

Kölcsönösen poláris aszimmetrikus vektornormák

Németh Sándor

Babeş-Bolyai Tudományegyetem

nemeth_sandor@yahoo.com

1. Értelmezés. Legyen (X, \leq) valós, rendezett vektortér. A $Q : X \rightarrow X$ leképezés aszimmetrikus vektornorma, *hogyha*:

1. $Q^2 = Q$;
2. $Q(tx) = tQ(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\forall x \in X$;
3. $Q(x+y) \leq Q(x) + Q(y)$, $\forall x, y \in X$;
4. Ha $Q(x) = Q(-x) = 0$, akkor $x = 0$.

Ez esetben a $K = QX$ halmaz u.n. *csúcsos kúp*, azaz $K \cap (-K) = \{0\}$. Q *retrakció* a K kúpra.

Az értelmzés formális általánosítása az *aszimmetrikus normának*, amely mélyreható kutatások tárgya az utóbbi évtizedekben, kutatások, amelyek jelentős művelője Stefan Cobzas, aki a tárgykör legfontosabb monográfiáját is publikálta [1].

A következő eredmények a [2], [3] és a [4] dolgozatok részét képezik.

Ha (X, \leq) vektorháló (Riesz tér), akkor a $Q = +$ *pozitív rész* nyilvánvalóan teljesíti a fenti értelmzés feltételeit. Ekkor (X, \geq) szintén vektorháló és esetében $R = -$ (*minusz negatív rész*) is teljesíti az értelmzés feltételeit. A Q és R aszimmetrikus vektornormákra igaz:

5. $Q + R = I$;
6. $QR = RQ = 0$.

Ha $M = QX$ a Riesz tér *pozitív kúpja*, akkor $N = RX = -M$. Az M és N kúpok egymás *polárisai* a Q és az R vektornormákra nézve.

Azt mondjuk, hogy a két leképezés *kölcsönösen poláris aszimmetrikus vektornorma* ha teljesíti az 1 - 6 feltételeket.

Az (X, \leq) rendezett Banach tér *reguláris* ha benne minden monoton, korlátos sorozat konvergens.

2. Tétel. Ha az (X, \leq) *reguláris rendezett Banach tér* esetén Q és R *kölcsönösen poláris aszimmetrikus vektornormákra* igaz, hogy a QX és RX kúpok *belseje nem üres*, akkor (X, \leq) *szükségszerűen Riesz tér*, Q a *pozitív rész operátor*, R a *minusz negatív rész operátor* (vagy fordítva).

(Pl. véges m dimenzió esetén QX a tér egy vonatkoztatási rendszerének pozitív orttánsa, RX ennek a vonatkoztatási rendszernek negatív orttánsa, $Qx = (x_1^+, \dots, x_m^+)$, $Rx = -(x_1^-, \dots, x_m^-)$, ahol x_i az x elem i -edik vonatkoztatási rendszer szerinti komponense.)

3. Tétel. Ha M az X Banach tér *olyan kúpja*, amely *zárt*, *nem tartalmaz egyeneseket* és *van egy m belső pontja*, ha $N = \{-tm : t \text{ nem-negatív valós}\}$, akkor *léteznek a kölcsönösen poláris Q és R vektornormák úgy, hogy $M = QX, N = RX$.*

Hivatkozások

- [1] S. Cobzas. *Functional Analysis in Asymmetric Normed Spaces*. Birkhauser, 2013.
- [2] A. B. Németh and S. Z. Németh. *Subadditive retractions on cones and asymmetric vector norms*. ArXiv: 2005.10508v, 2020.
- [3] A. B. Németh. *Mutually polar retractions on convex cones*. ArXiv: 2012.4530v1 , 2020.
- [4] A. B. Németh. *Geometry of the proper asymmetric norm* . ArXiv: 2101.05680v1 , 2021.