10. Matematika és Informatika Alkalmazásokkal Konferencia, 2019. november 15–17., Kolozsvár

# ***A háromszög két új nevezetes köre?***

Bíró Bálint (Eger)-Nagydobai Kiss Sándor (Szatmárnémeti)

(balint.biro55@gmail.com, d.sandor.kiss@gmail.com)

Bíró Bálint 2016-ban Baján, a matematikatanárok Rátz László vándorgyűlésén felvetett egy addig megoldatlan elemi geometriai feladatot. A megoldásra Bíró Bálint és Nagydobai Kiss Sándor közös munkája nyomán 2019-ben került sor. A probléma tanulmányozása során az eredeti feladattal szorosan összefüggő több érdekes geometriai tényre is fény derült.

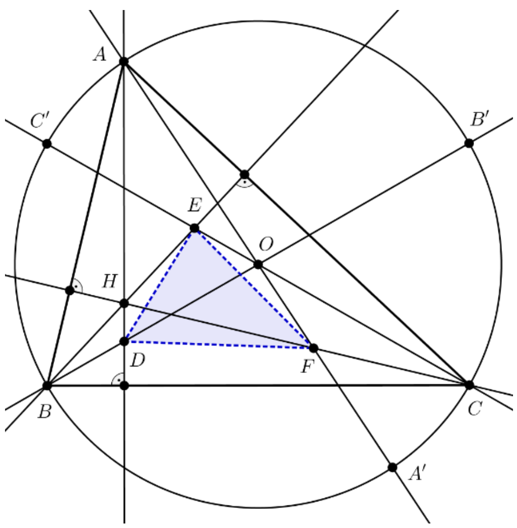
Az $ABC$ háromszög körülírt körének $AA', BB', CC'$ átmérői által a magasságvonalakon általános esetben meghatároznak hat pontot. Ez a hat pont két olyan háromszög csúcsait képezi, amelyek hasonlók az $ABC$ háromszöghöz. Az előadásban e két háromszög köré írható körök tulajdonságainak tanulmányozásával foglalkozunk.

Az $ABC$ háromszögre vonatkozóan a $D, E, F$ valamint a $D', E', F'$ pontokat a következőképpen definiáljuk (1. és 2. ábra):

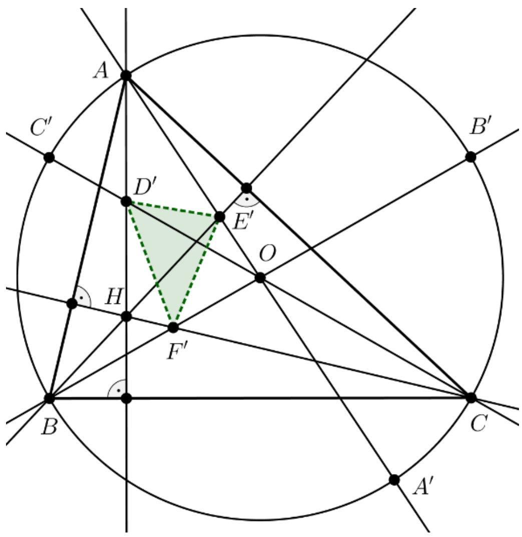
$$D = AH \cap BO; \quad E = BH \cap CO; \quad F = CH \cap AO,$$

$$D' = AH \cap CO; \quad E' = BH \cap AO; \quad F' = CH \cap BO,$$

ahol $O$ és $H$ rendre az $ABC$ háromszög körülírt körének középpontja, illetve magasságpontja.



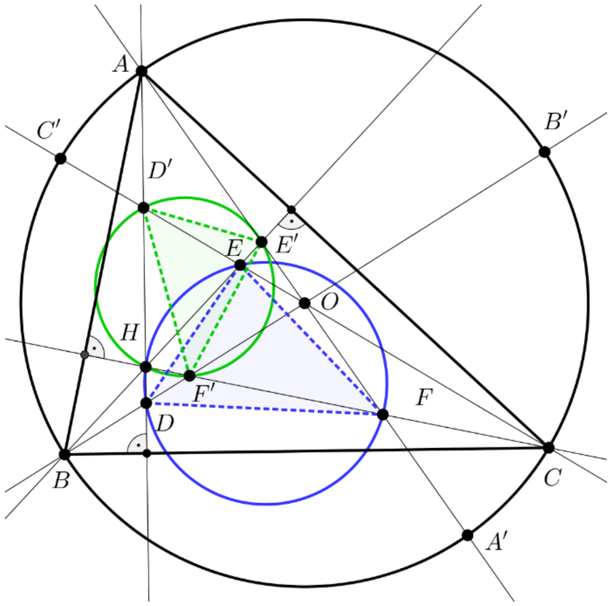

1. ábra




2. ábra

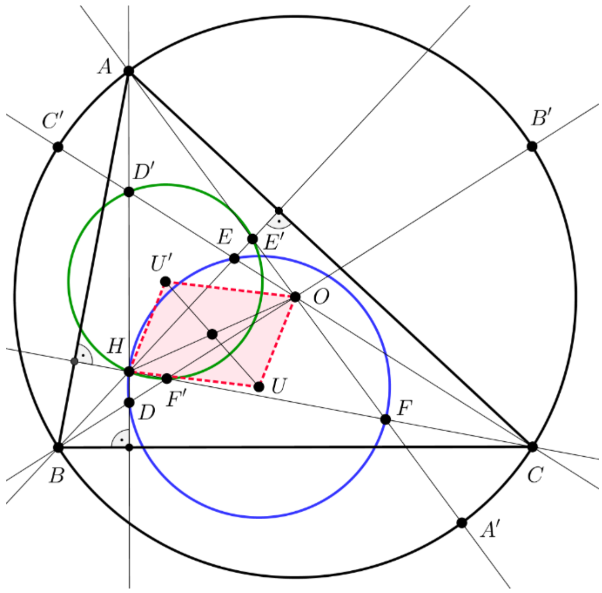
Főként trigonometrikus eszközök alkalmazásával sikerült igazolni, hogy az $DEF$ és $D'E'F'$ háromszögek hasonlók az $ABC$ háromszöghöz, és így egymáshoz is, és a tulajdonság teljesül minden háromszögre (nem csak az 1. és 2. ábra hegyesszögű háromszögeire).

A feladat megoldásának egyenes következményeként bizonyítottuk, hogy a $DEF$ és $D'E'F'$ háromszögek körülírt körei átmennek az $ABC$ háromszög $H$ magasságpontján (3. ábra), vagyis a $DEFH$ és $D'E'F'H$ négyszögek húrnégyszögek.



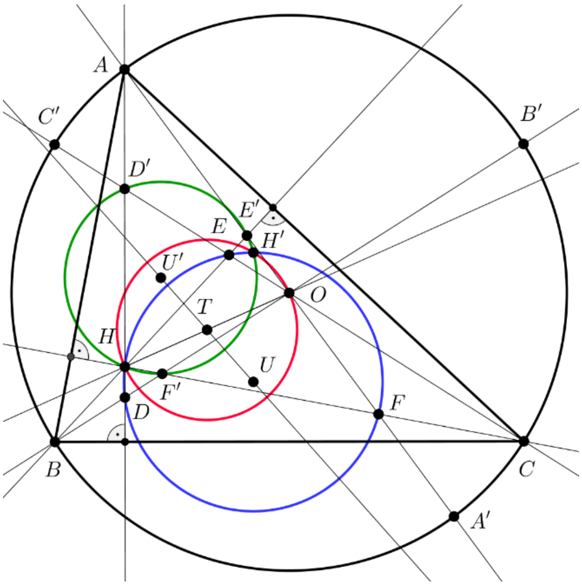

3. ábra

A probléma további tanulmányozása folyamán Nagydobai Kiss Sándornak az volt a sejtése, hogy az $O;H$ pontok, valamint a $DEF$ és $D'E'F'$ háromszögek körülírt köreinek $U;U'$ középpontjai egy parallelogramma csúcsai (4. ábra). A tételt analitikus úton sikerült igazolni.




4. ábra

A rajzok alapos tanulmányozása során Bíró Bálint megfogalmazta azt a sejtést, hogy a $DEF$ és $D'E'F'$ háromszögek körülírt köreinek másik metszéspontját $H'$-vel jelölve (az egyik metszéspont az előzőek szerint $H$), a $H'$ pont illeszkedik a $HO$ átmérőjű körre. (5. ábra). Ezt a tételt is sikerült egyszerű eszközökkel bizonyítani.




5. ábra

Ezzel lényegében azt is igazoltuk, hogy a $DEF$ és $D'E'F'$ körök, valamint a $HO$ átmérőjű kör a $H; H'$ alappontú hiperbolikus körsor tagjai.

A közös kutatás során a fentieken kívül sikerült még bizonyítani számos más észrevételt, például azt, hogy $OH'U'U$ négyszög szimmetrikus trapéz, de azt is, hogy a $C'BDD', B'CDD'$, $C'AE'E, A'CE'E$, $A'BF'F, B'AF'F$ mindannyian négyszögek szimmetrikus trapézok, továbbá azt is, hogy a $C'BDD'$; $B'CDD'$, a $C'AE'E$; $A'CE'E$, illetve az $A'BF'F$; $B'AF'F$ trapézpárok körülírt köreinek középpontjait összekötő szakaszok felezőpontjai rendre az $OD'D$, $OE'E$, $OF'F$ egyenlőszárú háromszögek körülírt köreinek középpontjai.

Közös kutatásunk alapján úgy látjuk, hogy az $ABC$ háromszögnek két új, nevezetes körét sikerült megtalálni és azoknak több, figyelemre méltó tulajdonságát is meghatároztuk.

Közös munkánk nyitott kérdése, hogy a $H'$ pont vajon a háromszög új nevezetes pontja-e? Ezt a kérdést a kutatás folytatása során szeretnénk eldönteni.

Irodalom:


[1] Clark Kimberling, *Triangle Centers and Central Triangles*, Congressus Numerantium, Winnipeg, Kanada, 1998.

[2] *Encyplopedia of Triangle Centers*, https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia

[3] Kiss, Sándor, *Comparative Analysis of Coordinate Geometry Methods* (in Hungarian), Editura Didactică și Pedagogică, București, 2008.