

Szabadformájú görbék és felületek energiaváltoztatása kontrollpontok helyzetmódosításával

Róth Ágoston*

Matematika és Informatika Intézet, Babeş–Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár
{agoston_roth@yahoo.com, agoston.roth@math.ubbcluj.ro}

Számítógéppel segített geometriai modellezés során görbék és felületek leírására többnyire a

$$\mathbf{c}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{p}_i f_{n,i}(u), \quad u \in [a, b], \quad -\infty < a < b < \infty$$

lineáris kombinációt, illetve az

$$\mathbf{s}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{i,j} f_{n,i}(u) g_{m,j}(v), \quad (u, v) \in [a, b] \times [c, d], \quad -\infty < c < d < \infty$$

tenzorszorzatot használják, ahol a $[\mathbf{p}_i]_{i=0}^n \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R}^3)$ és a $[\mathbf{p}_{i,j}]_{i=0,j=0}^{n,m} \in \mathcal{M}_{n+1,m+1}(\mathbb{R}^3)$ mátrixok kontrollpoligont, illetve kontrollhálót jelölnek, míg a kellően sima és alakmegőrzési tulajdonságokat is biztosító $\{f_{n,i}(u) : u \in [a, b]\}_{i=0}^n$ és $\{g_{m,j}(v) : v \in [c, d]\}_{j=0}^m$ függvényrendszerek valamilyen (nem feltétlenül polinomiális) függvényterek bázisát képezik.

A kontrollpontok egy részét rögzítettnek, míg a fennmaradtakat szabadon változtathatónak tekintve, görbék és felületek esetén az

$$E[\mathbf{c}; \mathbf{g}, \mathbf{a}] = \sum_{r=1}^{\rho} w_r \int_a^b \|\mathbf{c}^{(r)}(u)\|^2 du + w_g \int_a^b \|\mathbf{c}(u) - \mathbf{g}(u)\|^2 du + w_p \int_a^b \|\mathbf{c}(u) - \mathbf{a}\|^2 du, \quad (1)$$

illetve az

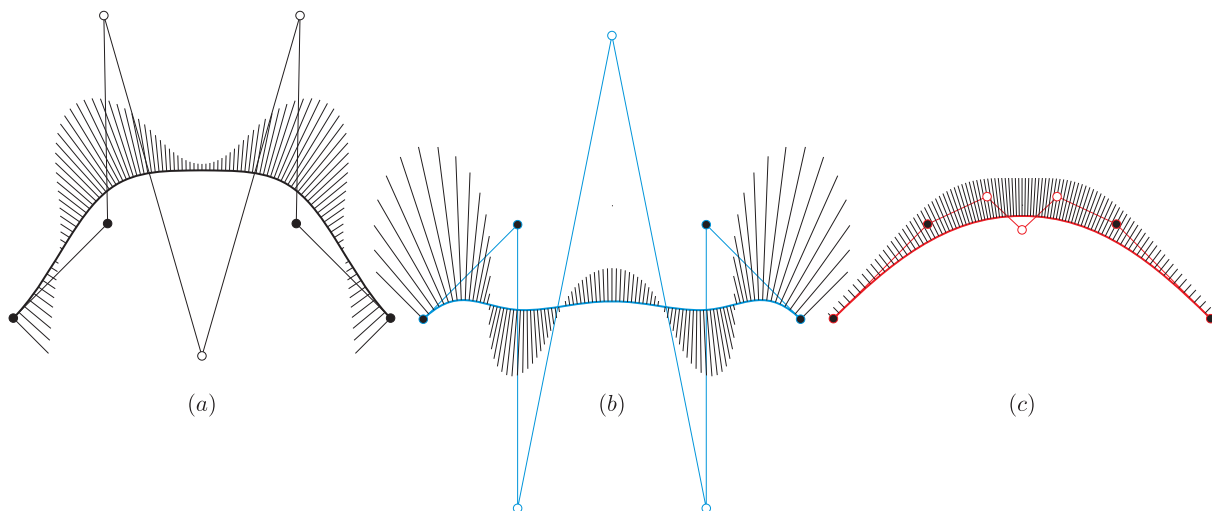
$$E[\mathbf{s}] = \sum_{r=1}^{\rho} w_r \left(\sum_{z=0}^r \binom{r}{z} \int_a^b \int_c^d \left\| \frac{\partial^r}{\partial u^z \partial v^{r-z}} \mathbf{s}(u, v) \right\|^2 dudv \right) \quad (2)$$

négyzetes alakra hozható energiameennyiségek globális minimalizálhatóságára szabunk feltételeket, ahol a $\{w_r\}_{r=1}^{\rho}$, w_g és w_p paraméterek nemnegatív és nem azonosan nulla súlyokat, míg $\mathbf{g} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ és $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ úgynevezett attraktorgörbét, illetve attraktorpontot jelölnek. Példaként az 1. és 2. ábrán az (1)-es, illetve a (2)-es energiafunkcionál optimalizálásával kapott görbéket, illetve felületeket láthatunk.

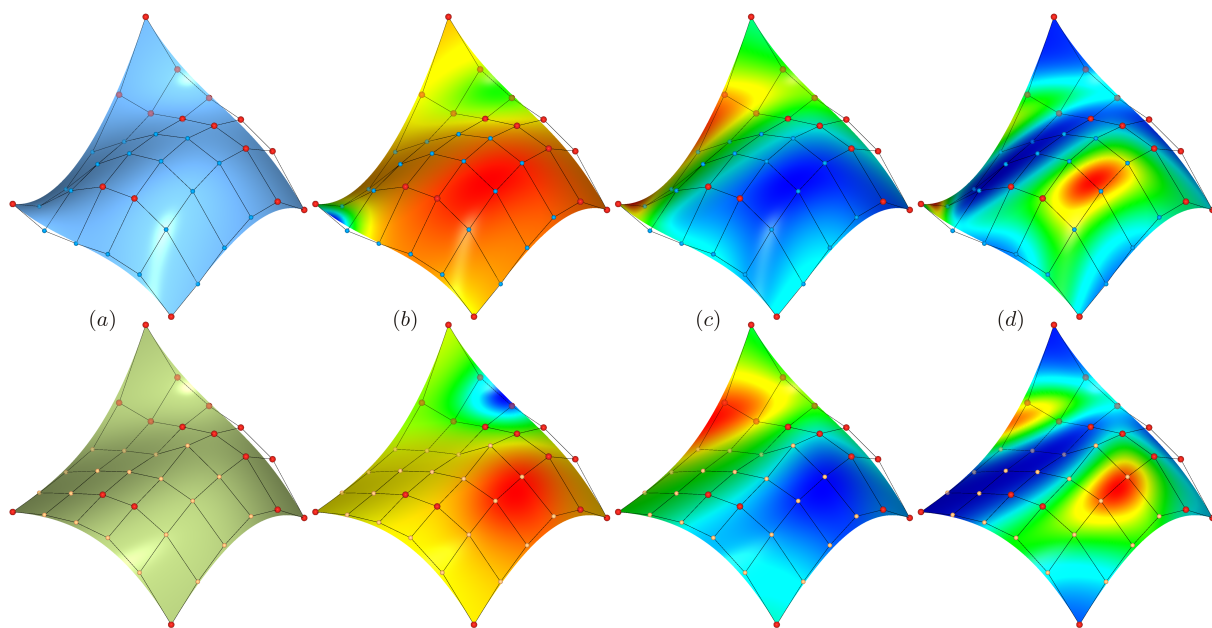
A háttérben alkalmazott legkisebb négyzetek módszere nem számít a szakirodalomban különösebb újdonságnak, viszont az abból fakadó, alább felsorakoztatott görbe- és felülettervezési módszerek (Juhász, Róth, 2018) már igen:

- kapcsolódó görbeívek és felületi foltok folytonossági rendjének megőrzése/növelése azok energiaszintjének csökkentésével (lásd a 3. és 4. ábrákat);
- folytonossági és energiainimalitási megszorításoknak eleget tevő hézagkitöltő (átmeneti) görbeívek és felületi foltok szerkesztése (lásd az 5. ábrát);
- Hermite-típusú interpolációs ívekből/foltokból álló, nem feltétlenül polinomiális összetett görbék/felületek energiainimalizációja (lásd a 6. ábrát).

*A kutatás az Európai Unió és Magyarország támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával a TÁMOP 4.2.4.A/2-11-1-2012-0001 azonosító számú „Nemzeti Kiválóság Program – Hazai hallgatói, illetve kutatói személyi támogatást biztosító rendszer kidolgozása és működtetése konvergencia program” című kiemelt projekt keretei között valósult meg.



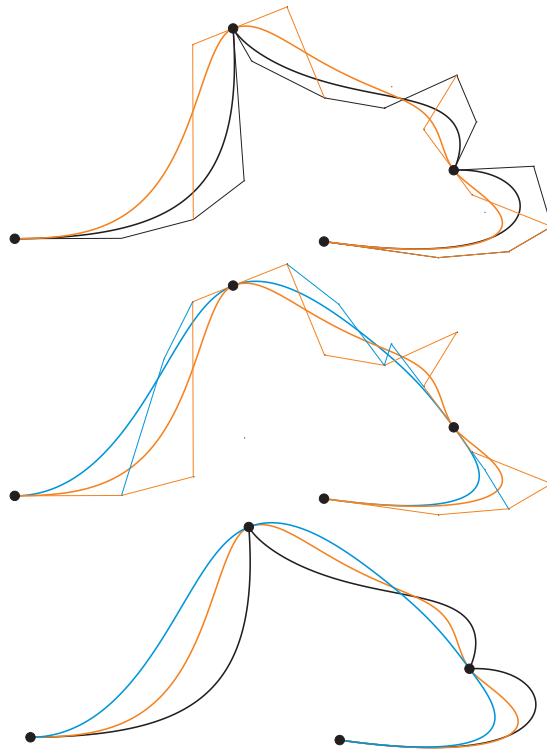
1. ábra. (a) Kiindulási görbe és görbületfésűje. A rögzített és mozgatható kontrollpontok fekete, illetve fehér körlapokkal vannak jelölve. A (b) és (c) esetekben a mozgatható kontrollpontok helyzetét a $\rho = 1$, $w_1 = 1$, illetve a $\rho = 3$, $w_1 = 100$, $w_2 = 1$, $w_3 = \frac{1}{10}$ beállításokkal határoztuk meg (mindkét esetben $w_g = w_p = 0$).



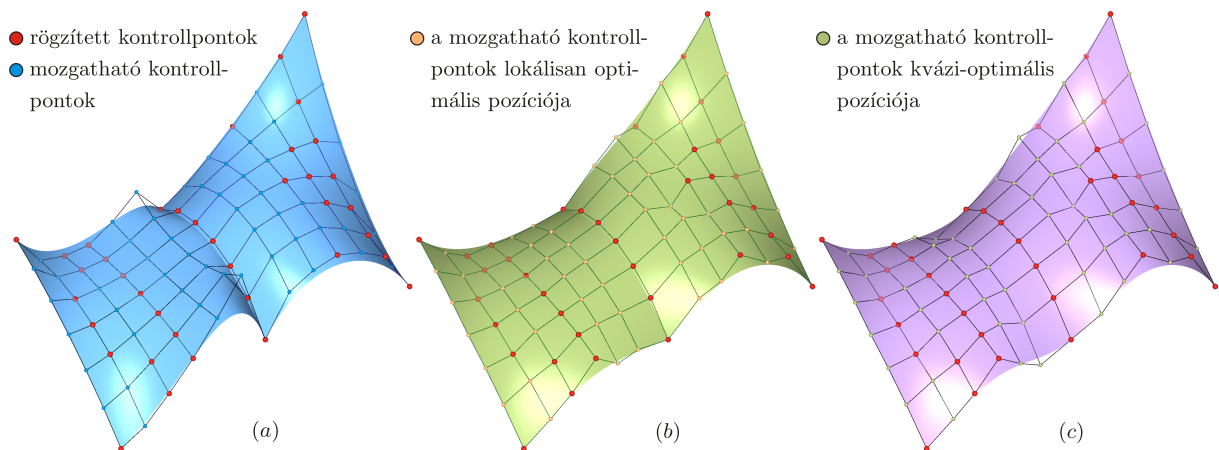
2. ábra. (a) A rögzített kontrollpontok piros, míg a szabadon változtathatóak kék gömböcskékkel vannak jelölve. A kiindulási kontrollháló által generált felület kék, míg az energiefunkcionál minimalizálásával kialakított kontrollháló által származtatott felület zöld anyagi jellemzővel van megjelenítve ($\rho = 3$, $w_1 = 1$, $w_2 = 5$, $w_3 = \frac{9}{2}$). Az eredeti kék kontrollpontok új helyét a narancssárga gömböcskék jelzik. A (b), (c) és (d) esetekben rendre a kiindulási, illetve az optimális felület pontonkénti Gauss-, közép- és teljes görbületének hőterképszerű változását követhetjük nyomon.

Hivatkozások

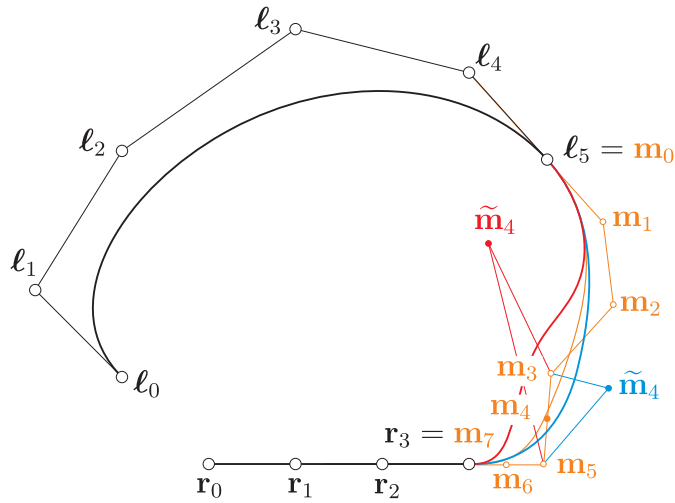
- I. Juhász, Á. Róth, September 17, 2018. *Adjusting the energies of curves defined by control points*, **Computer-Aided Design** (állapota: elfogadott, jelenleg nyomdai előkészületek alatt).



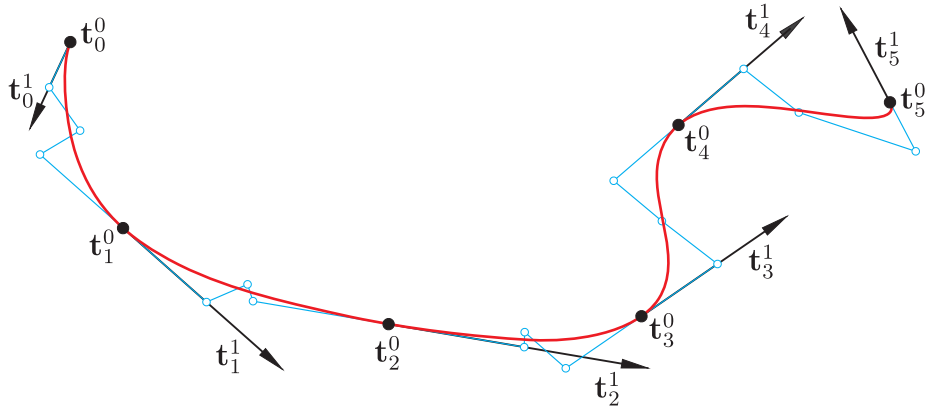
3. ábra. A kiindulási összetett fekete görbe három C^0 -osztályúan kapcsolódó ívből áll. Balról jobbra haladva, ezek rendre negyedfokú Bézier-görbéként, hatadfokú trigonometrikus B-görbéként, illetve ötödfokú Bézier-görbéként vannak leírva. A legfelső ábrán a narancssárga összetett görbe íveinek típusa változatlan, viszont azok már C^1 -osztályúan kapcsolódnak és szakaszonként az illeszkedést nem befolyásoló kontrollpontok helyzetét az (1)-es energiafunkcionál minimalizálásával határoztuk meg ($\rho = 2$, $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_g = w_p = 0$). A középső ábrán megjelenő kék görbe kontrollpontjait egyrészt a kapcsolódási rend növelésével, másrészt pedig szintén az (1)-es energiafunkcionál ugyanolyan paraméterezésű minimalizálásával állítottuk elő. Összehasonlíthatóság kedvéért a legelső ábrán mindhárom görbét megjelenítettük.



4. ábra. (a) C^0 -osztályúan kapcsolódó, kiindulási felületi foltok alakja. (b) Lokálisan optimalizált felületi foltok a kapcsolódási rend megőrzésével. (c) A (b) pontban kapott kontrollpontok kvázi-optimális helyzetváltoztatása C^1 -osztályúan kapcsolódó felületi foltok kialakítása végett.



5. ábra. A balszélső $[\ell_i]_{i=0}^5$ kontrollpoligon egy ötödfokú fekete Bézier-görbét, míg a jobbszélső $[\mathbf{r}_j]_{j=0}^3$ kontrollpoligon egy harmadfokú Bézier-görbéként leírt fekete egyenes szakaszt határoz meg. Az utóbbiakat összekötő színes átmeneti ívek mindegyike egy-egy hetedfokú Bézier-görbe, amelyek harmad- és másodrendben kapcsolódnak a kiindulási bal-, illetve jobbszélső fekete ívekhez. A kapcsolódási feltételek miatt az átmeneti közbelső ívet generáló $[\mathbf{m}_k]_{k=0}^7$ kontrollpoligonnak csak az \mathbf{m}_4 csúcsa változtatható szabadon. Annak kiindulási helyzetét narancssárga színnel tüntettük fel. A kék és a piros átmeneti görbék esetén az \mathbf{m}_4 pont optimális $\tilde{\mathbf{m}}_4$ helyzetét a $\rho = 2$, $w_1 = 0.2$, $w_2 = 1$, illetve a $\rho = 1$, $w_1 = 1$ beállításokkal határoztuk meg (mindkét esetben $w_g = w_p = 0$).



6. ábra. A $\{\mathbf{t}_k^0\}_{k=0}^5$ adatpontok és a hozzájuk társított $\{\mathbf{t}_k^1\}_{k=0}^5$ érintővektorok Hermite-típusú interpolációja C^1 -osztályúan kapcsolódó és lokálisan optimális alakú másodrendű (negyedfokú) trigonometrikus B-ívekből álló összetett görbével. Az egyes íveket öt-öt kontrollpont határozza meg. Ezek közül a két bal-, valamint a két jobbszélső rögzített a végpontbeli érintési feltételek miatt, viszont a közbelső kontrollpont az interpolációs feltételek megsértése nélkül szabadon megválasztható lenne. Optimális alakú ívek kialakítása végett a mozgatható kontrollpont helyzetét szakaszonként az (1)-es energiafunkcionál minimalizálásával határoztuk meg ($\rho = 3$, $w_1 = 0.2$, $w_2 = 1$, $w_3 = 0.1$, $w_g = w_p = 0$).