Lineáris komplementaritás szimpliciális kúpokon

Németh Sándor és Németh Sándor Zoltán

Babes-Bolyai Tudományegyetem, University of Birmingham, UK

nemab@math.ubbcluj.ro, nemeths@for.mat.bham.ac.uk

Legyen $(\mathbb{R}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ az $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skaláris szorzattal felruházott m-dimenziós valós euklideszi tér, melyben adott az $e^1, ..., e^m$ ortonormális vektorrendszer neghatározta vonatkoztatási rendszer. Az $\mathbb{R}^m$ tér elemeit az $m \times 1$ dimenziós mátrixokkal azonosítjuk.

Jelöljük az $\langle x, y\rangle = 0$ összefüggést $x \perp y$-el.

A $K \subset \mathbb{R}^m$ halmaz *konvex kúp* ha $\lambda x + \mu y \in K$ bármely $x, y \in K$ vektorokra és bármilyen $\lambda, \mu \geq 0$ valós számokra.

A

$$K = cone\{x^1, \dots, x^m\} := \{\lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_m x^m : \lambda_i > 0, \ i = 1, \dots, m\} \tag{1}$$

halmazt, ahol $x^1, \dots, x^m \in \mathbb{R}^m$ lineárisan független vektorok, *szimpliciális kúp*nak nevezzük.

A

$$cone\{e^1, \dots, e^m\} \tag{2}$$

szimpliciális kúpot *pozitív ort'nsnak* nevezzük és $\mathbb{R}^m_+$-al jelöljük. Minden szimpliciális kúp felírható a $K = A\mathbb{R}^m_+$ alakban, ahol $A \in GL(m, \mathbb{R})$ és $GL(m, \mathbb{R})$ az m-dimenziós nemszinguláris négyzetes mátrixok csoportját jelöli.

A

$$K^* := \{y \in \mathbb{R}^m : \langle x, y\rangle \geq 0, \ \forall\, x \in K\}$$

halmazt a K kúp *duálisának* nevezzük.

Legyen $K \subset \mathbb{R}^m$ kúp, $K^* \in \mathbb{R}^m$ ennek duálisa, $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$ m-dimenziós négyzetes mátrix és $q \in \mathbb{R}^m$ adott vektor. Az

$$LCP(K, M, q) : \text{ keresett } x \in \mathbb{R}^m \text{ úgy, hogy } K \ni x \perp Mx + q \in K^* \tag{3}$$

feladatot *a K kúpon értelmezett M és q meghatározta lineáris komplementaritási feladatnak* nevezzük.

Ha $K = \mathbb{R}^m_+$ az $LCP(\mathbb{R}^m_+, M, q)$ feladatot $LCP(M, q)$-vel jelöljük és M és q meghatározta *klasszikus lineáris komplementaritási feladatnak* nevezzük.

Az $LCP(K, M, q)$ feladat megoldásainak halmazát jelölje $SOL(K, M, q)$.

Ha $K = L\mathbb{R}^m_+$ egy szimpliciális kúp, akkor

$$SOL(K, M, q) = M(SOL(\mathbb{R}^m_+, L^T ML, M^T q)).$$

Tehát a szimpliciális kúpon értelmezett lineáris komplementaritási feladat egy klasszikus lineáris komplementaritási feladattal ekvivalens.

A lineáris komplementaritási feladat, mint az optimalizáció egyik legfontosabbika rendkívül gazdag irodalommal rendelkezik, (lásd pl. [1] és [2]) s bár a felvezetése mindig általános kúpra vonatkozik, az irodalom kevesebb mint ezreléke tárgyal a klasszikustól eltérő eseteket. Ismeretünk szerint csak az évtizednyi múlttal rendelkező Lorentz kúpra és a pozitív szemidefinit kúpra vonatkozó feladatok jelentik a kivételt.

Mostani jegyzetünk a négyzetes matrixok a szerinti osztályozását adja meg, hogy a szimpliciális kúpokra vonatkozó komplementaritási feladat tekintetében hogyan viselkednek [3].

1. Értelmezés. *Legyen $M \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Azt mondjuk, hogy*

1. *M a K-*P *tulajdonsággal rendelkezik* *ha* $cardSOL(K, M, q) = 1 \ \ \forall\, q$.

2. *M a K-*Q *tulajdonsággal rendelkezik* *ha* $SOL(K, M, q) \neq \emptyset, \ \ \forall\, q$.

3. *M a* K-FS tulajdonsággal rendelkezik *ha* $(AK + q) \cap K^* \neq \varnothing, \ \forall\, q \in \mathbb{R}^m$.

2. Tétel. *Tegyük föl, hogy $M \in GL(m, \mathbb{R})$. Akkor a következő feltételeknek pontosan egyike teljesül:*

1. *M teljesíti a K-FS föltételt bármely szimpliciális K kúp esetén $\iff$ M teljesíti a K-Q föltételt bármely szimpliciális K kúp esetén $\iff$ M teljesíti a K-P föltételt bármely szimpliciális K kúp esetén.*
2. *Nincs olyan szimpliciális K kúp, amelyre M teljesítené a K-FS föltételt.*
3. *Létezik olyan K szimpliciális kúp amelyre M nem teljesíti a K-FS föltételt és létezik olyan L szimpliciális kúp, amelyre M teljesíti az L-Q föltételt.*

Hivatkozások

[1] R. W. Cottle, S-J. Pang R. és E. Stone, The Linear Complementarity Problem, vol 60. Classics in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2009.

[2] R. A. Horn és C. R. Johnson, Matrix Analysis, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2013.

[3] A. B. Németh és S. Z. Németh, Linear complementarity on simplicial cones and the conjugate orbit of matrices, arXiv, http://arxiv.org/abs/1608.08895