher dimensions*, Marcel Dekker Inc., New York, 2003
- P. Hamburg, P. T. Mocanu, N. Negoescu - *Analiză matematică (Funcţii complexe)*, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1982
- S. S. Miller, P. T. Mocanu - *Differential subordinations. Theory and applications*, New York Basel, Marcel Dekker Inc., 2000
- P.T. Mocanu, T. Bulboacă, G.S. Sălăgean - *Teoria geometrică a funcţiilor univalente*, Editura Casa Cărţii de Ştiinţă, Cluj-Napoca, 2006
- G.S. Sălăgean - *Geometria planului complex*, Editura Promedia Plus, Cluj-Napoca, 1997

Mulţumesc!

Q & A