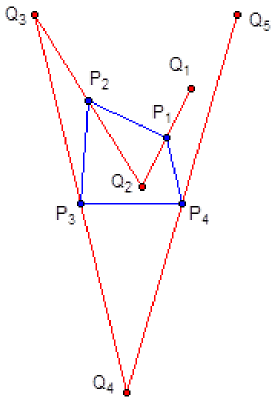
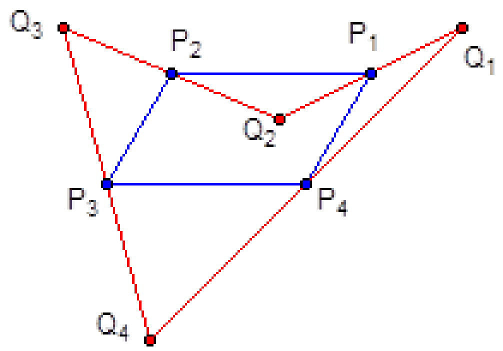
Két hiperbola család

Nagydobai Kiss Sándor

A síkban tekintsük a $P_1P_2 \dots P_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 3)$ sokszöget. Kiindulva egy tetszőleges Q_1 pontból felépíthető a $Q_1Q_2 \dots Q_nQ_{n+1}$ törött vonal úgy, hogy a P_i pont a Q_iQ_{i+1} szakasz felezőpontja legyen, ahol $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ (1. ábra). Ha $Q_{n+1} \equiv Q_1$, azaz ha a törött vonal záródik (2. ábra), akkor azt mondjuk, hogy a $Q_1Q_2 \dots Q_n$ a $P_1P_2 \dots P_n$ köré írt sokszög. Az alapkérdés a következő: *adott $P_1P_2 \dots P_n$ sokszög esetén az n milyen értékeire létezik a $Q_1Q_2 \dots Q_n$ körülírható sokszög?*



1. ábra



2. ábra

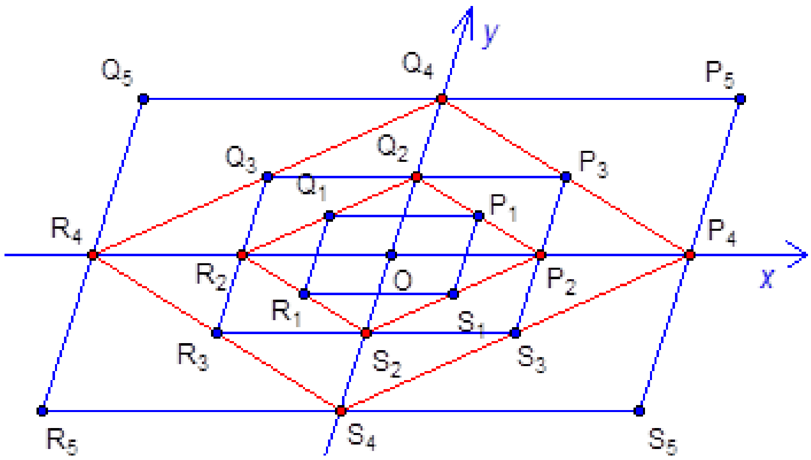
Ismert, hogy páratlan n esetén egyetlen körülírt sokszög létezik [1], [3]. Háromszögek esetén ez az antikomplementáris háromszög. Ha n páros $(n = 2k)$, akkor a helyzet bonyolultabb és csak kivételes esetekben létezik a $Q_1Q_2 \dots Q_{2k}$ körülírt sokszög. Nevezzük a $P_1P_2 \dots P_{2k}$ sokszöget *speciálisnak (sajátosnak)*, ha van körülírt sokszöge. Ennek egy szükséges feltétele, hogy fennálljon az alábbi összefüggés:

$$\overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{P_3P_4} + \dots + \overrightarrow{P_{2k-1}P_{2k}} = \vec{0}. \qquad (1)$$

Ha $P_1P_2 \dots P_{2k}$ speciális sokszög, akkor végtelen sok $Q_1Q_2 \dots Q_{2k}$ körülírt sokszöge van és ezek között egyetlen egy speciális van [1].

Kutatásaimat a négyszögekre korlátoztam. Ha $n = 4$, akkor az (1) alapján $\overrightarrow{P_1P_2} = -\overrightarrow{P_3P_4}$, azaz $P_1P_2 = P_3P_4$ és $P_1P_2 \| P_3P_4$ (2. ábra). Tehát a sajátos négyszögek a paralelogrammák. Következésképpen minden paralelogramma köré végtelen sok négyszög írható [3], amelyek között van egy sajátos, azaz egy paralelogramma.

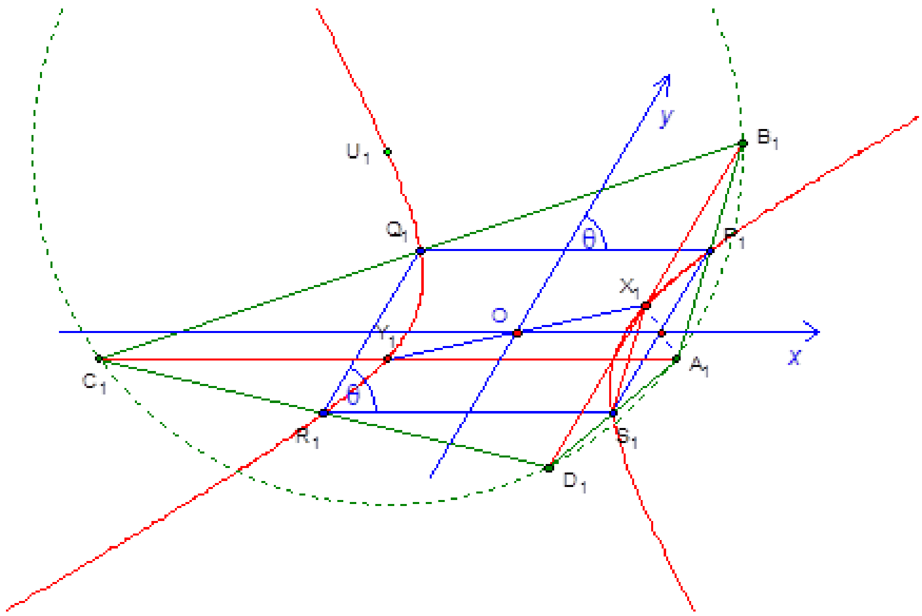
Induljunk ki a $P_1Q_1R_1S_1$ paralelogrammából és jelölje Γ_1 az e köré írható összes $A_1B_1C_1D_1$ négyszögek halmazát. A Γ_1-ben van egyetlen $P_2Q_2R_2S_2$ paralelogramma. Az e köré írható összes $A_2B_2C_2D_2$ négyszögek halmazát jelölje Γ_2 és így tovább. Ilyen módon kapunk egy paralelogramma-sorozatot. Első öt tagjának egymáshoz való viszonyát a 3. ábra szemlélteti.



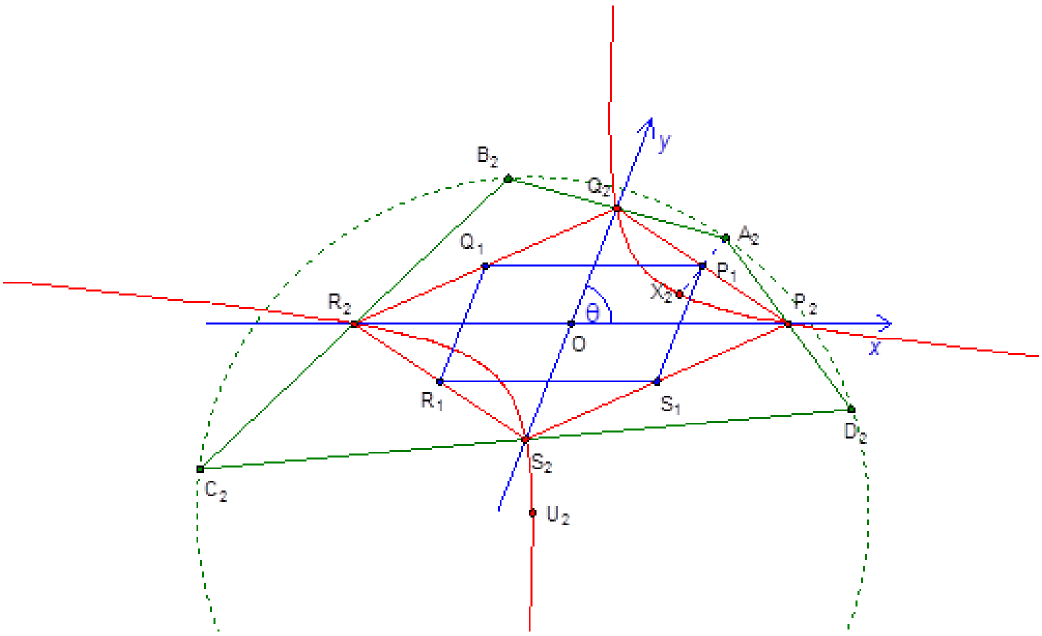
3. ábra

Legyen Γ_i a $P_iQ_iR_iS_i$ köré írható összes $A_iB_iC_iD_i$ négyszögek halmaza, $i \in \mathbb{N}, i \geq 1$, ezen belül Γ_i^* pedig az összes körbeírható négyszögek halmaza.

Bármely rögzített i-re a Γ_i^* elemei köré írt körök U_i középpontjai egy H_i hiperbolán mozognak [2], [4]. (Lásd a 4. és 5. ábrát.)



4. ábra



5. ábra

Páratlan i-kre kapunk egy hiperbola családot, páros i-kre pedig egy másikat. Meghatároztam minkét esetben a hiperbolák egyenleteit és igazoltam, hogy az A_i, B_i, C_i, D_i csúcspontok is egy-egy hiperbolán mozognak, amelyek a H_i hiperbolák transzlációi.

Felmerülő kérdések:

1) Minden paralelogrammához egyértelműen tartozik egy hiperbola. Hogyan szerkeszthetők meg a paralelogramma adataiból (két oldahossz és az általuk bezárt szög) a hiperbola csúcsai, fókuszpontjai, szimmetria tengelyei és aszimptotái?
2) Milyen mértani helyet írnak le a H_i hiperbolák csúcspontjai, illetve fókuszpontjai?
3) Milyen számítógépes program segítségével lehetne vizualizálni az U_i, illetve az A_i, B_i, C_i, D_i csúcspontok mozgását rögzített i esetén?

Irodalom

[1] Edward Kastner, *The Group Generated by Central Symmetries, with Application to Polygons*, The American Mathematical Monthly, Vol. X (1903), No. 3, 57-63.

[2] Michel Bataille, *Cyclic Quadrilaterals with Prescribed Varignon Parallelogram* , Forum Geom., Vol. 7 (2007), 199-206.

[3] Sándor Nagydobai Kiss and Ovidiu T. Pop, *About a Construction Problem*, International Journal of Geometry, Vol. 3, (2014), No. 2, 14-19.

[4] Sándor Nagydobai Kiss and Ovidiu T. Pop, *On the Four Concurrent Circles*, Global Journal of Advanced Research on Classical and Modern Geometries, Vol. 3, (2014), Issue 2, 91-101.