Egyszerű valamint súlyozott {algebrai|trigonometrikus|hiperbolikus}-exponenciális közelségi B-görbék és B-felületek

Róth Ágoston

Matematika és Informatika Intézet, Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár

{`agoston_roth@yahoo.com, agoston.roth@math.ubbcluj.ro`}

A normalizált B-bázisok olyan lineárisan független, teljesen pozitív, egységfelbontást teljesítő függvényrendszerek, amelyek optimális alakmegőrzési tulajdonságokat biztosítanak kontrollpontok és bázisfüggvények konvex kombinációjával leírt görbék, valamint utóbbiak tenzorszorzataként előállított felületek számítógéppel segített modellezésekor.

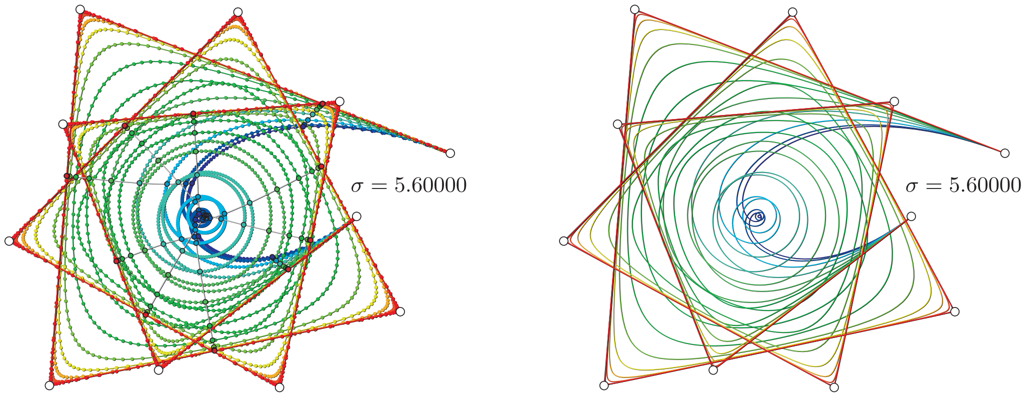
Az említett bázisok optimális alakmegőrző tulajdonságainak átfogó tanulmányozását például a (Peña, 1999) könyvben és a benne levő számos hivatkozásban találhatjuk meg. Kompakt intervallum felett a legegyszerűbb és legismertebb ilyen típusú bázist a Bernstein-polinomok képezik (Carnicer, Peña, 1993). Hozzájuk hasonlóan a normalizált B-bázisok számos alakmegőrzési tulajdonságot – például kontrollpontok affin transzformációival szembeni zártságot; konvex-burok tulajdonságot; hullámzás-, hossz- és hodográfcsökkentést; végpontbeli interpolációt; konvexitás- és (szigorú) monotonitásmegőrzést –, továbbá – a Bernstein-polinomokkal leírt klasszikus Bézier-görbe de Casteljau-algoritmusához hasonló – B-algoritmust is biztosítanak.

Valamely kiterjesztett Csebisev-típusú függvénytér (Karlin, 1968; Schumaker, 2007) csakis akkor rendelkezik normalizált B-bázissal, ha egyrészt tartalmazza a konstansokat, másrészt pedig az adott tér deriváltja is kiterjesztett Csebisev-típusú (Carnicer et al., 2004; Mazure, 1999). Ugyanakkor minden ilyen típusú kiterjesztett Csebisev-függvénytér összes teljesen pozitív, egységfelbontást alkotó bázisa közül a normalizált B-bázis az egyértelmű olyan függvényrendszer, mely a lehető legkevésbé hullámzáscsökkentő, azaz a segítségével leírt kontrollpontalapú görbék követik leginkább a kontrollpoligon alakját.

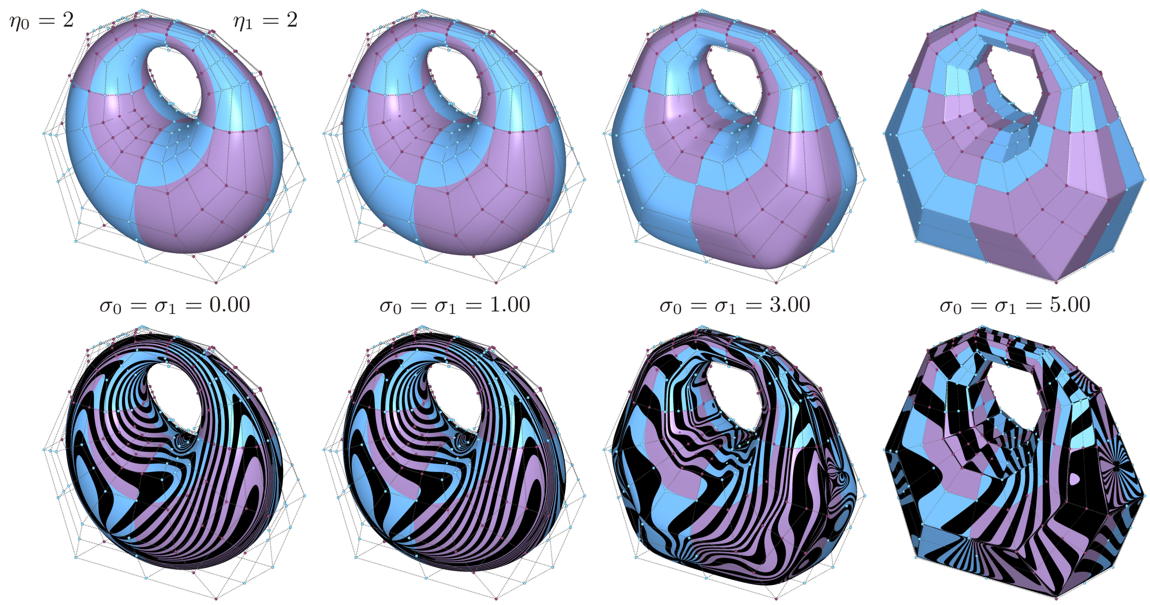
Nempolinomiális normalizált B-bázisokra épülő görbe- és felülettervezési eszközök további előnyös tulajdonságokat – például szabadon állítható alakparamétereket; szingularitás nélküli természetes paraméterezést; magasabb, vagy akár végtelen rendű (parciális) deriváltakra vonatkozó precizitást; hagyományos paraméteres alakban adott, de nem törtfüggvényekkel leírt görbék/felületek esetén csupán kontrollpontalapú, súlyvektor/súlymátrix nélküli egzakt előállítást – biztosítanak, valamint olyan gyakorlati felhasználhatósággal és ipari jelentőséggel bíró, transzcendentális görbék/felületek egzakt leírását is lehetővé teszik, amelyek a napjaink modellezőrendszereiben szabványként használt, nem feltétlenül egyenletes csomóvektorú, racionális B-spline-görbékkel/felületekkel legfeljebb csak közelíthetőek.

Számos előnyük ellenére a normalizált B-bázisok hátrányokkal is rendelkeznek. Néhány speciális eset kivételével általában nem ismerjük azok zárt algebrai alakját, sokszor csak hatékonyan kódolt numerikus módszerekre támaszkodhatunk azok gyakorlati felhasználása végett (Róth, 2019), továbbá – néhány alacsony dimenziós esetet leszámítva – többnyire nem ismert olyan alakparaméter(ek)től függő módszer, amellyel a származtatott B-görbék/felületek kontrollpoligonjához/hálójához viszonyított közelséget tetszőlegesen lehetne szabályozni. Léteznek ugyan ilyen jellegű közelséget szabályozó módszerek (Kovács, Várady, 2017, 2018), de az azok által használt súlyfüggvényrendszerek csak algoritmikusan értékelhetőek ki, mi több pillanatnyilag még nem ismert, hogy ezek a leképezések egyáltalán normalizált B-bázist alkotnak-e.

Az előadás során olyan új – (racionális) {algebrai|trigonometrikus|hiperbolikus}-exponenciális normalizált B-bázisokra épülő – görbe- és felületmodellezési módszerekkel ismerkedhetünk meg, amelyekkel az előbb említett hátrányok kiküszöbölhetőek. Az alábbi animációk az újonnan ajánlott tervezőeszközök által nyújtott modellezési lehetőségeket sejtetik. Megtekintésükhöz az Adobe Reader alkalmazás asztali változatát ajánljuk, mert más PDF-fájlkezelők vagy böngészőkbe épített alkalmazások nem képesek a Java-szkript-alapú képsorozatok lejátszására.



1. ábra. Egy algebrai-exponenciális közelségi B-görbe alakváltozását követhetjük nyomon, amikor a $\sigma \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ feszültségi paraméter a $[0, 5\frac{6}{10}]$ intervallumon változik. Kezdetben ($\sigma = 0$) a görbe a feltüntetett kontrollpoligon által generált klasszikus/polinomiális Bézier-görbével egyezik meg. Ahogy az alakparaméter növekszik, a görbét alkotó ívek belső pontjai a kontrollpontok felé, míg az ívek végpontjai az oldalélek egy-egy jól meghatározható osztópontja felé konvergálnak.



2. ábra. Racionális trigonometrikus-exponenciális közelségi felületi B-foltok sima illesztését és alakváltoztatását láthatjuk. Amikor mindkét alakparaméter értéke nulla, az összetett felület valójában a $\left[\varphi\left(c - a\cos(u)\cos(v)\right) + b^2\cos(u),\ b\sin(u)\left(a - \varphi\cos(v)\right),\ b\sin(v)\left(c\cos(u) - \varphi\right)\right]^T / \big(a - c\cos(u)\cos(v)\big)$ racionális trigonometrikus előállítású, gyűrű alakú Dupin-cikliddel egyezik meg, ahol $a = 6,\ b = 4\sqrt{2},\ c = 2,\ \varphi = 3,\ (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Ahogy a két alakparaméter növekszik, minden felületi folt képe aszimptotikusan a megfelelő kontrollháló csúcsaira és oldaléleire feszül ki.

Hivatkozások

Carnicer, J.-M., Mainar, E., Peña, J.-M., . *Critical length for design purposes and extended Chebyshev spaces*. Constructive Approximation, **20**(1):55–71.

Carnicer, J.-M., Peña, J.-M., 1993. *Shape preserving representations and optimality of the Bernstein basis*, Advances in Computational Mathematics, **1**(2):173–196.

Carnicer, J.-M., Peña, J. M., 1994. *Totally positive bases for shape preserving curve design and optimality of B-splines*, Computer Aided Geometric Design, **11**(6):633–654.

Kovács, I., Várady, T., 2017. *P-curves and surfaces: parametric design with global fullness control*, Computer-Aided Design, **90**:113–122.

Kovács, I., Várady, T., 2018. *P-Bézier and p-Bspline curves – new representations with proximity control*, Computer Aided Geometric Design, **62**:117–132.

Karlin, S., 1968. *Total positivity, vol. 1*, Stanford University Press, Stanford, California.

Mazure, M.L., 1999. *Chebyshev–Bernstein bases.* Computer Aided Geometric Design, **16**(7):649–669.

Peña, J.-M., 1999. Shape preserving representations in Computer-Aided Geometric Design. Nova Science Publishers, Commack, New York.

Róth, Á., 2019. *Algorithm 992: An OpenGL- and C++-based function library for curve and surface modeling in a large class of extended Chebyshev spaces*, ACM Transactions on Mathematical Software, Vol. 45, No. 1, Article 13.

Sánchez-Reyes, J., 1998. *Harmonic rational Bézier curves, p-Bézier curves and trigonometric polynomials*, Computer Aided Geometric Design, **15**(9):909–923.

Schumaker, L.L., 2007. *Spline Functions: Basic Theory, 3rd edition*, Cambridge University Press, United Kingdoms.

Shen, W.-Q., Wang, G.-Z., 2005. *A class of quasi Bézier curves based on hyperbolic polynomials*, Journal of Zhejiang University SCIENCE, **6A (Suppl. I)**(9):116–123.