MAJDNEM (GYENGE) HELYI KONTRAKCIÓK

Zákány Mónika

Kolozsvári Műszaki Egyetem; Nagybányai Egyetemi Központ

zakanymoni@yahoo.com

A helyi kontrakciók és a gyenge kontrakciók fogalmának egybeolvadásából születtek a gyenge helyi kontrakciók. Ezen új típusú kontrakciók fixpontjait vizsgáljuk, a létezést és az unicitást egyaránt. Ezt követi a folytonosság vizsgálata a függvény fixpontjaiban.

Kulcsszavak: gyenge helyi kontrakció, kontrakciós együttható, fixponttétel, helyi kontrakció

1. Értelmezés. *Legyen (X,d) metrikus tér. Ekkor* $T : X \to X$ *leképezést gyenge kontrakciónak vagy* (δ, L)*- kontrakciónak nevezzük,ha léteznek* $\delta \in (0, 1)$ *és* $L \geq 0$ *állandók, úgy hogy*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y) + L \cdot d(y, Tx), \forall x, y \in X \tag{1}$$

2. Megjegyzés. *A gyenge kontrakciót először V. Berinde vezette be [3],2004- ben.*

3. Megjegyzés. *Mivel a távolság szimmetrikus, a gyenge kontrakció (1) feltétele helyettesíthető a következő egyenlőtlenséggel:*

$$d(Tx, Ty) \leq \delta \cdot d(x, y) + L \cdot d(x, Ty), \forall x, y \in X \tag{2}$$

amit az (1)- ből kapunk, ha kicseréljük x és y- t egymás közt.

Nyilvánvaló: annak bizonyításához, hogy T gyenge kontrakció, az (1) és (2) feltételeknek egyaránt teljesülniük kell.

A következő tétel megmutatja, hogy egy gyenge kontrakció folytonos minden fixpontjában az [1] alapján.

4. Tétel. *Legyen (X,d) teljes metrikus tér és* $T : X \to X$ *gyenge kontrakció. Akkor T folytonos bármely fixpontjában, azaz* $\forall p \in Fix(T)$ *pontban.*

A helyi kontrakciókat először Martins da Rocha és Filipe Vailakis vezette be [6] (2010- ben), itt tanulmányozták a fixpontok létezését és unicitását a helyi kontrakciók esetén.

5. Értelmezés. *Legyen F egy halmaz és legyen* $\mathcal{D} = (d_j)_{j\in J}$ *féltávolság-család, melyek F- en értelmezettek. Tekintsük* $\mathcal{D}$ *által az F- en értelmezett gyenge topológiát.*

Legyen r függvény, mely leképezi J halmazt önmagára. Ekkor $T : F \to F$ *helyi kontrakció (*$\mathcal{D}$*,r) szerint, ha bármely j esetén, létezik* $\beta_j \in [0, 1)$ *úgy, hogy*

$$\forall f, g \in F, \quad d_j(Tf, Tg) \leq \beta_j d_{r(j)}(f, g)$$

Megpróbálunk a fent említett két kontrakcióból egy új kontraktív leképezést értelmezni: a gyenge helyi kontrakciókat.

6. Értelmezés. *A következő megfeleltetést,* $d(x, y) : X \times X \to \mathbb{R}_+$ *pszeudometrikának nevezzük, ha teljesíti az alábbi feltételeket:*

1. $d(x, y) = d(y, x)$
2. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$
3. $x = y \Rightarrow d(x, y) = 0$

Metrikus terekben a 3. feltétel így alakul: $x = y \Leftrightarrow$d(x,y)=0

7. Értelmezés. *Legyen X egy halmaz és* $\mathcal{D} = (d_j)_{j \in J}$ *egy X-en értelmezett pszeudometrika-család. Tekintsük az X-en értelmezett,* $\mathcal{D}$ *család által meghatározott gyenge topológiát, melyet* σ*- val fogunk jelölni.*
Az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *sorozat* $\sigma - Cauchy$ *típusú, ha* d_j*-Cauchy sorozat,* $\forall j \in J$.
Az $A \subset X$ *részhalmaz szekvenciálisan* σ*-teljes halmaz, ha bármely* σ*-Cauchy sorozat X- ből konvergens X-ben a* σ*-topológia esetén.*
Az $A \subset X$ *részhalmaz* σ*-határos, ha* $diam_j(A) \equiv sup\{d_j(x,y) : x, y \in A\}$ *véges,bármely* $j \in J$.

8. Értelmezés. *Legyen* $r : J \to J$ *függvény. Ekkor* $T : X \to X$ *leképezést gyenge helyi kontrakciónak nevezzük (*$\mathcal{D}$*,r) szerint, ha bármely j esetén, léteznek* $\theta \in (0, 1)$ *és* $L \geq 0$ *állandók úgy, hogy*

$$d_j(Tx, Ty) \leq \theta \cdot d_j(x, y) + L \cdot d_{r(j)}(y, Tx), \forall x, y \in X \tag{3}$$

9. Megjegyzés. *A gyenge kontrakciók egy sajátos esetét jelentik a gyenge helyi kontrakcióknak, tekintve az (X,d) metrikus teret az X- en értelmezett pszeudometrika helyett. Továbbá, r függvény helyett az identikus leképezést kell tekintenünk a (3) összefüggésben, tehát r(j)=j.*

10. Értelmezés. *Az X tér* σ*- Hausdorff tér, ha a következő feltétel teljesül: minden x,y* $\in X$, $x \neq y$ *pár esetén, létezik j* $\in$*J úgy, hogy* $d_j(x, y) > 0$.
Ha A nemüres részhalmaza X- nek, akkor bármely $z \in X$ *esetén, tekintsük:*
$d_j(z, A) \equiv inf\{d_j(z, y) : y \in A\}$.

A következő tétel a gyenge helyi kontrakciók fixpontjának létezését biztosítja.

11. Tétel. *Legyen az* $r : J \to J$ *függvény és* $T : X \to X$ *gyenge helyi kontrakció (*$\mathcal{D}$*,r) szerint. Tekintsük* $A \subset X$ *nemüres,* σ*- határos, szekvenciálisan* σ*- teljes, és T- invariáns részhalmazt.*
Ha teljesül:

$$\forall j \in J, \quad \lim_{n\to\infty} \theta^{n+1} diam_{r^{n+1}(j)}(A) = 0 \tag{4}$$

akkor T függvény rendelkezik egy x^* *fixponttal az A halmazban.*

12. Megjegyzés. *Ha T teljesíti a (3) egyenlőtlenséget, úgy hogy* $L = 0$ *és* $r : J \to J$ *az identikus leképezés, akkor Vailakis tételét kapjuk meg [6] abban az esetben, ha megválasztjuk* $\theta = \beta_j$ *értéket.*
Továbbá, $d_j = d, \forall j \in J$ *esetben, ahol* $d =$ *távolság az X halmazban, a jól ismert Banach kontrakciót kapjuk, az ő egyetlen fixpontjával.*
A következő tétel a gyenge helyi kontrakciók fixpontjának unicitását biztosítja.

13. Tétel. *Ha a 11.Tétel feltételeihez hozzáadjuk:*
(U) bármely rögzített $j \in J$ *esetén, létezik:*

$$\lim_{n\to\infty} (\theta + L)^n diam_{r^n(j)}(z, A) = 0, \forall x, y \in X \tag{5}$$

akkor az x^* *fixpont unicitása fennáll.*

EREDMÉNYEK

A dolgozat önálló eredménye a 14 . Tételben jelenik meg. Ez megadja a választ a gyenge helyi kontrakciók folytonosságát illetően a fixpontban.

14. Tétel. *Legyen X halmaz és* $\mathcal{D} = (d_j)_{j \in J}$ *egy X-en értelmezett pszeudometrika-család;*
legyen $T : X \to X$ *egy gyenge helyi kontrakció, mely eleget tesz a (4) feltételnek, tehát van fixpontja.*
Akkor T folytonos f- ben, bármely $f \in Fix(T)$.

Bizonyítás: *Mivel T gyenge helyi kontrakció, léteznek a $\theta \in (0,1)$ és $L \geq 0$ állandók úgy, hogy:*

$$d_j(Tx, Ty) \leq \theta \cdot d_j(x,y) + L \cdot d_{r(j)}(y, Tx), \forall x, y \in X \tag{6}$$

Bármely $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ sorozat esetén X-ből, mely konvergens f- hez, tekintsük $y := y_n, x := f$ (6)- ban, és azt kapjuk, hogy:

$$d_j(Tf, Ty_n) \leq \theta \cdot d_j(f, y_n) + L \cdot d_{r(j)}(y_n, Tf), n = 0, 1, 2, ... \tag{7}$$

Felhasználva azt, hogy f fixpontja T- nek, vagyis $Tf = f$, következik:

$$d_j(Ty_n, Tf) \leq \theta \cdot d_j(f, y_n) + L \cdot d_{r(j)}(y_n, f), n = 0, 1, 2, ... \tag{8}$$

Ebben a pillanatban, ha $n \to \infty$ (8)- ban, azt vonhatjuk le következtetésnek, hogy $Ty_n \to Tf$, ami pontosan azt jelenti, hogy T folytonos f- ben.
Mivel a fixpontot tetszőlegesen választottuk meg, ezért a bizonyítás teljes.
Példa. *Legyen $X = \{exp(it) : 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\}$, $e^{it} = cost + isint$, $T(e^{it}) = e^{\frac{it}{2}}$.*
Hsználjuk a Bielecki metrikát, azaz:

$$d_j(f,g) = max(|f(x) - g(x)| \cdot e^{-\tau \cdot j}; f, g \in X; x \in [a,b] \tag{9}$$

ahol $\tau > 0$ és $r(j) = j + 1$. Ebben az esetben:
$max(|T(e^{it}) - T(e^{iv})| \cdot e^{-\tau j}) \leq \theta \cdot max(|e^{it} - e^{iv}| \cdot e^{-j\tau}) + L \cdot max(|e^{iv} - T(e^{it})| \cdot e^{-\tau(j+1)})$
Alkalmazva a következő összefüggést: $|e^{it} - e^{iv}| = 2 \cdot |sin\frac{t-v}{2}|$, azt kapjuk, hogy:
$max\{|e^{\frac{it}{2}}) - e^{\frac{iv}{2}})| \cdot e^{-\tau j}\} \leq \theta \cdot max\{|2sin\frac{t-v}{2}| \cdot e^{-j\tau}\} + L \cdot max\{|2sin\frac{v-\frac{t}{2}}{2})| \cdot e^{-\tau(j+1)}\}$
Innen, néhány számítás után következik:

$$max|sin\frac{t-v}{4}| \leq \theta \cdot max|sin\frac{t-v}{2}| + L \cdot max|sin\frac{v-\frac{t}{2}}{2}| \cdot e^{-\tau}$$

A maximális értéket így közelíthetjük meg:

$$1 \leq \theta \cdot 1 + L \cdot e^{-\tau} \cdot 1$$

Ha tekintjük $L = e^{\tau} > 0$ és $\theta = \frac{1}{2} < 1$, azt találjuk, hogy $1 + \frac{1}{2} \geq 1$, ami azt jelenti, hogy T gyenge helyi kontrakció és $Fix(T) = \{0\}$

15. Megjegyzés. *Nyilvánvaló, hogy T gyenge helyi kontrakció bármely $\theta \in (0,1)$ érték esetén.*

KÖVETKEZTETÉSEK, JAVASLATOK

Ez a dolgozat a kontrakciók folytonosságát vizsgálja a fixpontokban (ha léteznek), követve V. Berinde és M. Pacurar cikkét [1]. Az önálló kutatómunka eredménye a gyenge helyi kontrakciók folytonosságára vonatkozik, ahol állandó kontrakciós együtthatókat használtam.
A változó együtthatók esete még egy megoldásra váró probléma.

Hivatkozások

[1] Berinde, V.,Pacurar,M. Fixed points and continuity of almost contractions Carpathian J. Math. 19 (2003) No. 1, 7-22

[2] Berinde, V., On the approximation of fixed points of weak contractive mappings Carpathian J. Math. 19 (2003) No. 1, 7-22

[3] Berinde, V., Approximating fixed points of weak contractions using the Picard iteration Nonlinear Analysis Forum 9(2004) No.1, 43-53

[4] Fang Jin-xuan, FIXED POINT THEOREMS OF LOCAL CONTRACTION MAPPINGS ON MENGER SPACES, Applied Mathematics and Mechanics, (English Edition, Vol. 12, No. 4, Apr. 1991)Published by SUT,Shanghai, China

[5] G. V. R. Babu, M. L. Sandhya, M. V. R. Kameswari, A note on a fixed point theorem of Berinde on weak contractions, Carpathian J. Math., 24 (2008), No.1

[6] Martins-da-Rocha,Filipe, Vailakis, Yiannis, Existence and uniqueness of a fixed point for local contractions, Econometrica, vol.78, No.3 (May, 2010) 1127-1141

[7]] I.A. Rus, Generalized Contractions and Applications, Cluj University Press, Cluj-Napoca, 2001

[8] Schweizer, B., A. Sklar and E. Thorp, The metrization of statistical metric spaces, Pacific J. Math., 10 (1960), 673 - 675.