A számelmélet és a matematikai analízis kapcsolataiból

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

- A számelmélet a matematika egyik ága, mely eredetileg a természetes számok oszthatósági tulajdonságait vizsgálja
- Ez vizsgálható:
  - Elemi eszközökkel (aritmetika)
  - Felsőbb matematikai eszközökkel (algebra, analízis)
- Lényeges jellemző: diszkrét halmazokkal dolgozunk
- A számelmélet egyik részterülete: Diofantoszi egyenletek és egyenlet rendszerek megoldása N-en vagy Z-n.
- Az analízis vagy függvénytan a matematika egyik részterülete, amely a függvények vizsgálatával (analízisével) foglalkozik
- Néhány jellemző eszköze: végtelen bevezetése, nem diszktét halmazok, limesz, sorozatok, folytonosság, deriváltak, középérték tételek, integrálok, sorok, asszimptótikus sorbafejtések, stb.

Számelméleti és analízisbeli kapcsolatok:

- ✓ Lánctörtek, rekurziós sorozatok
- ✓ Az $x^2-ky^2=1$ Pell egyenlet megoldása rekurzív sorozatokkal (egyéb Diofantikus egyenlet hasonló megoldása)
- ✓ Prímszámokkal kapcsolatos végtelen összegek, végtelen szorzatok, asszimptótikus megközelítések, stb.

Oldjuk meg a természetes számok halmazán:

$$\begin{cases} x^2+y^2=u^2+v^2 \\ x^3+y^3=u^3+v^3 \end{cases}$$

Látható, hogy {x,y}={u,v} megoldás. Kérdés: van-e más megoldás?
Bizonyítjuk, hogy NINCS!

Felírható, hogy: $u^2-x^2=y^2-v^2$ és $u^3-x^3=y^3-v^3$

Feltételezhető: $0<x<u<v<y$ vagy $0<x<v<u<y$

A feladat megoldása:

Feltételezzük tehát: $0<x<u<v<y$

Az egyenlet felírható:

$$\boxed{\frac{u^3-x^3}{u^2-x^2}=\frac{y^3-v^3}{y^2-v^2}}$$

Alkalmazzuk a Cauchy-féle középértéktételt:

1) f,g: [a,b] $\rightarrow$ R folytonos függvények
2) f,g differenciálhatók az (a,b) intervallumon
3) g(x) nem nulla ez (a,b) intervallumon

Akkor létezik olyan $c \in (a,b)$ amelyre

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

Legyenek:

$$f(t) = t^3,\ g(t) = t^2,\ f,g : [x,u] \rightarrow R$$

Létezik $c_1 \in (x,u) \Rightarrow \dfrac{u^3 - x^3}{u^2 - x^2} = \dfrac{f'(c_1)}{g'(c_1)} = \dfrac{3}{2} c_1$

$$f(t) = t^3,\ g(t) = t^2,\ f,g : [y,v] \rightarrow R$$

Létezik $c_2 \in (v,y) \Rightarrow \dfrac{y^3 - v^3}{y^2 - v^2} = \dfrac{f'(c_1)}{g'(c_2)} = \dfrac{3}{2} c_2$

Tehát:

$$\frac{u^3 - x^3}{u^2 - x^2} = \frac{y^3 - v^3}{y^2 - v^2} \Leftrightarrow \frac{3}{2} c_1 = \frac{3}{2} c_2 \Leftrightarrow c_1 = c_2$$

Ez ELLENTMONDÁS, mert:

$c_1 \in (x,u),\ c_2 \in (v,y)$ és $(x,u) \cap (v,y) = \varnothing$ hiszen $0 < x < u < v < y$

Tehát NINCS más POZITÍV VALÓS megoldás, mint {x,u}={y,v}

Észrevételek:

1) A feladatot tulajdon képpen az N helyett, az R+ halmazon is megoldottuk!
2) A feladatnak az R halmazon már van más megoldása is mint {x,y}={u,v}!

Általánosítási lehetőségek I.

Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán:

$$\begin{cases} x^m + y^m = u^m + v^m \\ x^n + y^n = u^n + v^n \end{cases}$$

ahol $m \neq n,\ m \cdot n > 0,\ \ m,n \in R$

Általánosítási lehetőségek II.

Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán:

$$\begin{cases} f(x)+f(y)=f(u)+f(v) \\ g(x)+g(y)=g(u)+g(v) \end{cases}$$

Ahol f,g: [a,b] $\rightarrow$ R deriválható függvények úgy, hogy

$$h(t)=\frac{f'(t)}{g'(t)}$$

injektív függvény (például szigorúan monoton)

1. Kitűzött feladat:

a) Oldjuk meg a pozitív valós számok halmazán:

b) Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\boxed{\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ x^3+y^3=9 \end{cases}}$$

2. Kitűzött feladat:

Oldjuk meg a valós számok halmazán:

$$\boxed{3^x+4^x=2^x+5^x}$$

Parajd, 2018. november 16-18, A Magyar Tudomány Napja Konferencia