A vektornyalábok tenzorszorzatának Chern-osztályairól

Szilágyi Zsolt

Matematika és Informatika Intézet, Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár

`szilagyi.zsolt@math.ubbcluj.ro`

Legyen $\mathcal{E}$ egy r-ed rangú komplex vektornyaláb az M sokaság felett. Az $\mathcal{E}$ nyalábhoz hozzárendelhetők a $c_i(\mathcal{E}) \in H^{2i}(M)$, $i = 1, \ldots, r$ a *Chern-osztályoknak* nevezett karakterisztikus osztályok és ahol $H^\bullet(M) = H^\bullet(M, \mathbb{R}) = \oplus_i H^i(M, \mathbb{R})$ az M sokaság kohomológia gyűrűje. Az $\mathcal{E}$ nyaláb Chern-osztályaiból formálisan képezhető a $c(\mathcal{E}; t) = 1 + c_1(\mathcal{E})t + \ldots + c_r(\mathcal{E})t^r$ *Chern-polinom.*

A "*Splitting Principle*"-nek ([1]) nevezett elv alapján feltételezhetjük, hogy a vektornyalábok felbonthatók komplex vonalnyalábok (1 rangú vektornyalábok) direkt összegére. Ezen hipotetikus vonalnyalábok első Chern-osztályai a vektornyaláb *Chern-gyökei.* Így a vektornyaláb Chern-osztályai felírhatók, mint a Chern-gyökök elemi szimmetrikus polinomjai: ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ az $\mathcal{E}$ nyaláb Chern-gyökei, akkor

$$c_k(\mathcal{E}) = e_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r} \alpha_{i_1} \cdot \cdots \cdot \alpha_{i_k},$$

azaz a k-dik Chern-osztály a Chern-gyökök k-dik elemi szimmetrikus polinomja.

Tekintjük az $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ tenzorszorzatot, aminek rangja $r \cdot q$. Célunk a $c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}; t)$ Chern-polinom felírása az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ Chern-osztályainak függvényében. Ha $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ az $\mathcal{E}$ és $\beta_1, \ldots, \beta_q$ az $\mathcal{F}$ vektornyaláb Chern-gyökei, akkor az $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ tenzorszorzat Chern-gyökei $\alpha_i + \beta_j$, ahol $i = 1, \ldots, r$, $j = 1, \ldots, q$, ezért

$$c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}; t) = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{q} (1 + \alpha_i t + \beta_j t). \tag{1}$$

Ezzel a $c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}; t)$ kiszámításának problémája a $c_i(\mathcal{E})$ és $c_j(\mathcal{F})$ Chern-osztályok függvényében visszavezetődik az (1) jobboldalán álló kifejezésnek az α-k és β-k elemi szimmetrikus polinomjainak függvényvében való felírására.

A $c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}; t)$ polinomra adunk két formulát és ezeket összehasonlítjuk az eddigi eredményekkel [5, 6].

1. Tétel (1. formula). *Ha $\mathcal{E}$ egy r-ed rangú és $\mathcal{F}$ egy q-ad rangú komplex vektornyaláb ugyanazon M sokaság felett, akkor*

$$c(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}; t) = \det \left(\sum_{k=0}^{r} c_k(\mathcal{E}) t^k [I + \Lambda(c(\mathcal{F}); t)]^{r-k} \right), \tag{2}$$

ahol

$$\Lambda(c(\mathcal{F}); t) = \begin{pmatrix} c_1(\mathcal{F})t & -1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ c_{q-1}(\mathcal{F})t^{q-1} & & & -1 \\ c_q(\mathcal{F})t^q & & & \end{pmatrix} \tag{3}$$

(az első oszlopot és a főátló feletti átlót kivéve mindenhol 0 *szerepel).*

A második formula két polinom rezultánsát használja. Ekkor a Chern-polinom helyett az következő polinomot tekintjük, amiben az együtthatók fordított sorrendben szerepelnek:

$$C(\mathcal{F}; t) = \sum_{k=0}^{q} c_k(\mathcal{F}) t^{q-k} = c_q(\mathcal{F}) + c_{q-1}(\mathcal{F})t + \cdots + c_1(\mathcal{F})t^{q-1} + t^q. \tag{4}$$

Ezenkívül tekintünk egy másik polinomot. Legyen

$$D(\mathcal{E};s,t) = (-1)^r d_r(\mathcal{E};s) + (-1)^{r-1} d_{r-1}(\mathcal{E};s)t + \cdots + d_0(\mathcal{E};s)t^r = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k d_k(\mathcal{E};s)t^{r-k}, \tag{5}$$

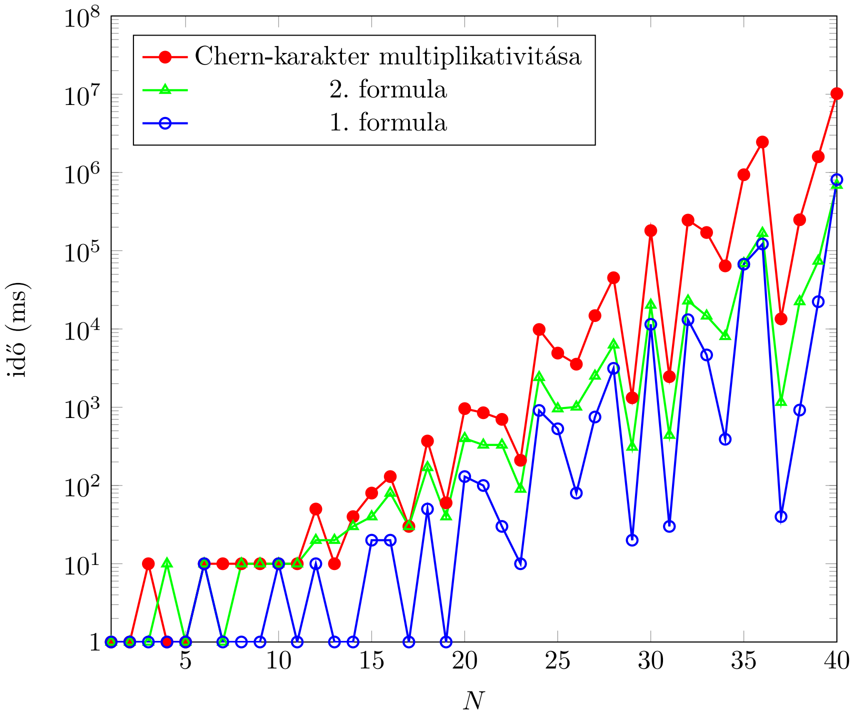
ahol az együtthatók a következőképpen vannak értelmezve:

$$d_k(\mathcal{E};s) = \binom{r}{k} s^k + \binom{r-1}{k-1} c_1(\mathcal{E}) s^{k-1} + \cdots + \binom{r-k}{0} c_k(\mathcal{E}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{r-i}{k-i} c_i(\mathcal{E}) s^{k-i}. \tag{6}$$

2. Tétel (2. formula). *Ekkor a tenzorszorzat C polinomja felírható, mint*

$$C(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}; s) = \mathrm{res}(D(\mathcal{E};s,t), C(\mathcal{F};t), t). \tag{7}$$

Ezeket a formulákat implementáltuk a Singular [2] komputer algebrai programban és összehasonlítottuk a meglévő implementálásokkal [3]. Az eddigi leggyorsabb implementálás a Chern-karakter multiplikativitásán alapult [4], így ehhez hasonlítottuk a megoldásunkat. Az alábbi ábrán a $TST(N)$ tesztfüggvény kiszámításához szükséges idő látható, amely az összes olyan $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$ tenzorszorzat Chern-osztályait számítja ki, ahol $r \cdot q = N$.



1. ábra. A $TST(N)$ tesztfüggvény kiszámításához szükséges idő Singular 4.1.2-ben (MacOS) egy Intel i7-4770HQ proceszorral (3.2GHz) és 16GB RAM-mal rendelkező számítógéppel.

Hivatkozások

[1] L.W. Tu and R. Bott, *Differential forms in algebraic topology*, Springer-Verlag, 1982.

[2] W. Decker, G.-M. Greuel, G.Z Pfister, and Hans Schönemann, Singular *4-1-2 — A computer algebra system for polynomial computations*, http://www.singular.uni-kl.de, 2019.

[3] O. Iena, *CHERN.LIB: a SINGULAR library for symbolic computations with Chern classes*, http://hdl.handle.net/10993/21949, June 2015.

[4] O. Iena, *On different approaches to compute the Chern classes of a tensor product of two vector bundles*, http://orbilu.uni.lu/handle/10993/27418, 2016.

[5] L. Manivel, *Chern classes of tensor products*, International Journal of Mathematics **27** (2016), no. 10, 1650079.

[6] A. Lascoux, *Classes de Chern d'un produit tensoriel*, CR Acad. Sci. Paris **286** (1978), 385–387.

[7] Zs. Szilágyi, *On Chern classes of tensor products of vector bundles*, arXiv:1909.13278.