Elemi mértan másképpen: konvex geometria

Németh Sándor
Kolozsvár

2020

Convex geometriáról, mint önálló matematikai disztiplináról a huszadik század elejétől beszélhetünk, amikor rokon területek szükséglete, valamint a matematika belső fejlődése létrehozta az általános konvex halmazokkal foglalkozó kutatásokat.

Jelen eszmefuttatásom lényege annak taglalása, hogy miben jelent újat ez a szemlélet a klasszikus elemi mértannak nevezett matematikai diszciplínához képest.

A szakmában egyöntetű az a vélemény, hogy a tárgykör alapfogalma, a konvexitás, egykorú a mértannal, hiszen nélküle az euklideszi mértan fontos eredményei megfogalmazhatatlanok. Gondolok itt a konvex négyszög, konvex sokszög, konvex poliéder fogalmára.

Mára a konvex geometria több területre tagolódott, de fősodrását továbbra is az általános konvex halmazokkal kapcsolatos kutatások képezik. Ez a terület a klasszikusnak mondható fogalmakhoz egyetlen egyet, az általános konvex halmaz fogalmát teszi hozzá. Vitatható, hogy jelenti-e ez a klasszikus mértan fogalomkörének valós tágítását vagy sem.

Ha nem is jelenti, néhány körülmény amallett szól, hogy a konvex geometria matematikán belüli artkulálódása indokolt. Mielőtt ezek egyikéről szólnék és érveimet példákkal alátámasztanám, felsorolnék néhány sajátosságot, amelyek szerintem jellemzőek a területre:

1. Tételei tartalmukban nem haladják meg a klasszikus geometria fogalomkörét;

2. Tárgyuk sokszor az intuíció számára várható (de nehezen bizonnyítható) állításra vonatkozik, miközben mások

3. váratlan, sokszor az intuíciónak látszólag ellentmondó, eredményt szolgáltatnak.

Amit a jelen gondolatmenetemben hangsúlyozni szeretnék az, hogy jelentős része a 2. és 3. ponokban említett eredménynek, bár fogalomkörükben nem haladják meg a klasszikus mértant, bizonyításaikban olyan eszköztárra támaszkodnak, amely utóbbin jelentősen kívülesik.

Mondandómat három egyszerűen megfogalmazható tétellel illusztrálom, amelyeket Kramer Horst barátommal az idők során közösen bizonyítottunk.

Néhány egyszerűen megfogalmazható konvex geometriai tétel

Az euklideszi tér nemüres halmazáról azt mondjuk, hogy *konvex*, ha tetszőleges két pontjával egyetemben az őket összekötő egyenes szakasz valamennyi pontját tartalmazza. A halmaz akkor *zárt* ha minden olyan pontot tartalmaz, amely az illető halmaz pontjaival tetszőlegesen megközelíthető.

Tétel 1 *Legyenek A_1, A_2, A_3, A_4 az $\mathbb{R}^3$ tér olyan nemüres zárt konvex halmazai, hogy a tér bármely síkja egyidejűleg legföljebb hármukat metszi. Akkor létezik egy és csak egy olyan pont, amely a négy halmaztól egyelő távolsgra van.*

A tételt (pontosabban annak általánosabb halmazokra vonatkozó m dimenziós változatát) az algebrai topológia felhasználásával bizonyítottuk.

Megjegyzés 1 *A tétel $\mathbb{R}^m$ esetére általánosítható. Az esetben a halmazok száma $m+1$, a föltétel pedig, hogy a tér tetszőleges "hipersíkja" egyszerre legföljebb m halmazt metszhet.*

Tétel 2 *Legyenek C_1, C_2, C_3, C_4 az $\mathbb{R}^3$ tér olyan zárt, konvex halmazai, hogy keresztmetszetük üres, de bárhogyan választunk 3 halmazt közülük ezek keresztmetszete nem üres. Akkor létezik egy és csak egy pont, amely a halmazoktól egyenlő távolságra van.*

Megjegyzés 2 *A tétel $\mathbb{R}^m$ esetére általánosítható. Az esetben a halmazok száma $m+1$, a föltétel pedig, hogy az $m+1$ halmaz keresztmetszete üres, de bármely m halmazból álló részcsalád keresztmetszete nem üres.*

A tétel bizonyítása analitikus módszerekkel történik.

Egy $\mathbb{R}^3$ térbeli Σ halmaz *zárt konvex felület,*, ha egy konvex test határa (pl. konvex poliéder határa). A konvex felület *síma* ha minden pontjában létezik egyértelmű érintő síkja (pl. gömb, ellipszoid, tojásfelület, stb). A konvex felület *szigorúan konvex*, ha nem tartalmaz szakaszokat.

Tétel 3 *Legyen $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ zárt, síma konvex felület, és $\sigma \subset \mathbb{R}^3$ adott tetraéder. Akkor létezik a σ tetraédernek olyan affin σ' képe (olyan σ-hoz hasonló σ' tetraéder, amelynek lapjai és élei a σ éleivel és lapjaival párhuzamosak és irányítása a σ irányításával egyező), hogy σ' csúcsai a Σ felületen vannak. Ha Σ szigorúan konvex, a létezés egyértelmű.*

Megjegyzés 3 *A tétel m-dimenziós változatában a tetraéder megfelelője az m* dimenziós szimplex.

A tétel bizonyítása a Brouwer féle tétel felhasználásával történik, amely kimondja, hogy a zárt korlátos konvex halmaz önmagába való folytonos leképezésének létezik fixpontja (a halmaznak olyan pontja, amelyet a leképezés változatlanul hagy).