Reziduális háromszögek súlypontjai által alkotott háromszög területe és általánosítások

András Szilárd, Nagydobai Kiss Sándor

andrasz@math.ubbcluj.ro, d.sandor.kiss@gmail.com

Ha az ABC háromszög BC, CA, illetve AB oldalain (vagy azok meghosszabbításán) rendre felvesszük az X, Y, Z pontokat, akkor az AZY, BXZ és CYX háromszögeket nevezzük az X, Y és Z pontokhoz tartozó reziduális háromszögeknek. A dolgozatunkban igazoljuk a reziduális háromszögek G_A, G_B, G_C súlypontjai által alkotott háromszög, az XYZ háromszög és az eredeti ABC háromszög területe között a következő összefüggést:

1. Tétel. *Az előbbi jelölésekkel*

$$9 \cdot T[G_A G_B G_C] = 2 \cdot T[ABC] + T[XYZ]. \tag{1}$$

Majd ezt általánosítjuk négyszögre, illetve a súlypontok helyett általánosabb speciális pontokra. Négyszög esetén érvényes a következő összefüggés:

2. Tétel. *Ha az $ABCD$ négyszögben $M \in BC, N \in CD, P \in DA$ és $Q \in AB$, valamint G_A, G_B, G_C, G_D az AQP, BMQ, CNM és DPN háromszögek súlypontja, akkor*

$$9T[G_A G_B G_C G_D] = 2T[ABCD] + 2T[MNPQ] + T[AMDQCPBNA]. \tag{2}$$

Az előbbi tételekben a súlypontok helyettesíthetők ponthármasokkal, amelyek tagjainak a baricentrikus koordinátái ciklikusan permutálódnak. Egy sajátos eset a következő állítás:

3. Tétel. *Ha A_1, A_2, A_3 az AZY háromszög A-ból, Z-ből, illetve Y-ból induló oldalfelezőinek felezőpontjai és hasonlóan értelmezzük a B_1, B_2, B_3 pontokat a BXZ, illetve a C_1, C_2, C_3 pontokat a CYX háromszögekben, akkor*

$$T[A_1 B_1 C_1] + T[A_2 B_2 C_2] + T[A_3 B_3 C_3] = \frac{11}{16} \cdot T[ABC] + \frac{7}{16} \cdot T[XYZ]. \tag{3}$$

A dolgozat további általánosításokat is tartalmaz, illetve rámutatunk arra is, hogy magasabb dimenzióra hogyan terjeszthető ki a tétel.

Hivatkozások

[1] Dalcín, M., *Isotomic Inscribed Triangles and Their Residuals*, Forum Geometricorum, **3**(2003), 125-134.

[2] Andreescu, T. and Andrica, D., *Complex numbers from A to ... Z*, Second Edition, Birkhauser, 2014

[3] Schmidt, E., *Circumcenters of Residual Triangles*, Forum Geometricorum, **3**(2003), 207–214.

[4] Schmidt, E., *Miquel points and inscribed triangles*, http://eckartschmidt.de/Miqul.pdf, Letöltve 20.09.2020

[5] Barrington Leigh, R., Liu, A., *Hungarian problem book IV*, MAA Press, 2011 (vagy Kömal, 1959, page 70-77.)