Súlypontokkal kapcsolatos analógiák

Simon József, Csíkszereda

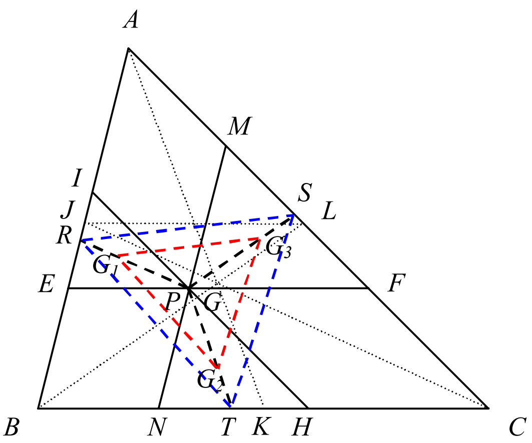
Legyen P az ABC háromszög belsejének egy tetszőleges pontja. A P ponton keresztül párhuzamos egyeneseket húzunk a háromszög oldalaival: $MN \parallel AB$, $EF \parallel BC$ és $IH \parallel AC$ úgy, hogy $I, E \in AB$, $N, H \in BC$ és $M, F \in AC$. Legyenek k_1, k_2 és k_3 az IEP, PNH és MPF háromszögeknek az ABC háromszöggel való hasonlósági arányai, G_1, G_2 és G_3 pedig az előbbi háromszögek súlypontjai. Igazoljuk, hogy:

a) a keletkezett kis háromszögek hasonlók az adott háromszöggel, azaz $IEP_\triangle \sim MPF_\triangle \sim PNH_\triangle \sim ABC_\triangle$;

b) $\dfrac{T_{G_1G_2G_3}}{T_{ABC}} = \dfrac{k_1k_2 + k_1k_3 + k_2k_3}{3}$;

c) $T_{G_1G_2G_3} = \dfrac{T_{AIM} + T_{BNE} + T_{CFH}}{3}$.

Megoldás



a) $\left.\begin{array}{l} \widehat{IEP} \equiv \widehat{PNH} \equiv \widehat{MPF} \equiv \widehat{ABC} \\ \widehat{EIP} \equiv \widehat{NPH} \equiv \widehat{PMF} \equiv \widehat{BAC} \end{array}\right\}$ (*párhuzamos szárú szögek*) $\Rightarrow$

$IEP_\triangle \sim PNH_\triangle \sim MPF_\triangle \sim ABC_\triangle$ (*1. eset*).

b) Az ábrán a PR, PT és PS szakaszok az IEP, PNH és MPF háromszögek oldalfelezői, az AK, BL és CJ szakaszok pedig az ABC háromszög oldalfelezői, ezek metszéspontja G, az ABC háromszög súlypontja.

$IEP_\triangle \sim ABC_\triangle \Rightarrow \dfrac{EP}{BC} = \dfrac{PR}{CJ} = k_1$, mert hasonló háromszögek megfelelő oldalfelezőinek aránya is egyenlő a hasonlósági aránnyal. Ugyanígy $PNH_\triangle \sim ABC_\triangle \Rightarrow \dfrac{NH}{BC} = \dfrac{PT}{AK} = k_2$ és $MPF_\triangle \sim ABC_\triangle \Rightarrow \dfrac{PF}{BC} = \dfrac{PS}{BL} = k_3$. Mivel $PR \parallel GJ$ és $PS \parallel GL \Rightarrow \widehat{RPS} \equiv \widehat{JGL} \Rightarrow \dfrac{T_{PRS}}{T_{GJL}} = \dfrac{PR \cdot PS}{GJ \cdot GL}$. (1) Tudjuk, hogy $\dfrac{PR}{CJ} = k_1$ és $\dfrac{CJ}{GJ} = 3$. A megfelelő oldalakat összeszorozva azt kapjuk, hogy $\dfrac{PR}{GJ} = 3k_1$. Ugyanígy $\dfrac{PS}{GL} = 3k_3$. Az (1) összefüggésbe behelyettesítve azt kapjuk, hogy $\dfrac{T_{PRS}}{T_{GJL}} = 9k_1k_3$. (2) $GJL_\triangle \sim GBC_\triangle$, a hasonlósági arány $\dfrac{1}{2} \Rightarrow \dfrac{T_{GJL}}{T_{GBC}} = \dfrac{1}{4}$. (3)
Mivel $\dfrac{GK}{AK} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow$ a GBC és ABC háromszögek BC-re húzott magasságainak aránya is $\dfrac{1}{3}$, ezért $\dfrac{T_{GBC}}{T_{ABC}} = \dfrac{1}{3}$. (4) A (2), (3) és (4) összefüggések megfelelő oldalait összeszorozva azt kapjuk, hogy $\dfrac{T_{PRS}}{\cancel{T_{GJL}}} \cdot \dfrac{\cancel{T_{GJL}}}{\cancel{T_{GBC}}} \cdot \dfrac{\cancel{T_{GBC}}}{T_{ABC}} = 9k_1k_3 \cdot \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{T_{PRS}}{T_{ABC}} = \dfrac{3}{4}k_1k_3$. (5)

Hasonlóan $\frac{T_{PRT}}{T_{ABC}}=\frac{3}{4}k_1k_2$ (6) és $\frac{T_{PST}}{T_{ABC}}=\frac{3}{4}k_2k_3$ (7). Most összeadjuk az (5), (6) és (7) egyenlőségek megfelelő oldalait: $\frac{T_{PRS}+T_{PRT}+T_{PST}}{T_{ABC}}=\frac{3}{4}\cdot\left(k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3\right)$ $\Rightarrow$ $\frac{T_{RST}}{T_{ABC}}=\frac{3}{4}\cdot\left(k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3\right)$. (8)

Végül észrevesszük, hogy $\frac{PG_1}{PR}=\frac{PG_3}{PS}=\frac{PG_2}{PT}=\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $G_1G_3 \parallel RS$, $G_1G_2 \parallel RT$ és $G_2G_3 \parallel TS$ $\Rightarrow$ $G_1G_2G_3\triangle \sim RTS\triangle$, a hasonlósági arány $\frac{2}{3}$ $\Rightarrow$ $\frac{T_{G_1G_2G_3}}{T_{RTS}}=\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$. (9)

A (8) és (9) egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\cancel{T_{RST}}}{T_{ABC}}\cdot\frac{T_{G_1G_2G_3}}{\cancel{T_{RST}}}=\frac{3}{\cancel{4}}\cdot\left(k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3\right)\cdot\frac{\cancel{4}}{9} \Rightarrow \underline{\frac{T_{G_1G_2G_3}}{T_{ABC}}=\frac{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}{3}}. \quad (10)$$

c) Az $AIPM$ négyszög paralelogramma $\Rightarrow$ $[AI]\equiv[MP]$ és $[AM]\equiv[IP]$. Felírhatjuk, hogy $\frac{T_{AIM}}{T_{ABC}}=\frac{AI\cdot AM}{AB\cdot AC}=\frac{MP}{AB}\cdot\frac{IP}{AC}=k_1k_3$. Ugyanígy $\frac{T_{BNE}}{T_{ABC}}=k_1k_2$ és $\frac{T_{CFH}}{T_{ABC}}=k_2k_3$.

A három egyenlőség megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy

$\frac{T_{AIM}+T_{BNE}+T_{CFH}}{T_{ABC}}=k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3$. A (10) összefüggés felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$T_{G_1G_2G_3}=\frac{T_{AIM}+T_{BNE}+T_{CFH}}{3}.$$

Következik az előbbi feladat térmértani megfelelője, analóg feladata.

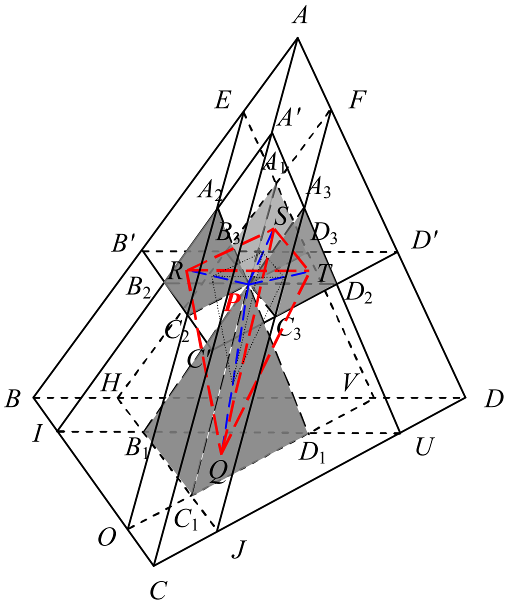
Adott az $ABCD$ tetraéder és P egy tetszőleges pont a tetraéder belsejében. A P ponton át párhuzamos síkokat húzunk a tetraéder lapjaival: $(PB_1C_1)\parallel(ABC)$, $(PC_1D_1)\parallel(ACD)$, $(PB_1D_1)\parallel(ABD)$ és $(B'C'D')\parallel(BCD)$, ahol $B_1, C_1, D_1 \in (BCD)$, $B'\in[AB]$, $C'\in[AC]$ és $D'\in[AD]$. Ez a négy sík a tetraéder lapjaival négy kis tetraédert alkot: $A_2PB_2C_2$, $A_3PC_3D_2$, $A_1PD_3B_3$ és $PB_1C_1D_1$. Legyenek k_1, k_2, k_3 és k_4 az előbbi tetraédereknek az adott tetraéderrel való hasonlósági arányai, G_1, G_2, G_3 és G_4 pedig a kis tetraéderek súlypontjai. A PB_1C_1 sík a DA, DB és DC éleket az F, H és J pontokban, a PC_1D_1 sík a BA, BC és BD éleket az E, O és V pontokban, a PB_1D_1 sík pedig a CA, CB és CD éleket az A', I és U pontokban metszi. Igazoljuk, hogy:

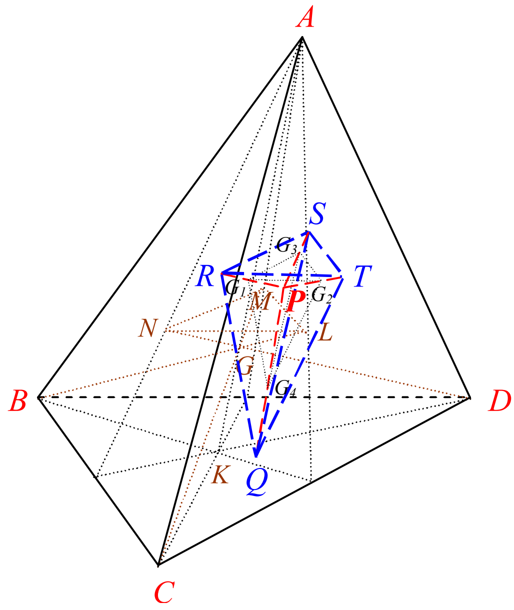
a) a négy kis tetraéder hasonló az $ABCD$ tetraéderrel;

b) $\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{ABCD}}=\frac{k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+k_1k_3k_4+k_2k_3k_4}{4}$;

c) $V_{G_1G_2G_3G_4}=\frac{V_{AA'EF}+V_{BB'IH}+V_{CC'OJ}+V_{DD'UV}}{4}$.

Megoldás





a) A négy kis tetraéder és az eredeti tetraéder megfelelő élei párhuzamosak egymással, ezért az öt tetraéder egymással hasonló.

b) A jobb követhetőség érdekében két ábrát követhetünk, a második ábrán a kis tetraéderek nem szerepelnek. Az első ábrán látható $A_2PB_2C_2$, $A_3PC_3D_2$, $A_1PD_3B_3$ és $PB_1C_1D_1$ tetraéderekben $[PR]$, $[PT]$, $[PS]$ és $[PQ]$ súlyvonalak, a második ábrán pedig G_1, G_2, G_3 és G_4 a súlyvonalakat 1:3 arányban osztó pontok, azaz a kis tetraéderek súlypontjai. A második ábrán felvettük az $[AK]$, $[BL]$, $[CM]$ és $[DN]$ súlyvonalakat is, ezek a G pontban metszik egymást.

A k_1, k_2, k_3 és k_4 a kis tetraédereknek az eredeti tetraéderrel való hasonlósági arányai. Azt is észrevesszük, hogy a megfelelő súlyvonalak párhuzamosak egymással, és azok páronkénti aránya egyenlő az illető tetraéderek hasonlósági arányával. Ennek alapján $PR \parallel NG$, $PT \parallel GL$ és $PS \parallel GM$, ami azt jelenti, hogy a $PRTS$ és a $GNLM$ tetraéderek P és G csúcsból kiinduló élei páronként párhuzamosak egymással. A két tetraéder térfogatának aránya $\frac{V_{PRTS}}{V_{GNLM}} = \frac{PR \cdot PT \cdot PS}{GN \cdot GL \cdot GM}$. Mivel $\frac{PR}{DN} = k_1$ és $DN = 4GN \Rightarrow \frac{PR}{GN} = 4k_1$. Ugyanígy $\frac{PT}{GL} = 4k_2$ és $\frac{PS}{GM} = 4k_3$, tehát $\frac{V_{PRTS}}{V_{GNLM}} = 4k_1 \cdot 4k_2 \cdot 4k_3 = 64k_1k_2k_3$. (1)

A $GNLM$ és $GDBC$ tetraéderek is hasonlók, a hasonlósági arány $\frac{1}{3}$, ezért a térfogatuk aránya egyenlő a hasonlósági arány köbével, azaz $\frac{V_{GNLM}}{V_{GDBC}} = \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. (2)

Mivel a G pont negyedakkora távolságra van a BCD síktól, mint az A, ezért $\frac{V_{GDBC}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{4}$. (3)

Az (1), (2) és (3) egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{V_{PRTS}}{\cancel{V_{GNLM}}}\cdot\frac{\cancel{V_{GNLM}}}{\cancel{V_{GDBC}}}\cdot\frac{\cancel{V_{GDBC}}}{V_{ABCD}}=64k_1k_2k_3\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{4}\Rightarrow\frac{V_{PRTS}}{V_{ABCD}}=\frac{16}{27}k_1k_2k_3.\ (4)$$

Hasonlóan: $\frac{V_{PRTQ}}{V_{ABCD}}=\frac{16}{27}k_1k_2k_4$, (5) $\frac{V_{PRQS}}{V_{ABCD}}=\frac{16}{27}k_1k_3k_4$ (6) és $\frac{V_{PTSQ}}{V_{ABCD}}=\frac{16}{27}k_2k_3k_4$. (7)

A (4), (5), (6) és (7) egyenlőségek megfelelő oldalait összeadva, azt kapjuk, hogy $\frac{V_{RSTQ}}{V_{ABCD}}=\frac{16}{27}\cdot\left(k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+k_1k_3k_4+k_2k_3k_4\right)$. (8)

Mivel $\frac{PG_1}{PR}=\frac{PG_2}{PT}=\frac{PG_3}{PS}=\frac{PG_4}{PQ}=\frac{3}{4}\Rightarrow G_1G_3\parallel RS$, $G_2G_3\parallel ST$, $G_1G_4\parallel RQ$ és $G_2G_4\parallel QT\Rightarrow$ a $G_1G_2G_3G_4$ tetraéder hasonló az $RSTQ$ tetraéderrel, a hasonlósági arány $\frac{3}{4}$, következik, hogy $\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{RSTQ}}=\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$. (9)

Végül a (8) és (9) egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozva azt kapjuk, hogy

$$\frac{\cancel{V_{RSTQ}}}{V_{ABCD}}\cdot\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{\cancel{V_{RSTQ}}}=\frac{16}{\cancel{27}}\cdot\frac{\cancel{27}}{64}\cdot\left(k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+k_1k_3k_4+k_2k_3k_4\right)\Rightarrow$$

$\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{ABCD}}=\frac{1}{4}\cdot\left(k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+k_1k_3k_4+k_2k_3k_4\right)$. Ezzel az állítást igazoltuk.

c) Az első ábrán látható, hogy $[AE]\equiv[A_3P]$, $[AF]\equiv[A_2P]$, $[AA']\equiv[A_1P]$ és $[CC']\equiv[C_1P]\Rightarrow$ $\frac{AE}{AB}=\frac{A_3P}{AB}=k_2$, $\frac{AF}{AD}=\frac{A_2P}{AD}=k_1$, $\frac{AA'}{AC}=\frac{A_1P}{AC}=k_3$ és $\frac{CC'}{AC}=\frac{C_1P}{AC}=k_4$.

$\frac{V_{AA'EF}}{V_{ABCD}}=\frac{AE}{AB}\cdot\frac{AF}{AD}\cdot\frac{AA'}{AC}=k_1k_2k_3$. Ugyanígy $\frac{V_{CC'OJ}}{V_{ABCD}}=\frac{CO}{CB}\cdot\frac{CJ}{CD}\cdot\frac{CC'}{CA}=k_1k_2k_4$,

$\frac{V_{BB'IH}}{V_{ABCD}}=\frac{BI}{BC}\cdot\frac{BH}{BD}\cdot\frac{BB'}{BA}=k_1k_3k_4$ és $\frac{V_{DD'UV}}{V_{ABCD}}=\frac{DU}{DC}\cdot\frac{DV}{DB}\cdot\frac{DD'}{DA}=k_2k_3k_4$.

Az egyenlőségek megfelelő oldalait összeadva azt kapjuk, hogy $\frac{V_{AA'EF}+V_{BB'IH}+V_{CC'OJ}+V_{DD'UV}}{V_{ABCD}}=k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+k_1k_3k_4+k_2k_3k_4$.

A b) alpont állítása alapján $4\cdot\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{ABCD}}=k_1k_2k_3+k_1k_2k_4+k_1k_3k_4+k_2k_3k_4\Rightarrow$

$$4\cdot\frac{V_{G_1G_2G_3G_4}}{V_{ABCD}}=\frac{V_{AA'EF}+V_{BB'IH}+V_{CC'OJ}+V_{DD'UV}}{V_{ABCD}}\Rightarrow V_{G_1G_2G_3G_4}=\frac{V_{AA'EF}+V_{BB'IH}+V_{CC'OJ}+V_{DD'UV}}{4}.$$

Ezek az analógiák tulajdonképpen a Matlap 2018/7-es számában közölt feladatom folytatásai.

Megjegyzés: ezeket a feladatokat Egyiptomban szerkesztettem a piramisok árnyékában.

Simon József

Csíkszereda,
2018.08.20